سلسلة ملخصات شوم

نظريات ومسائل فى

بحوث العمليات

تأليف

الأستاذ الدكتور/ ريتشارد برونسون

أستاذ الرياضة وعلوم الحاسب

جامعة ديكنسون الأمريكية

ترجمة

الأستاذ الدكتور/ حسن حسنى الغبارى

قسم هندسة الإنتاج الصناعى

كلية الهندسة - جامعة المنصورة

مراجعة

الأستاذ الدكتور/ محمد إبراهيم يونس

أستاذ ومدير برنامج الحاسبات

بالجامعة الأمريكية بالقاهرة

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

مصر

حقوق النشر

الطبعة الأجنبية : حقوق التأليف © ١٩٨٢ ، دار ماكجروهيل للنشر ، إنك ،

جميع الحقوق محفوظة

OBERATIONS RESEARCH

Richard Bronson

الطبعة العربية الأولى : حقوق الطبع والنشر © ١٩٨٨ ، جميع الحقوق محفوظة

الطبعة العربية الثانية : حقوق الطبع والنشر © ٢٠٠٢ ، جميع الحقوق محفوظة للناشر

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

٨ ش ابراهيم العرابى – النزهة الجديدة – القاهرة

ص.ب : ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب – القاهرة

ت : ٢٩٥٧٦٥٥ – ٢٩٧٢٣٤٤

تلكس : ٢٠٨١٥ PBCRUN

فاكس : ٠٠٢٠٢/٢٩٥٧٦٥٥

لا يجوز نشر أى جزء من الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى نحو أو بأى طريقة سواء كانت إلكترونية أو ميكانيكية أو بخلاف ذلك إلا بموافقة الناشر على هذا كتابة ومقدماً .

ISBN - 07 - 0848130

مقدمة الناشر

المعرفة هى أصل الحضارة ،
والكلمة هى أصل المعرفة ،
والكلمة المطبوعة هى أهم مكون فى هذا المصدر .

وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة والإعلام وأوسعها انتشاراً وأبقاها أثراً ، حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة صياغة حضارتها وإضاءة الطريق بنور العلم والمعرفة .

والكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها وترجمتها إلى لغات الآخرين ، ثم توزيعها ، وذلك وحده هو الذى يكفل لها أداء رسالتها .

وعالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنبات ، والعلم لا وطن له ولا حدود ، ويوم يحظى القارىء العربى بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية لهو اليوم الذى تتطلع له الأمة العربية جمعاء .

والدار الدولية للاستثمارات الثقافية تشعر بالرضا عن مساهمتها فى هذا المجال بتقديم الطبعات العربية للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب الإتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير إحتياجات القارىء العربى أستاذاً وباحثاً وممارساً .

ومن جانب آخر فنحن نمد يدنا إلى الجامعات العربية والمراكز العلمية والمؤسسات والهيئات الثقافية للتعاون معنا فى إصدار طبعات عربية حديثة من الكتب والمراجع العلمية تخدم التقدم العلمى والحضارى للقارىء العربى .

والله ولى التوفيق ،،،

محمد وفائى كامل
مدير عام
الدار الدولية للاستثمارات الثقافية



مقدمة الطبعة العربية

يتميز العصر الحالى بتعقد المشكلات وتضخم الموارد البشرية والمادية المتاحة وتعدد البدائل المختلفة لحل المشكلات . لذلك فقد ظهرت علوم بحوث العمليات لتقدم الصيغ العلمية والرياضية لمحاولة إيجاد الحلول المثلى لهذه المشكلات . ولقد ظهر العديد من المراجع والكتب باللغة الإنجليزية وغيرها تتناول موضوعات وطرق وأساليب بحوث العمليات ، إلا أن المكتبة العربية كانت إلى وقت قريب تفتقر إلى مثل هذه الكتب مما جعل بحوث العمليات مقصورة على قارئى اللغة الإنجليزية فقط .

لذلك فقد رأينا أن نقوم بمحاولة تقديم كتاب شامل باللغة العربية يهم الطلاب كما يهم المتخصصين الذين يرغبون فى التزود بهذه الموضوعات لاستخدامها فى إيجاد الحلول لمشكلات أعمالهم . وقد إخترنا هذا الكتاب ليكون ترجمة عربية كاملة لعلها تحقق الهدف الذى نسعى إليه . وقد حاولنا خلال الترجمة أن نلتزم قدر المستطاع بالترجمات العربية التى وضعت من قبل للكثير من الاصطلاحات الإنجليزية كما حاولنا إيجاد ترجمات معبرة ومفهومة لبعض الاصطلاحات التى لم تكن قد ترجمت من قبل .

وإننا لنتوجه بالشكر للزملاء الذين عاونوا فى إبداء الرأى العلمى فى الترجمات المستخدمة وكذلك الزملاء فى مؤسسة ماكجروهيل والسادة الدار الدولية للاستثمارات الثقافية بالقاهرة على جهودهم الكبيرة لإخراج هذا الكتاب بهذه الصورة المشرفة .

واخيراً نسأل الله أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل المتواضع لخدمة القارىء العربى فى كل مكان .

حسن حسنى الغبارى

القاهرة

يناير ١٩٨٨



مقدمة الطبعة الأجنبية

تعتبر بحوث العمليات - التي تهتم بالتخصيص الأمثل للموارد النادرة - فناً وعلماً على السواء . يتمثل الفن فى القدرة على التعبير عن مفاهيم الكفاءة والندرة فى نموذج رياضى محدداً تحديداً جيداً بالنسبة لموقف معين ، أما العلم فيتمثل فى اشتقاق الطرق الحسابية لحل هذه النماذج الرياضية . وهذا الكتاب يقدم للقراء كلاً من جانبى هذا المجال .

ينقسم كل فصل من فصول الكتاب إلى ثلاثة أجزاء . يتناول الجزء الأول عامة الطرق ، باستثناء الفصل الأول الذى يهتم بالاقتصار على مفاهيم البرمجة الرياضية ، ويحوى الجزء الثانى من كل فصل مسائل كاملة محلوله ، بالإضافة إلى توضيح الأساليب المقدمة فى الجزء الأول ، وقد تزيد هذه المسائل على هذه الأساليب المقدمة كما قد تقدم نماذج لحالات عملية لفهم طرق النمزجة . أما الجزء الثالث والأخير من كل فصل فيحتوى على مسائل وحلولها النهائية ، حيث يمكن للقارىء من خلالها الحكم على مدى تمكنه من المادة العلمية المقدمة .

أما الكتاب نفسه فينقسم إلى جزئين أساسيين هما :

البرمجة الرياضية ، والطرق الاحتمالية . يتكون الجزء الأول من الفصل الأول وحتى الفصل الخامس عشر ويتناول الطرق المؤكدة للبرمجة الخطية ، الغير خطية ، الأعداد الصحيحة والديناميكية ، بالإضافة إلى فصل عن تحليل الشبكات . وتعتبر الخلفية الرياضية عن جبر المصفوفات كافية لفهم المادة العلمية لهذا الجزء ، بالرغم من الاحتياج لبعض أساليب التفاضل والمعادلات التفاضلية التى تحتاجها أساليب البحث غير الخطيه . ويتكون الجزء الثانى من الفصل السادس عشر وحتى الفصل الرابع والعشرون ويتناول موضوعات البرمجة الديناميكية التصادفية ، نظرية الأشكال البيانية ، نظرية القرارات ، سلاسل ماركوف ، ونظرية الصفوف . وكما هو واضح من عنوان هذا الفصل فإنه يحتاج إلى إلمام مبدئى بنظرية الاحتمالات .

ولما كان التخصيص الأمثل للأموال ، القوى البشرية ، والطاقة أو أى عامل من العوامل الأخرى النادرة هو من الأهمية بالنسبة لمتخذى القرارات فى أى نظام ، لذلك فإن المادة العلمية لهذا الكتاب ستكون مفيدة للعديد من الأفراد فى التخصصات المتنوعة . لهذا فقد صمم هذا الكتاب ليكون كتاباً للطلاب الباحثين عن مقدمة فى بحوث العمليات وكدليل ومرجع يحصل منه المتخصصين على طرق وأساليب محددة .

وأود أن أقدم الشكر لكل من ساعدوا فى جعل هذا الكتاب حقيقة ملموسة . وأخص بالتقدير الاقتراحات القيمة لناتالى روبير ودونالد بين فيما يختص بالفصلين الثالث عشر والتاسع عشر على التوالى ، وبالمثل فإننى أشكر مشاركة فاى كلين لكتابة الطبعة الأولى من الكتاب . وكذلك دافيد بيكويث من هيئة شوم حيث شارك فى كثير من مواقع الكتاب فى تقديم الطرق وحل المسائل بالإضافة إلى إعداد الكتاب .

ريتشارد برونسون



المحتويات

الصفحة

(الجزء الأول : البرمجة الرياضية)

PART I: Mathematical Programming

الفصل الأول

البرمجة الرياضية

Mathematical Programming

مشكلات الأمثلية OPTIMIZATION PROBLEMS

يبحث الفرد فى مشكلات الأمثلية عن تعظيم أو تصغير كمية معينة تسمى « الهدف » الذى يعتمد على عدد محدد من المتغيرات كمدخلات . وقد تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض ، أو متعلقة ببعضها من خلال أحد أو مجموعة قيود .

مثال ١ - ١ المشكلة

$$\text{تصغير}: \quad z = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{علماً بأن}: \quad x_1 - x_2 = 3, \quad x_2 \geq 2 \qquad (1-1)$$

هى مشكلة أمثلية للهدف z . وتعتبر المتغيرات من المدخلات x_1 ، x_2 مقيدة من ناحيتين : x_1 يجب أن تزيد على x_2 بـ 3 ، أيضاً x_2 يجب أن تكون أكبر من أو تساوى 2 . والمطلوب إيجاد قيم للمتغيرات من المدخلات التى تجعل مجموع مربعاتها أقل ما يمكن ، والمتوقفة على الحدود المفروضة بواسطة القيود .

البرنامج الرياضى : هو مشكلة أمثلية ، يعطى فيها الهدف والقيود فى صورة دوال رياضية ، وعلاقات (كما فى مثال ١ - ١) . والبرامج الرياضية المعالجة فى هذا الكتاب من الصيغة

$$\text{إيجاد أمثل}: \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\text{علماً بأن}: \quad \left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{array}\right.$$

وتحتوى كل علاقة قيود m فى (١ - ١) على إحدى العلامات $\leq, =, \geq$. وتغطى البرامج الرياضية غير المقيدة بالمعادلات (١ - ١) إذا كانت كل دالة g_i لها قيمة صفر ، وكذلك كل ثابت b_i له قيمة صفر .

البرامج الخطية LINEAR PROGRAMS

يكون البرنامج الرياضى خطياً (١ - ١) إذا كان $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ وكل من $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $(i = 1, 2, \ldots, m)$ خطياً فى حد ذاته ، بمعنى أنه إذا كان

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (١ - ٢)$$

و

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (١ - ٣)$$

حيث يكون c_j ، a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n)$ ثوابت معطاه .

وأى برنامج رياضى آخر يكون غير خطى . لذلك فإن مثال (١ - ١) يصف برنامجاً غير خطى بالنظر إلى صيغة z

برامج الأعداد الصحيحة INTEGER PROGRAMS

تعتبر برامج الأعداد الصحيحة من البرامج الخطية ، بالإضافة إلى أن المتغيرات من المدخلات تكون أعداداً صحيحة . وليس من الضرورى أن تكون معاملات (١ - ٢) ، (١ - ٣) ، والثوابت فى (١ - ١) أعداداً صحيحة ، ولكنها غالباً ما تكون كذلك .

البرامج التربيعية QUADRATIC PROGRAMS

تعتبر البرامج التربيعية من البرامج الرياضية التى تكون فيها القيود خطية — بمعنى أن دوال القيود تكون من الصيغة (١ - ٣) — ولكن الهدف يكون من الصيغة

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} d_ix_i \quad (١ - ٤)$$

حيث يكون c_{ij} ، d_i ثوابت معطاه .

ويعتبر المثال المعطى فى (١ - ١) تربيعياً ، لأن كلاً من القيدين خطى ، والهدف من الصيغة (١ - ٤) باعتبار $n = 2$ (متغيرين) ، $c_{11} = 1, \ c_{12} = c_{21} = 0, \ c_{22} = 1$ ؛ $d_1 = d_2 = 0$

صياغة المشكلة PROBLEM FORMULATION

تقرر مشكلات الأمثلية غالباً فى صورة كلامية . وتحدد طريقة الحل فى تصوير المشكلة فى صورة نموذج لبرنامج رياضى ، ثم بعد ذلك حل هذا البرنامج بالأساليب الموصوفة فى الفصول من ٢ حتى ١٥ . ويوصى باستخدام المدخل التالى فى تحويل المشكلة من الصورة الكلامية إلى البرنامج الرياضى .

الخطوة 1 : حدد الكميات التى تحتاج إلى القيم المثلى ، وعبر عنها بدوال رياضية . يساعد هذا الإجراء فى تحديد المدخلات من المتغيرات .

الخطوة 2 : عرف المطالب ، والقيود ، والحدود ، وعبر عنها رياضياً . وتُكَوِّن هذه المطالب القيود المفروضة .

الخطوة 3 : عبر عن أى ظروف أخرى غير ظاهرة ، ومثل هذه الظروف لم يشترط عليها بالقطع فى المشكلة ، ولكنها تكون ظاهرة من الصورة الطبيعية فى الحالة التى يُصمم لها النموذج . وبوجه عام .. فإنها تتضمن عدم وجود القيمة السلبية ، أو الالتزام بالأعداد الصحيحة فى المدخلات من المتغيرات .

تبحث فى كثير من البرامج الرياضية عن « حل » . وفى حالة وجود حلول مثلى متساوية ، فإن أحدها يكفى . ولا يوجد تفضيل بين هذه الحلول المثلى المتساوية إذا لم تكن هناك قيود تفضيلية مشروطة .

مسائل محلولة

Solved Problems

١ – ١ يقوم محل الجزارة بالقرية بعمل شطائر اللحم التقليدية بتكوين من لحم البقر ولحم الماعز . يحتوى لحم البقر على ٨٠ فى المئة من اللحم ، و ٢٠ فى المئة من الدهون . ويكلف المحل ٨٠ سنتاً لكل رطل ، ويحتوى لحم الماعز على ٦٨ فى المئة من اللحم ، و ٣٢ فى المئة من الدهون . ويكلف المحل ٦٠ سنتاً لكل رطل . ما هى كمية اللحم من كل نوع التى يجب أن يستخدمها المحل فى كل رطل من شطائر اللحم إذا كان المطلوب تصغير التكلفة إلى الحد الأدنى ، والحفاظ على نسبة الدهون . بحيث لا تزيد عن ٢٥ فى المئة ؟

الهدف هو تصغير التكلفة (بالسنت) ، z ، لكل رطل من شطائر اللحم حيث

$z = 80$ ضعفاً وزن لحم البقر المستخدم ، بالإضافة إلى ٦٠ ضعفاً وزن لحم الماعز المستخدم .

وبتعريف

وزن لحم البقر المستخدم فى كل رطل من شطائر اللحم $= x_1$

وزن لحم الماعز المستخدم فى كل رطل من شطائر اللحم $= x_2$

فيمكن تعريف الهدف كما يلى :

تصغير : $z = 80x_1 + 60x_2$ (١)

سيحتوى كل رطل من شطائر اللحم على $0.20x_1$ رطل من الدهون من لحم البقر ، وكذلك على $0.32x_2$ رطل من الدهون من لحم الماعز . ويجب ألا يزيد المحتوى الكلى من الدهون فى كل رطل من شطائر اللحم عن 0.25 رطلاً . لذلك ،

$$0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \quad (٢)$$

ويجب أن يكون وزن لحم البقر والماعز مجتمعين فى كل رطل من شطائر اللحم هو رطلاً واحداً . لذلك فإن

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (٣)$$

وفى النهاية فإن محل الجزارة يجب ألا يستخدم كميات سالبة لكلا النوعين من اللحم ، كذلك فإن القيدين غير الظاهرين هما $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$. وبتجميع هذه الشروط مع (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على

تصغير : $z = 80x_1 + 60x_2$

علماً بأن : $0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25$ (٤)

$x_1 + x_2 = 1$

مع اعتبار أن كل المتغيرات ليست سالبة

يعتبر البرنامج (٤) برنامجاً خطياً . ولما كانت المتغيرات اثنين فقط ، فإنه يمكن الحل بالرسم .

١ – ٢ حل البرنامج الخطى (٤) للمسألة (١ – ١) بالرسم

انظر شكل (١ – ١) . المنطقة الممكنة ـــ فئة النقط (x_1, x_2) يحققون جميع القيود بما فيها شروط اللاسلبية ـــ هى المنطقة الممثلة بالخط الثقيل فى الشكل . ولتحديد z^* ، أصغر قيمة لـ z ، فإننا نأخذ قيمة اختيارية لـ z ونرسم الرسم البيانى بهذه القيمة . فباختيار $z = 70$ ثم $z = 75$ نحصل على الأهداف

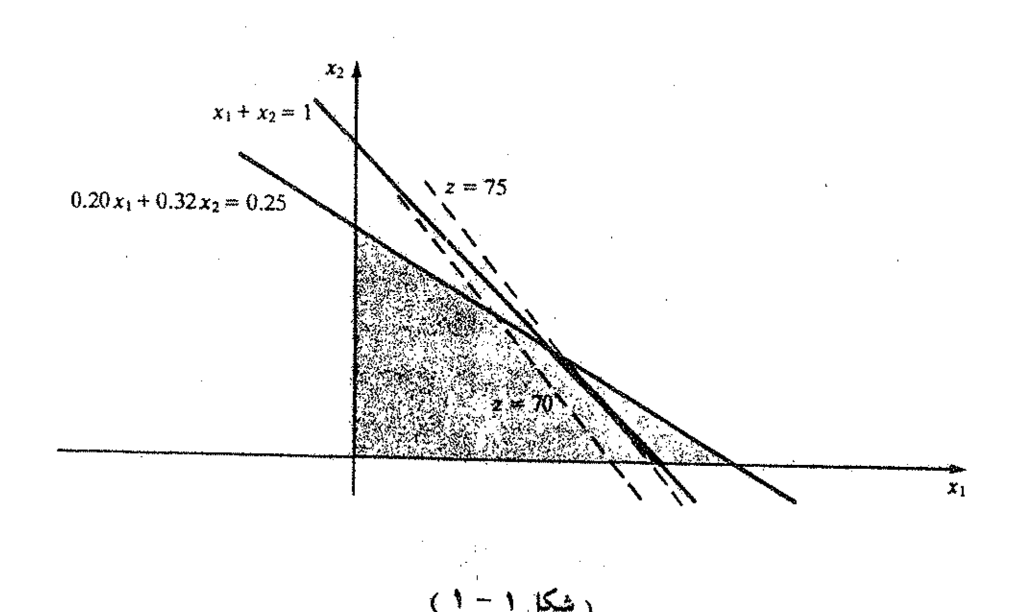
$$70 = 80x_1 + 60x_2 \qquad و \qquad 75 = 80x_1 + 60x_2$$

على التوالى . وهذه الرسومات البيانية هى الخطوط المنقطة فى الشكل (١ – ١) . ومن الملاحظ أن z^* ستُفرض عند أعلى نقطة فى المنطقة الممكنة ، وهى تقاطع الخطين :

$$0.20x_1 + 0.32x_2 = 0.25 \qquad و \qquad x_1 + x_2 = 1$$

وبحل هذين المعادلتين آنياً ينتج $x_1^* = 7/12,\ x_2^* = 5/12$

$$z^* = 80(7/12) + 60(5/12) = 71.67¢$$



(شكل ١ – ١)

١ – ٣ يمتلك أحد صناع الأثاث 6 وحدات من الخشب ، و 28 ساعة من الوقت يستغلها فى صنع شاشات ديكور . وقد باع نوعين منها فى الماضى ، ولذلك فإنه سيقيد نفسه بهما . ويقدر أن النوع الأول يحتاج إلى وحدتين من الخشب و 7 ساعات ، بينما يحتاج النوع الثانى وحدة واحدة من الخشب و 8 ساعات . وتقدر أثمان النوعين بـ 120 دولاراً ، و 80 دولاراً على التوالى . كم عدد شاشات الديكور من كل نوع يجب أن يقوم بتصنيعها إذا أراد تعظيم العائد من المبيعات .

الهدف هو تعظيم عائد المبيعات (بالدولار) والذى يرمز له بالرمز z :

$z \equiv 120$ ضعفاً العدد من النوع الأول من شاشات الديكور المنتجة ، بالإضافة إلى 80 ضعفاً العدد من النوع الثانى من الشاشات المنتجة .

إذا كانت :

$x_1 \equiv$ العدد من النوع الأول من الشاشات المنتجة

$x_2 \equiv$ العدد من النوع الثانى من الشاشات المنتجة

نعبر عن الهدف كما يلى

تعظيم : $z = 120x_1 + 80x_2$ (١)

ويقع على الصانع قيد فى كمية الخشب . ونظراً لاحتياج كل شاشة من النوع الأول إلى وحدتين من الخشب ، فإن $2x_1$ وحدة خشب يجب أن تخصص لهم ، وبالمثل ، $1x_2$ وحدة خشب يجب أن تخصص لكل شاشة من النوع الثانى .

من ثم فإن قيد الخشب يكون :

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \qquad (٢)$$

كما يتعرض الصانع إلى قيد الزمن ، تستهلك شاشات النوع الأول $7x_1$ ساعة ، وشاشات النوع الثانى $8x_2$ ساعة ، لذلك :

$$7x_1 + 8x_2 \leq 28 \qquad (٣)$$

ومن الواضح أنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة من الشاشات ، لذلك فإن القيدين غير الظاهرين هما $x_1 \geq 0$ و $x_2 \geq 0$. وحيث إنه لا يوجد أى عائد من الاستكمال الجزئى للشاشات ، فإن هناك قيداً آخر غير واضح هو أن x_1 و x_2 تكونان أعداداً صحيحة .

وبتجميع هذه القيود غير الواضحة مع (١) ، (٢) و (٣) نحصل على البرنامج الرياضى :

تعظيم : $z = 120x_1 + 80x_2$

علماً بأن : $2x_1 + x_2 \leq 6$ (٤)

$7x_1 + 8x_2 \leq 28$

باعتبار أن كل المتغيرات غير سلبية وأعداد صحيحة .

يعتبر البرنامج (٤) برنامجاً للأعداد الصحيحة . ولما كان هناك متغيران فقط ، فإنه يمكن الحل بالرسم .

٤ – ٩ أوجد الحل بالرسم لبرنامج الأعداد الصحيحة فى المسألة ١ – ٣

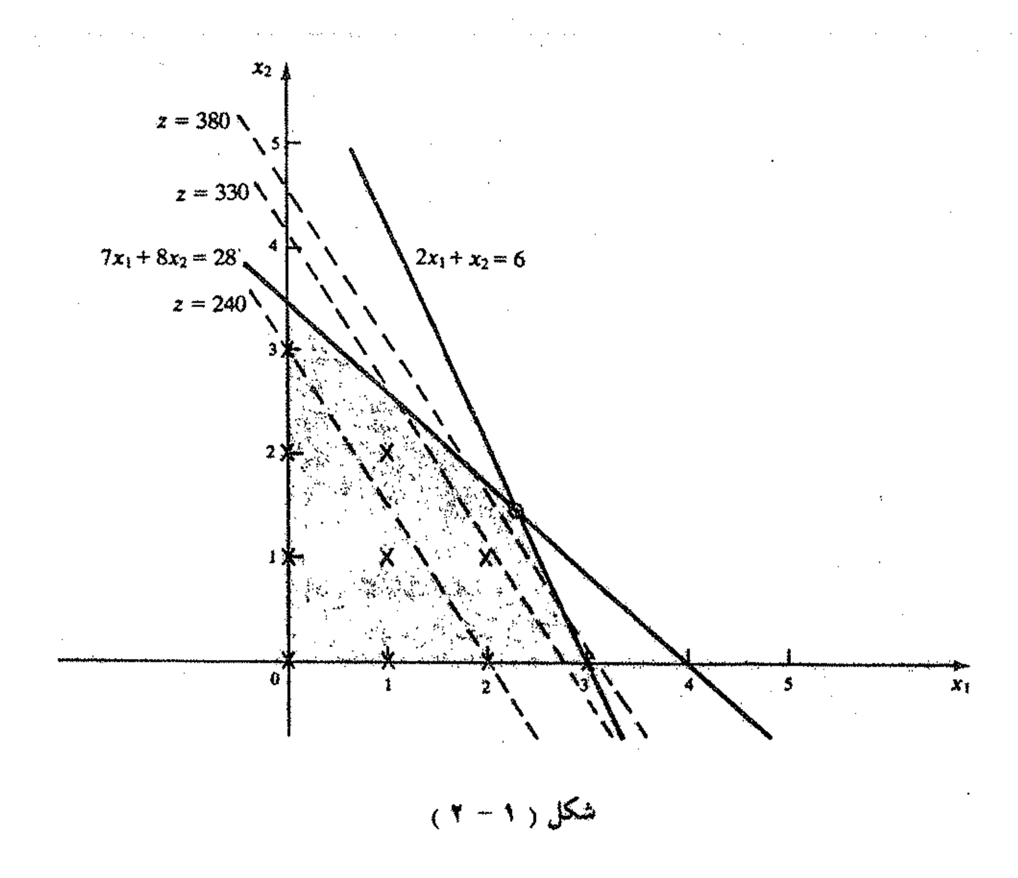
انظر شكل (١ – ٢) . تحدد المنطقة الممكنة بمجموعة نقط الأعداد الصحيحة (الموضحة بعلامة ×) داخل المنطقة المظللة . وتبين المنطقة المنقطة خطوط الدالة الهدفية عندما تكون z اختيارية ، وتعطى القيم .380 ,330 ,240 . ومن الملاحظ أن خط z عند النقطة $(3, 0)$ سيعطى الحد الأعلى المطلوب . لذلك فإن صانع الأثاث يجب أن يصنع ٣ وحدات من النوع الأول فقط ، ولا يصنع أى وحدة من النوع الثانى للحصول على أكبر عائد .

$$z^* = 120(3) + 80(0) = \$360$$

من الملاحظ أن هذا الحل الأمثل لا يمكن تحقيقه بحل المسألة كبرنامج خطى (نفس المسألة دون اعتبار قيد الأعداد الصحيحة) ، ثم إيجاد أقرب نقطة أعداد صحيحة ممكنة . وفى الحقيقة فإن المنطقة الممكنة للمسألة كبرنامج خطى تظهر مظللة فى

الشكل (١ – ٢) . لذلك فإن الحل الأمثل يحدث عند نقطة الدائرة الركنية ، ولكن أقرب نقطة أعداد صحيحة هى $(2, 1)$ ، وقيمة الدالة الهدفية $z = 120(2) + 80(1) = \$320$ ،أو أقل من النقطة الحقيقية .

تعطى المسألة رقم (٧ – ٨) حلاً آخر للمسألة (١ – ٣) .



شكل (١ – ٢)

١ – ٥ تقوم شركة مناجم بتشغيل ثلاثة مناجم بفرجينيا . ويُفصل الخام من كل منجم إلى درجتين قبل الشحن . ويبين الجدول التالى الطاقة الإنتاجية اليومية للمناجم ، وكذلك التكلفة اليومية

	خام عالى الجودة طن / يوم	خام قليل الجودة طن / يوم	تكلفة التشغيل ١٠٠٠ دولار / يوم
منجم I	4	4	20
منجم II	6	4	22
منجم III	1	6	18

وقد التزمت الشركة بتسليم 54 طناً من الخام العالى الجودة ، و 65 طناً من القليل الجودة فى نهاية كل أسبوع . كما أن للشركة تعاقدات مع العمال تضمن لها تواجد العمال بطول اليوم أو جزء من اليوم أثناء فتح المنجم . وحدد عدد الأيام التى يجب أن يعملها كل منجم خلال الأسبوع المقبل للوفاء بالتزامات الشركة بأقل تكلفة ممكنة ؟

افرض $x_1, x_2, x_3,$ على التوالى تمثل عدد الأيام التى سيعمل فيها المناجم رقم ١ ، ٢ ، ٣ خلال الأسبوع المقبل ، لذلك

فإن الهدف (مقاساً بوحدات ألف دولار) هو

تعظيم : $z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3$ (١)

المطلب من الخام العالى الجودة هو :

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54 \quad (٢)$$

والمطلب من الخام القليل الجودة هو :

$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65 \quad (٣)$$

ولما كان أى من المناجم سيعمل عدداً سالباً من الأيام ، فإن هناك ثلاثة قيود غير واضحة هى : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$ ، بالاضافة إلى ذلك .. لما كان أى من المناجم لا يعمل أكثر من سبعة أيام ، فإن هناك ثلاثة قيود غير واضحة هى : $x_1 \leq 7,\ x_2 \leq 7,\ x_3 \leq 7.$. وفى النهاية فإنه بالنظر إلى عقود العمال ، فإن الشركة لا تجد أى فائدة من تشغيل العمال أجزاءً من اليوم ، وبالتالى فإن : x_1, x_2, x_3 . من المطلوب أن تكون أعداداً صحيحة . وبتجميع هذه القيود غير الواضحة مع (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على البرنامج الرياضى :

تصغير : $z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3$

علماً بأن :

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$
$$4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 65$$
$$x_1 \leq 7$$
$$x_2 \leq 7$$
$$x_3 \leq 7$$

كل المتغيرات غير سالبة وأعداد صحيحة .

ويعتبر النموذج (٤) نموذجاً للأعداد الصحيحة . ويحدد أسلوب حله فى المسألة (٧ — ٤) .

١ - ٦ يبدأ أحد الصناع الأسبوع الأخير من الإنتاج فى تصنيع صناديق خشبية لأجهزة التليفزيون موديلات I, II, III, IV, . وكل منها يجب أن يُجمع ، ثم يُعمل له الديكور اللازم . وتحتاج هذه الموديلات إلى 4 ، 5 ، 3 ، 5 ساعات على التوالى للتجميع ، وكذلك 2 ، 1.5 ، 3 ، 3 ساعات على التوالى لعمل الديكورات . وتقدر الأرباح من الموديلات المختلفة بـ 7 ، 7 ، 6 ، 9 دولارات على التوالى . والوقت المتاح للصانع لتجميع هذه المنتجات هو 30 000 ساعة (750عامل تجميع يعملون 40 ساعة / أسبوع) وكذلك 20 000 ساعة وقت متاح لعمل الديكورات (500 عامل ديكور يعملون 40 ساعة / أسبوع) . ماهو العدد الذى ينتجه الصانع خلال هذا الأسبوع الأخير لتعظيم الربح ؟ مع افتراض أن كل الوحدات المنتجة ستباع .

الهدف هو تعظيم الربح (بالدولار) ، والذى يرمز له بالرمز z ، مع اعتبار أن :

$x_1 \equiv$ العدد من الموديل رقم I المنتج فى الأسبوع
$x_2 \equiv$ العدد من الموديل رقم II المنتج فى الأسبوع
$x_3 \equiv$ العدد من الموديل رقم III المنتج فى الأسبوع

العدد من الموديل رقم IV المنتج فى الأسبوع $\equiv x_4$

ويمكن صياغة الهدف على النحو التالى :

تعظيم : $z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4$ (١)

وتوجد قيود على الوقت المتاح الكلى للتجميع ، وأيضاً لعمل الديكورات يمكن أن نضعها فى النماذج :

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$$ (٢)

$$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20\,000$$ (٣)

وحيث إنه لا يمكن إنتاج كميات سالبة ، فإن هناك أربعة قيود غير واضحة هى : $x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4)$. وبالإضافة إلى ذلك ، حيث إن هذا الاسبوع هو الأخير فى الإنتاج ، فإن المنتجات غير المنتهية فى نهاية الأسبوع ستظل بدون تحقيق أى عائد . ولتجنب هذه الاحتمالات ، فإنه من المطلوب تحديد قيماً صحيحة لكل متغير . وبتجميع هذه القيود غير الواضحة مع (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على البرنامج الرياضى :

تعظيم : $z = 7x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4$

علماً بأن : $4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$ (٤)

$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 20\,000$

كل المتغيرات غير سلبية وأعداد صحيحة .

النموذج (٤) نموذج أعداد صحيحة ؛ وحله محدد فى المسألة رقم ٦ – ٤ .

١ – ٧ تنتج شركة أزتك للتقطير نوعين من الجازولين عادى وممتاز ، وتبيعهما لسلسلة مراكز الخدمة بها بسعر 12، 14 دولاراً للبرميل على التوالى . ويخلط النوعان من مستودعات الشركة لزيوت الخدمة ومستودعات الزيوت الأخرى لمقابلة المواصفات التالية :

	ضغط البخار الأعلى	اقل رقم أكتين	أعلى طلب برميل / أسبوع	أقل طلب برميل / أسبوع
العادى	23	88	100 000	50 000
الممتاز	23	93	20 000	5 000

خصائص الزيوت فى المستودعات هى :

	ضغط البخار	رقم الأكتين	المخزون برميل	التكلفة برميل /$
مستودعات زيوت الخدمة	25	87	40 000	8
مستودعات زيوت أخرى	15	98	60 000	15

ماهى الكميات من نوعى الزيوت التى يجب أن تخلطها الشركة مع نوعى الجازولين لتعظيم الربح الأسبوعى ؟

اعتبر أن :

عدد براميل زيوت الخدمة المخلوطة مع الجازولين العادى $\equiv x_1$

عدد براميل الزيوت الأخرى المخلوطة مع الجازولين العادى $\equiv x_2$

عدد براميل زيوت الخدمة المخلوطة مع الجازولين الممتاز $\equiv x_3$

عدد براميل الزيوت الأخرى المخلوطة مع الجازولين الممتاز $\equiv x_4$

يمكن إنتاج كمية $x_1 + x_2$ من الجازولين العادى تحقق عائداً $12(x_1 + x_2)$ ؛ ويمكن إنتاج كمية $x_3 + x_4$ وذلك من الجازولين الممتاز تحقق عائداً $14(x_3 + x_4)$. وتستخدم كمية زيوت خدمة $x_1 + x_3$ بتكلفة $8(x_1 + x_3)$ ؛ وكمية زيوت أخرى $x_2 + x_4$ بتكلفة $15(x_2 + x_4)$. الربح الكلى z يقدر بالعائد الكلى ، مطروحة منه التكلفة :

تعظيم :

$$z = 12(x_1 + x_2) + 14(x_3 + x_4) - 8(x_1 + x_3) - 15(x_2 + x_4) = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 \qquad (١)$$

وهناك قيوداً مفروضة على الإنتاج مثل الطلب ، إمكانية الامداد ومواصفات الخلط . وعن حالة الطلب :

(أعلى طلب للعادى) $x_1 + x_2 \leq 100\,000$ (٢)

(أعلى طلب للممتاز) $x_3 + x_4 \leq 20\,000$ (٣)

(أقل طلب للعادى) $x_1 + x_2 \geq 50\,000$ (٤)

(أقل طلب للممتاز) $x_3 + x_4 \geq 5\,000$ (٥)

وعن إمكانية الإمداد :

(زيوت خدمة) $x_1 + x_3 \leq 40\,000$ (٦)

(زيوت أخرى) $x_2 + x_4 \leq 60\,000$ (٧)

تحدد مكونات الخلط رقم الأكتين ، طبقاً لنسبتها المئوية بالوزن ، وبالمثل بالنسبة لضغط البخار ، لذلك فإن رقم الأكتين للعادى هو :

$$87\frac{x_1}{x_1 + x_2} + 98\frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

والمطلب ليكون هذا الرقم هو ٨٨ على الأقل يؤدى إلى :

$$x_1 - 10x_2 \leq 0 \qquad (٨)$$

وبالمثل ؛ نحصل على :

(قيد رقم أكتين الممتاز) $6x_3 - 5x_4 \leq 0$ (٩)

(قيد ضغط البخار للعادى) $2x_1 - 8x_2 \leq 0$ (١٠)

(قيد ضغط البخار للممتاز) $2x_3 - 8x_4 \leq 0$ (١١)

بضم القيود من (١) حتى (١١) مع الأربعة قيود اللاسلبية (غير الواضحة) للمتغيرات الأربعة ، نحصل على البرنامج الرياضى :

تعظيم : $z = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 100\,000 \\
x_3 + x_4 &\le 20\,000 \\
x_1 + x_3 &\le 40\,000 \\
x_2 + x_4 &\le 60\,000 \\
x_1 - 10x_2 &\le 0 \\
6x_3 - 5x_4 &\le 0 \\
2x_1 - 8x_2 &\le 0 \\
2x_3 - 8x_4 &\le 0 \\
x_1 + x_2 &\ge 50\,000 \\
x_3 + x_4 &\ge 5\,000
\end{aligned}
\qquad (١٢)
$$

كل المتغيرات غير سلبية

النموذج (١٢) برنامج خطى وحله قد حُدد فى المسألة (٤ - ٧)

١ - ٨ يعتزم أحد الرحالة القيام برحلة إلى معسكر ، ويرغب الرحالة فى أخذ ٥ أشياء معه ، ولكن مجموعها يزيد على ٦٠ رطلاً ، وهو الوزن الذى يستطيع حمله . وللمساعدة فى حل هذه المشكلة فقد رتب الأشياء ترتيباً تصاعدياً طبقاً لأهميتها بالنسبة له :

الشيء	1	2	3	4	5
الوزن بالرطل	52	23	35	15	7
القيمة	100	60	70	15	15

ماهى الأشياء التى يجب أن يأخذها معه لتعظيم القيمة الإجمالية ، دون زيادة الوزن الكلى عن المحدد .

افرض x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ تمثل الكمية من i التى يأخذها معه . يمكن صياغة الهدف على النحو التالى :

تعظيم : $z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$ (١)

قيد الوزن هو :

$$52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 \le 60 \qquad (٢)$$

ولما كان أى شيء من الأشياء سيؤخذ أولا يؤخذ كلية ، فإن قيمة أى متغير ستكون صفراً أو واحداً . ويطبق هذا الشرط إذا كانت قيم المتغيرات لاسلبية ، وليست أكبر من واحد ، وتكون أعداداً صحيحة . بضم هذه القيود مع (١) ، (٢) نحصل على البرنامج الرياضى :

تعظيم : $z = 100x_1 + 60x_2 + 70x_3 + 15x_4 + 15x_5$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
52x_1 + 23x_2 + 35x_3 + 15x_4 + 7x_5 &\le 60 \\
x_1 &\le 1 \\
x_2 &\le 1 \\
x_3 &\le 1 \\
x_4 &\le 1 \\
x_5 &\le 1
\end{aligned}
\qquad (٣)
$$

كل المتغيرات لاسلبية وصحيحة

النموذج (٣) برنامج أعداد صحيحة ، وحله مُحدد فى المسألة (٦ - ٧) ، ومرة أخرى فى المسألة (١٤ - ١٦) .

١ - ٩ سوق تجارى يعمل ٢٤ ساعة يحتاج الأعداد التالية من عاملى الخزينة كحد أدنى

الفترة	1	2	3	4	5	6
الوقت من اليوم ٢٤ ساعة	3–7	7–11	11–15	15–19	19–23	23–3
العدد المطلوب حد أدنى	7	20	14	20	10	5

تتبع الفترة رقم 6 الفترة رقم 1 مباشرة . يعمل كل عامل خزينة ٨ ساعات متتالية ابتداءً من أى فترة من الفترات الست . حدد ورقة تشغيل موظفين يومية بأقل عدد ممكن منهم وتفى بالمتطلبات .

افرض $x_i \ (i = 1, 2, \ldots, 6)$ لتساوى عدد عاملى الخزينة الذين يبدأون العمل فى أول الفترة i . يمكن صياغة المشكلة فى البرنامج الرياضى .

تصغير : $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

علماً بأن : (١)

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_6 &\geq 7 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad &\geq 20 \\
x_2 + x_3 \qquad\qquad &\geq 14 \\
x_3 + x_4 \qquad &\geq 20 \\
x_4 + x_5 &\geq 10 \\
x_5 + x_6 &\geq 5
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لاسلبية وصحيحة

النموذج (١) برنامج أعداد صحيحة ، وحله محدد فى المسألة (٦ - ٣) .

١ - ١٠ يمتلك محل جبن 20 رطلاً من خليط الفواكه ، و 60 رطلاً من الجبن الغالى الثمن سيقوم باستخدامها فى تصنيع نوعين من الجبن ، نوع ممتاز وآخر عادى ، وذلك أثناء أسبوع العيد .

يتكون كل رطل من الجبن الممتاز من 0.2 رطلاً من خليط الفواكه ، و 0.8 رطلاً من الجبن الممتاز ، بينما يتكون كل رطل من الجبن العادى من 0.2 رطلاً من خليط الفواكه ، و 0.3 رطلاً من الجبن الممتاز ، وكذلك 0.5 رطلاً من جبن آخر أرخص ثمناً ومتوافر بالسوق . وقد وجد المحل من سياسات التسعير السابقة أن الاحتياج من كل نوع من الجبن المنتج هو :

$$D_1 = 190 - 25P_1 \qquad \text{and} \qquad D_2 = 250 - 50P_2$$

حيث إن D ترمز إلى الاحتياج (بالرطل) ، و P ترمز إلى السعر (دولار لكل رطل) ، والرموز 2,1 تدل على الممتاز والعادى على التوالى . ماهى كمية الجبن من كل نوع يقوم بإعدادها المحل ، وما هو الثمن المحدد إذا أراد زيادة الدخل إلى الحد الأعلى ، دون ترك أى منتج بالمخزن فى نهاية أسبوع العيد ؟

افرض إنتاج x_1 رطلاً من الجبن الممتاز ، و x_2 رطلاً من العادى ، ومع افتراض بيع كل الإنتاج ، فإن الهدف يكون :

تعظيم : $z = P_1x_1 + P_2x_2$ (١)

والآن فإن كل الإنتاج المطلوب سيباع (ولن تتبقى أى كمية فى المخزن) إذا كان الإنتاج لن يزيد عن الاحتياج ، بمعنى أنه إذا كانت $x_1 \leq D_1$ و $x_2 \leq D_2$ ، وهذا يعطى القيود :

$$x_2 + 50P_2 \leq 250 \quad \text{و} \quad x_1 + 25P_1 \leq 190 \qquad (٢)$$

من كميات خليط الفواكة المتاحة :

$$0.2x_1 + 0.2x_2 \leq 20 \qquad (٣)$$

ومن كميات الجبن الغالى الثمن المتاحة

$$0.8x_1 + 0.3x_2 \leq 60 \qquad (٤)$$

ليس هناك أى قيد على كميات الجبن الآخر الأرخص ثمناً ، حيث يمتلك المحل كل الكميات المطلوبة ، وفى النهاية فإن كلاً من الإنتاج والأثمان لايمكن أن تكون سالبة ، لذلك فإن أربعة قيود غير واضحة هى : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ P_1 \geq 0,\ P_2 \geq 0$.
بتجميع هذه الشروط من (١) حتى (٤) نحصل على البرنامج الرياضى :

تعظيم : $z = P_1x_1 + P_2x_2$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} 0.2x_1 + 0.2x_2 &\leq 20 \\ 0.8x_1 + 0.3x_2 &\leq 60 \\ x_1 \quad + 25P_1 &\leq 190 \\ x_2 \quad + 50P_2 &\leq 250 \end{aligned} \qquad (٥)$$

كل المتغيرات لاسلبية

النموذج (٥) برنامج تربيعى فى المتغيرات x_1, x_2, P_1, P_2 ، ويمكن تبسيطه إذا علمنا أن لأى قيمة ثابته موجبة x_1 و x_2 تزيد الدالة الهدفية كلما زاد P_1 أو P_2 ، لذلك للحصول على أكبر قيمة P_1 P_2 يجب أن يصبح الشرط (٢) معادلة ، وبذلك يمكن حذف x_1 و x_2, من الدالة الهدفية . نحصل بعد ذلك على برنامج تربيعى ف

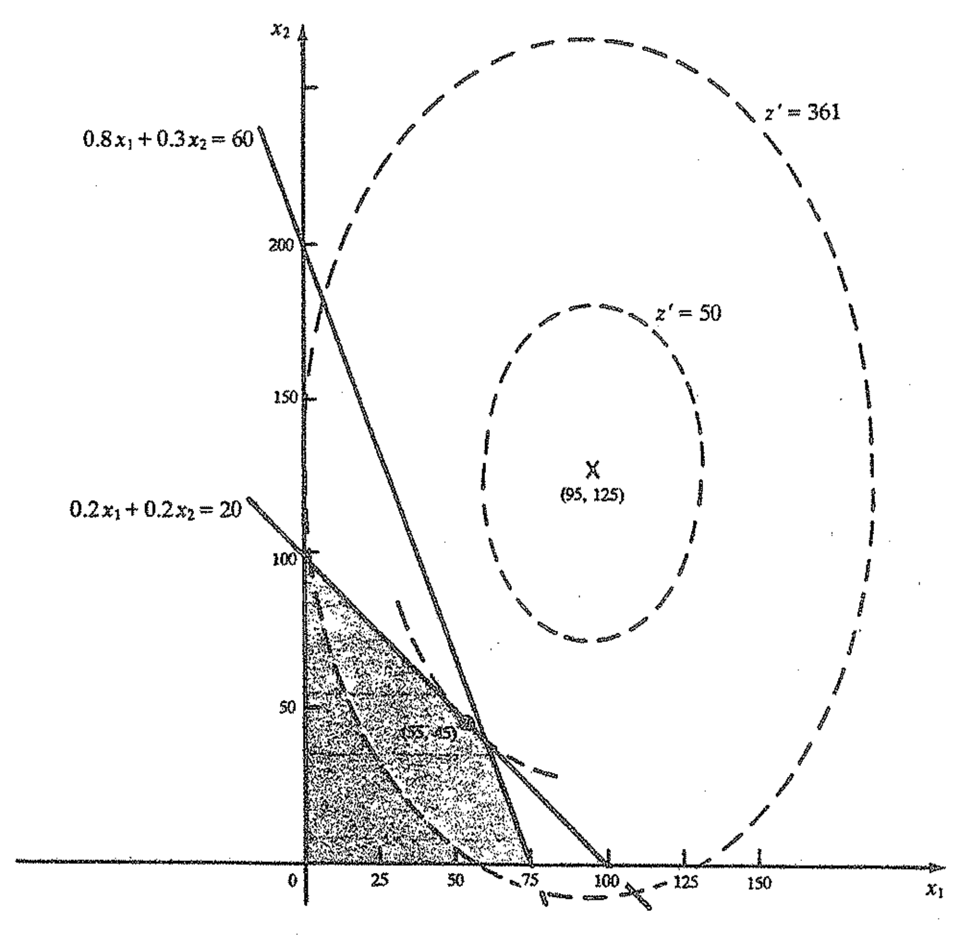
تعظيم : $z = (7.6 - 0.04x_1)x_1 + (5 - 0.02x_2)x_2$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} 0.2x_1 + 0.2x_2 &\leq 20 \\ 0.8x_1 + 0.3x_2 &\leq 60 \end{aligned} \qquad (٦)$$

حيث x_1 و x_2 متغيرات لاسلبية

حيث يمكن حله بسهولة بواسطة الرسم



شكل ١ – ٣

١ – ١١ حل بالرسم البرنامج التربيعى (٦) فى المسألة ١ – ١٠

لأغراض الرسم ، فإنه من المناسب استكمال المربع فى الدالة الهدفية

$$\text{تعظيم :}\quad z = 673.5 - 0.04(x_1 - 95)^2 - 0.02(x_2 - 125)^2$$

وهذا يكافىء :

$$\text{تصغير :}\quad z' = 0.04(x_1 - 95)^2 + 0.02(x_2 - 125)^2 \qquad (١)$$

ولما كانت القيود خطية ، فإن المنطقة المحددة تكون محدودة بخطوط مستقيمة ، وتظهر مظللة فى الشكل (١ – ٣) . ولأى قيمة محددة z' تحدد المعادلة (١) شكلاً بيضاوياً مركزة (95 , 125) ، وشكلين بيضاوين يظهران فى الشكل (١ – ٣) كمنحنيات منقطة . القيمة الصغرى z' تناظر هذا المنحنى البيضاوى المحدد بالمعادلة (١) الذى يلامس الخط :

$$0.2x_1 + 0.2x_2 = 20 \qquad (٢)$$

لإيجاد نقطة التلامس . يمكن مساواة الميول للخط والبيضاوى

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -1 \qquad \text{and} \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{2(x_1 - 95)}{x_2 - 125}$$

وبالتفاضل الضمنى لـ (١) ، (٢) على التوالى نحصل على :

$$x_2 = 2x_1 - 65 \qquad (٣)$$

وبحل (٢) ، (٣) آنياً نحصل على الحل الأمثل للمسألة ١ - ١٠

$x_1^* = 55$ (رطل جبن ممتاز)
$x_2^* = 45$ (رطل جبن عادى)

١ - ١٢ يمتلك صانع بلاستيك 1200 صندوق من المادة الشفافة فى المخزن فى أحد المصانع ، و 1000 صندوق فى مصنع آخر . تلقى الصانع طلبات إنتاج من ثلاثة عملاء بالكميات 500 ,700 ,1000 صندوق على التوالى . تكلفة نقل الوحدة الواحدة (سنت / صندوق) من المصانع إلى العملاء هى كما يلى :

	عميل ١	عميل ٢	عميل ٣
مصنع ١	14	13	11
مصنع ٢	13	13	12

حدد جدول تكلفة النقل الصغرى التى تفى بالطلبات من المخازن الحالية .

بكتابة x_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3)$ للدلالة على عدد الصناديق المنقولة من المصنع i إلى العميل j نحصل على الهدف (بالسنت)

تصغير : $z = 14x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 13x_{21} + 13x_{22} + 12x_{23}$

ولما كانت الكميات المنقولة من المصانع لاتزيد عن الموجودات

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1200$ (منقولات من مصنع ١)
$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1000$ (منقولات من مصنع ٢)

بالإضافة إلى ذلك .. فإن الكميات الكلية المرسلة إلى العملاء يجب أن تفى باحتياجاتهم ، ومن ثم :

$x_{11} + x_{21} \geq 1000$ (منقولات إلى عميل ١)
$x_{12} + x_{22} \geq 700$ (منقولات إلى عميل ٢)
$x_{13} + x_{23} \geq 500$ (منقولات إلى عميل ٣)

وحيث إن الموجودات الكلية هى $1200 + 1000$ مساوية الاحتياج $500 + 700 + 1000$ ، وكل متباينة من القيود يمكن تحويلها إلى متساوية . وبهذا ، وباعتبار الشروط غير الواضحة أنه لا توجد منقولات سالبة ، وأنه لا يمكن فصل صندوق منفرد للنقل ، فإننا نحصل على البرنامج الرياضى :

$$z = 14x_{11} + 13x_{12} + 11x_{13} + 13x_{21} + 13x_{22} + 12x_{23}$$: تصغير

علماً بأن :

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} \qquad\qquad &= 1200 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1000 \\
x_{11} \qquad + x_{21} \qquad &= 1000 \\
x_{12} \qquad + x_{22} &= 700 \\
x_{13} \qquad + x_{23} &= 500
\end{aligned} \qquad (1)$$

كل المتغيرات لا سلبية وصحيحة

النموذج (١) برنامج أعداد صحيحة ، وحله محدد فى المسألة ٧ – ٣ ، ومرة أخرى فى المسألة ٨ – ٦ .

١ – ١٣ يحتاج فريق سباحة ٤٠٠ متر تتابع إلى أربعة سباحين يسبح كل منهم ١٠٠ متر ظهر ، وصدر ، وفراشة ، وحرة . يتوفر لدى المدرب ستة سباحين مسرعين يسبحون بأزمنة متوقعة (بالثوانى) منفردين كما فى الجدول (١ – ١)

	سباحة منفردة ١ ظهر	سباحة منفردة ٢ صدر	سباحة منفردة ٣ فراشة	سباحة منفردة ٤ حرة
السباح ١	65	73	63	57
السباح ٢	67	70	65	58
السباح ٣	68	72	69	55
السباح ٤	67	75	70	59
السباح ٥	71	69	75	57
السباح ٦	69	71	66	59

جدول (١ – ١)

كيف يمكن للمدرب تعيين الأربعة سباحين للسباق لتصغير مجموع زمن السباق ؟

الهدف هو تصغير زمن السباق الكلى الذى يرمز له بالرمز z ، باستخدام المتغيرات الثنائية الترميز x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, 6;\ j = 1, 2, 3, 4)$ للدلالة على عدد المرات التى يعين فيها السباح i فى السباحة j يمكن صياغة الهدف كما يلى :

$$z = 65x_{11} + 73x_{12} + 63x_{13} + 57x_{14} + 67x_{21} + \cdots + 66x_{63} + 59x_{64}$$: تصغير

وحيث إنه لايمكن تعيين أى سباح لأكثر من سباحة واحدة :

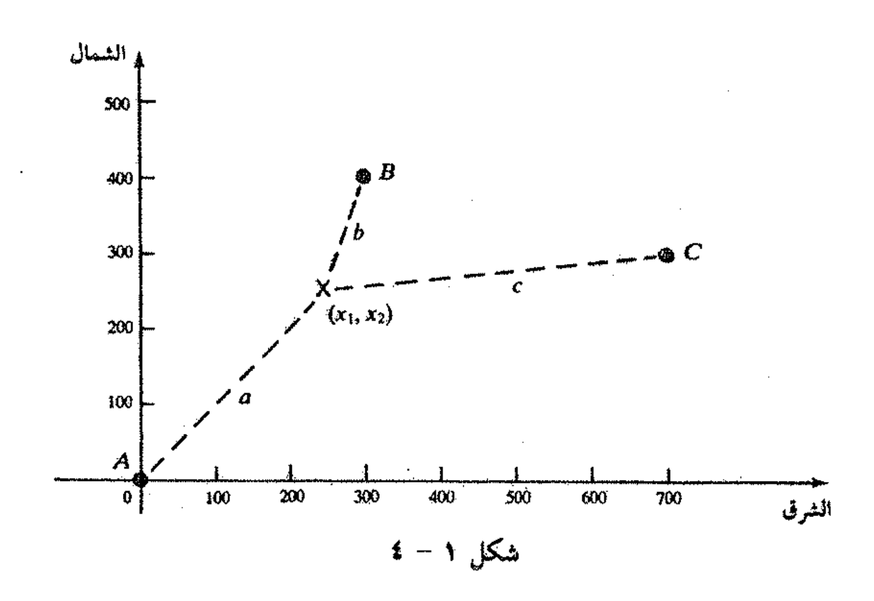
$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\le 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\le 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} &\le 1
\end{aligned}$$

وحيث إن كل سباحة منفردة يخصص لها سباح واحد فقط ، نحصل على :

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}=1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}=1$$

باجتماع هذه العشرة قيود مع الهدف والشروط غير الواضحة ، وهى أن المتغيرات لاسلبية وصحيحة يتكون برنامج أعداد صحيحة ، يتحدد حله فى المسألة ٩ – ٤ .

١ – ١٤ ترغب إحدى شركات البترول فى بناء محطة تكرير يتم إمدادها من ثلاثة موانىء . يقع الميناء B ٣٠٠ كم شرقاً ، و ٤٠٠ كم شمالاً من الميناء A ، بينما يقع الميناء C ٤٠٠ كم شرقاً ، و ١٠٠ كم جنوباً من الميناء B . حدد موقع محطة التكرير ، بحيث تكون الكمية الكلية من الأنابيب المطلوبة للتوصيل بين محطة التكرير وهذه الموانىء أقل مايمكن .



شكل ١ – ٤

الهدف هو جعل مجموع المسافات بين محطة التكرير وبين الموانىء الثلاثة أقل مايمكن . وللمساعدة فى حساب هذا المجموع ننشىء نظاماً إحداثياً شكل (١ – ٤) فيه يكون الميناء A هو نقطة الأصل . وفى هذا النظام تكون للميناء B الإحداثيات (300, 400) ، والميناء C الإحداثيات (700, 300) .

إذا مثلت (x_1, x_2) الاحداثيات غير المعروفة لمحطة التكرير ، فإن الهدف يكون :

$$\text{تصغير :}\quad z=\sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{(x_1-300)^2+(x_2-400)^2}+\sqrt{(x_1-700)^2+(x_2-300)^2}$$

ولا توجد قيود على إحداثيات محطة التكرير ، أو أى شروط غير واضحة ، فمثلاً القيمة السالبة للمتغير x_1 تعنى فقط أن محطة التكرير يجب أن تقع غرب الميناء A . والمعادلة (١) معادلة غير خطية ، وغير مقيدة ، وتمثل برنامجاً رياضياً ، وحلها محدد فى المسألة (١١ – ١١) . انظر المسألة (١ – ٢٦) أيضاً .

١ – ١٥ يرغب أحد الأفراد فى استثمار مبلغ 4000 دولار ، وأمامه ثلاث فرص لهذا الاستثمار . تحتاج كل فرصة منهم لدفع تأمين 1000

دولار . ويمكن للمستثمر أن يخصص كل نقوده لفرصة استثمار واحدة ، أو يجزىء النقود بينهم جميعاً . والجدول التالى يبين العائد المتوقع :

	الدولارات المستثمرة				
	0	1000	2000	3000	4000
العائد من الفرصة رقم ١	0	2000	5000	6000	7000
العائد من الفرصة رقم ٢	0	1000	3000	6000	7000
العائد من الفرصة رقم ٣	0	1000	4000	5000	8000

ماهى كمية النقود التى يجب استثمارها فى كل فرصة ، حتى يمكن الحصول على أكبر عائد ممكن ؟

الهدف هو تعظيم العائد الكلى الذى يرمز له بالرمز z ، وهو عبارة عن مجموع العائد من كل فرصة . وتقيد كل الاستثمارات بأنها مضروبات أعداد صحيحة للقيمة ١٠٠٠ دولار . إذا افترضنا $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ تمثل العائد (بالألف دولار) للفرصة i عندما يستثمر x من النقود فيها ، فيمكن إعادة كتابة جدول العائد كما فى الجدول (١ - ٢)

f \ x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	0	2	5	6	7
$f_2(x)$	0	1	3	6	7
$f_3(x)$	0	1	4	5	8

جدول (١ - ٢)

بتعريف x_i $(i = 1, 2, 3)$ بأنه عدد وحدات النقود المستثمرة فى الفرصة i ، فإنه يمكن صياغة الهدف كما يلى :

تعظيم : $z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$ (١)

وحيث إن المستثمر عنده ٤ وحدات من النقود فقط ليستثمرها :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \qquad (٢)$$

وبإضافة (١) ، (٢) إلى القيود غير الواضحة x_1, x_2, x_3 ، وهى غير سالبة وأعداد صحيحة ، نحصل على البرنامج الرياضى :

تعظيم : $z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$ (٣)

علماً بأن : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$

كل المتغيرات غير سالبة وصحيحة

برسم $f_i(x)$ مع x لكل دالة سيعطى رسماً بيانياً ليس بالخط المستقيم ، لذلك فإن النموذج (٣) هو برنامج غير خطى ، وحله محدد فى المسألة (١٤ - ١)

مسائل مكملة

Supplementary Problems

ضع صيغة البرامج الرياضية للمسائل من (١ - ١٦) إلى (١ - ٢٥) ولا تحلها .

١ - ١٦ صمم فاى كلاين لعبتين يدويتين للكبار يبيعهما للمحلات فى بلده . وبالرغم من أن الاحتياج لهذه الألعاب يزيد عن طاقة إنتاجه ، فقد استمر فاى كلاين العمل وحده فى حدود ٥٠ ساعة كل أسبوع . تأخذ اللعبة الأولى ٣٫٥ ساعة للإنتاج ، وتدر ربحاً قدره ٢٨ دولاراً ، بينما اللعبة الثانية تحتاج إلى ٤ ساعات ، وتدر ربحاً قدره ٣١ دولاراً ..كم لعبة من كل نوع يجب أن ينتجها السيد كلاين أسبوعياً حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟

١ - ١٧ قرر محل لبيع وتربية الحيوانات أن كل حيوان يجب أن يحصل على ٧٠ وحدة من البروتين ، و ١٠٠ وحدة من الكربوهيدرات ، و ٢٠ وحدة من الدهون يومياً . وإذا كان المحل عنده ستة أنواع من الغذاء موضحة فى الجدول (١ - ٣) ، فما هو خليط أنواع الغذاء الذى يفى بمتطلبات أقل تكلفة للمحل ؟

الغذاء	بروتين وحدة / أوقية	كربوهيدرات وحدة / أوقية	دهون وحدة / أوقية	تكلفة سنت/أوقية
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

جدول (١ - ٣)

١ - ١٨ تنتج إحدى الشركات الصناعية المحلية أربعة منتجات معدنية ، يحتاج كل منها إلى تشغيل ، وتلميع ، وتجميع . كما يحتاج كل منها إلى الأزمنة (بالساعات) الموضحة :

	التشغيل بالساعة	التلميع بالساعة	التجميع بالساعة
المنتج ١	3	1	2
المنتج ٢	2	1	1
المنتج ٣	2	2	2
المنتج ٤	4	3	1

ويقدر الوقت المتاح بالشركة للتشغيل 480 ساعة أسبوعياً كالآتى : 400 ساعة للتلميع ، و 400 ساعة للتجميع . وأرباح الشركة من الوحدة الواحدة هى 6 دولارات ، 4 دولارات ، 6 دولارات ، 8 دولارات على التوالى . وقد وقعت الشركة عقداً مع أحد الموزعين لإمداده بالأعداد 50 وحدة من المنتج 1 ، 100 وحدة من أى مجموعة من المنتجات ٢ ، ٣ كل أسبوع . ومع عميل آخر تستطيع الشركة بيع أى كميات منتجة من المنتجات ١ ، ٢ ، ٣ ، ولكن بحد أقصى 25 وحدة فقط من المنتج ٤ . كم عدد الوحدات من كل منتج يجب أن تنتجها الشركة كل أسبوع لمواجهة الالتزامات التعاقدية بجانب تعظيم الربح الكلى ؟ مع افتراض أن أى منتجات غير كاملة سيتم استكمالها فى الأسبوع المقبل .

١ – ١٩ يقوم أحد المتعهدين بإعداد خمسة مشروبات كعصير فواكه من مستودع به 500 جالون يحتوى على 20 فى المئة من عصير البرتقال ، و 10 فى المئة من الجريب فروت ، و 5 فى المئة عصير التوت . إذا كانت بيانات المستودع كما هو موضح بأسفل ، كم فى المئة يجب أن يستخدمها المتعهد من كل نوع من العصير للحصول على المكونات المطلوبة بأقل تكلفة ؟

	عصير برتقال ٪	جريب فروت ٪	عصير توت ٪	الموجودات جالون	التكلفة $/جالون
مشروب A	40	40	0	200	1.50
مشروب B	5	10	20	400	0.75
مشروب C	100	0	0	100	2.00
مشروب D	0	100	0	50	1.75
مشروب E	0	0	0	800	0.25

١ – ٢٠ خصصت أحد المدن ميزانية قدرها 250 000 دولار لتطوير مساحة للتخلص من القمامة . وهناك سبع مساحات ممكنة لذلك ـــ موضح بأسفل الطاقات المتاحة لكل منها وتكلفتها ـــ أى موقع منها يجب أن تختاره المدينة ؟

الموقع	A	B	C	D	E	F	G
الطاقة طن / اسبوع	20	17	15	15	10	8	5
التكلفة بالألف دولار	145	92	70	70	84	14	47

١ – ٢١ تقوم إحدى الشركات التى تصنع الأجزاء الكهربية بإنتاج أحد المنتجات من الجوامد ، وإمداد أربعة صناع للتليفزيون بها . يمكن إنتاج هذا الجزء فى أى من مصانع الشركة الثلاثة ، بالرغم من اختلاف التكلفة ، وذلك لاختلاف كفاءة كل مصنع عن الآخر . وبالتحديد فإن الجزء يتكلف 1.10 دولاراً فى المصنع A ، و 0.95 دولاراً فى المصنع B ، و 1.03 دولاراً فى المصنع C . طاقات الإنتاج الشهرية للمصانع هى : 7500 ، 10 000 ، 8100 جزء على التوالى . التنبؤات من المبيعات لكل صانع تليفزيونات هى : 4200 ، 8300 ، 6300 ، 2700 أجزاء للصناع أرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على التوالى . فإذا كانت التكلفة بالدولار لنقل الجزء من المصنع إلى صانع التليفزيون ـــ كما هو موضح بأسفل ـــ فأوجد جدول الإنتاج الذى يفى بكل الاحتياجات المطلوبة بأقل تكلفة ؟

	١	٢	٣	٤
A	0.11	0.13	0.09	0.19
B	0.12	0.16	0.10	0.14
C	0.14	0.13	0.12	0.15

١ – ٢٢ وجد أحد أصحاب محلات بيع اللحوم أن عنده فى صباح يوم السبت 200 رطل من لحم الفخذ ، و 800 رطل من لحم الكتف ، و 150 رطل من لحم الضان سيستخدمها فى عمل هامبورجر ، وفطائر النزهة ، وشطائر اللحم . ودائماً مايزيد الطلب من هذه الأصناف على طاقة المحل . يجب أن يحتوى الهامبورجر على الأقل على 20 فى المئة من لحم الفخذ ، و 50 فى المئة من لحم الكتف (بالوزن) ، وفطائر النزهة يجب أن تحتوى على الأقل على 20 فى المئة من لحم الضأن ، و 50 فى المئة من لحم الكتف ، بينما يجب أن تحتوى شطائر اللحم على 10 فى المئة من لحم الفخذ ، و 30 فى المئة من لحم الضأن ، و 40 فى المئة من لحم الكتف . ما تبقى بعد ذلك يعتبر من المنتجات الرخيصة المتوفرة بالمحل . كم رطلًا من كل منتج يجب أن تصنع إذا كان المدير راغباً فى تقليل كمية اللحم المخزنة إلى يوم الأحد ؟

١ – ٢٣ قبلت منشأة قانونية خمس حالات يستطيع أى من أعضائها تناول أى حالة منها . ونظراً لاختلاف الخبرة بين الأعضاء ، فإن الوقت الذى سيستغرقه كل منهم فى كل حالة يختلف عن الآخر . وقد قدر هذا الوقت (بالساعات) كما يلى :

	الحالة ١	الحالة ٢	الحالة ٣	الحالة ٤	الحالة ٥
المحامى رقم ١	145	122	130	95	115
المحامى رقم ٢	80	63	85	48	78
المحامى رقم ٣	121	107	93	69	95
المحامى رقم ٤	118	83	116	80	105
المحامى رقم ٥	97	75	120	80	111

حدد التخصيص الأمثل للحالات التى سيتناولها كل محام ، بحيث يقل الوقت الكلى المستغرق إلى الحد الأدنى .

١ – ٢٤ تنتج إحدى شركات السيارات عربات نزهة من نوع جولف ، وعربات الثلوج فى ثلاثة مصانع . ينتج المصنع A 40 عربة جولف ، و 35 عربة ثلج يومياً ، وينتج المصنع B 65 عربة جولف يومياً بدون عربات ثلج . كما ينتج المصنع C 53 عربة ثلج يومياً بدون عربات جولف . تكلفة تشغيل المصانع C , B , A هى : 210 000 ، 190 000 ، 182 000 دولار فى اليوم . كم عدد الأيام (بما فيها أيام الأحد والعطلات) التى يجب أن يعملها كل مصنع خلال سبتمبر لاستكمال خطة الإنتاج (1500 عربة جولف ، و 1100 عربة ثلج) بأقل تكلفة ، مع افتراض أن تعاقدات العمال تنص على أن يحصل العامل على أجر اليوم الكامل بمجرد فتح المصنع .

١ – ٢٥ تقوم شركة الأسمدة فوتورا بإنتاج نوعين من الأسمدة : فوتورا عادى ، وفوتورا ممتاز . يتكون العادى من 25% إضافات نشطة ، و 75% إضافات خاملة ، بينما يتكون الممتاز من 40% إضافات نشطة ، و 60% إضافات خاملة . تتحدد طاقات التخزين بالشركة فى 500 طن من الإضافات النشطة ، و 1200 طن من الإضافات الخاملة تتجدد أسبوعياً .

يتشابه سماد فوتورا العادى مع الأسمدة الأخرى الموجودة بالسوق وبسعر منافس 250 دولار للطن . ولا تجد الشركة أى صعوبة فى بيع هذا النوع بهذا الثمن . ومع ذلك ، فإن فوتورا الممتاز ليس له مثيل منافس ، ولذلك فلا توجد قيود على سعره . ومن التجارب السابقة فقد حددت الشركة أن الثمن P (بالدولار) ، والطلب D (بالطن) ترتبط بالعلاقة $P = 600 - D$. كم

طناً من كل نوع يجب أن تنتجها شركة فوتورا أسبوعياً لزيادة العائد إلى أكبر ما يمكن ؟

١ - ٢٦ اشرح لماذا يمثل الآتى بعد حلاً تناظرياً للمسألة ١ ــ ١٤ . تصور أن شكل (١ ــ ٤) يمثل ظهر مائدة طويلة . وقد عملت ثقوب عند النقط C , B , A بظهر المائدة . تم توصيل ثلاثة خيوط ، واتصلت الثلاث نهايات بعقدة واحدة . وأدخلت الأطراف الأخرى للخيوط من الثقوب ، وربطت بأوزان متساوية أسفل المائدة تتدلى من الخيوط . مع افتراض إهمال الاحتكاك ، فإن وضع الاتزان للخيوط والأثقال يمثل مكان محطة التكرير الأمثل .



البرمجة الخطية : الصيغة القياسية

Linear Programming: Standard Form

ستُشرح طريقة الحل للبرامج الخطية التى تحتوى على متغيرات كثيرة فى الفصل الرابع . ولبدء الطريقة ، يجب تحويل كل متباينات القيود إلى متساويات ، ومعرفة حل واحد ممكن وغير سلبى .

شروط اللاسلبية : NONNEGATIVITY CONDITIONS

يجب إحلال أى متغير غير مقيد بأن يكون غير سلبى بالفرق بين متغيرين جديدين مقيدين . (انظر المسألة ٢ - ٦)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \sim b_i \qquad (٢ - ١)$$

حيث إن $\sim$ تمثل إحدى العلاقات $\leq, \geq, =$ (ليس بالضرورة نفس العلامة لكل i) . وتُفرض الثوابت b_i دائماً غير سلبية .

مثال ٢ - ١ القيد $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq -5$ عند ضربه فى -1 نحصل على $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 5$ الذى فيه الطرف الأيمن موجباً .

المتغيرات المساعدة والمتغيرات الزائدة SLACK VARIABLES AND SURPLUS VARIABLES

يمكن تحويل القيد الخطى من النوع $\sum a_{ij}x_j \leq b_i$ إلى متساوية بإضافة متغير جديد غير سلبى إلى الطرف الأيسر للمتباينة . يساوى هذا المتغير ــ عددياً ــ الفرق بين الطرفين الأيمن والأيسر للمتباينة ، ويعرف بالمتغير المساعد . ويمثل الفاقد المتضمن فى هذه المرحلة نموذج القيد .

مثال ٢ - ٢ القيد الأول فى المسألة ١ - ٦ هو :

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30\,000$$

يصور الطرف الأيسر من هذه المتباينة العدد الكلى للساعات لتجميع صناديق التليفزيون ، بينما يصور الطرف الأيمن العدد الكلى للساعات المتاحة . تحول هذه المتباينة إلى المعادلة

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 30\,000$$

بإضافة المتغيرالمساعد x_5 إلى الطرف الأيسر من المتباينة . تمثل x_5 عدد ساعات التجميع المتاحة للمصانع وغير المستغلة .

يمكن تحويل القيد الخطى من الصيغة $\sum a_{ij}x_j \geq b_i$ إلى متساوية بطرح متغير جديد غير سلبى من الطرف الأ سر من المتباينة . ويساوى هذا المتغير ــ عددياً ــ الفرق بين الطرفين الأيسر والأيمن من المتباينة ، ويعرف بالمتغير الزائد . ويمثل الزيادة المد ة فى هذه المرحلة نموذج القيد .

مثال ٢ – ٣ القيد الأول فى المسألة ١ – ٥ هو :

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 54$$

يمثل الطرف الأيسر لهذه المتباينة التكوين الناتج من الخام العالى الجودة من الثلاثة مناجم ، بينما يمثل الطرف الأيمن الوزن الأدنى بالطن من الخام المطلوب لمواجهة احتياجات التعاقد . وتحول المتباينة إلى معادلة

$$4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 54$$

بطرح المتغير الزائد x_4 من الطرف الأيسر للمتباينة . تمثل x_4 الكمية من الخام العالى الجودة الزائدة والمطلوبة لاستيفاء التعاقد .

إيجاد حل أوّلى ممكن GENERATING AN INITIAL FEASIBLE SOLUTION

بعد تحويل كل القيود الخطية (غير السلبية بالأطراف اليمنى) إلى متساويات بإضافة المتغيرات المساعدة والزائدة عند الضرورة ، يضاف متغير جديد يسمى المتغير الصناعى للطرف الأيسر لكل معادلة قيد لا تحتوى على متغير مساعد . ستحتوى إذاً كل معادلة قيد على متغير مساعد واحد أو متغير صناعى واحد .

يمكن الحصول على حل أوّلى لا سلبى لهذه المجموعة من القيود بمساواة كل متغير مساعد وكل متغير صناعى للطرف الأيمن من المعادلة ، والتى يظهر فيها ، وكذلك مساواة كل المتغيرات الأخرى ، بما فيها المتغيرات الزائدة بالعنصر .

مثال ٢ – ٤ مجموعة القيود :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &\geq 6 \\ 7x_1 + 8x_2 &= 15 \end{aligned}$$

تحول إلى معادلات بإضافة متغير مساعد x_3 للطرف الأيسر للقيد الأول ، ثم طرح المتغير الزائد x_4 من الطرف الأيسر للقيد الثانى ؛ فتصبح المعادلات الجديدة هى :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \quad - x_4 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 \quad &= 15 \end{aligned} \qquad (٢ – ٢)$$

إذا أضيفت المتغيرات الصناعية x_5 و x_6 على التوالى إلى الأطراف اليسرى للقيدين الأخيرين فى (٢ – ٢) ، وهما القيدان اللذان بدون متغير مساعد ، تكون النتيجة :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \quad - x_4 + x_5 &= 6 \\ 7x_1 + 8x_2 \quad + x_6 &= 15 \end{aligned}$$

يكون الحل اللاسلبى لهذه المجموعة الأخيرة هو $x_3 = 3,\ x_5 = 6,\ x_6 = 15$ ، $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ ، (مع ملاحظة أن $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ليست حلاً للمجموعة الأصلية للقيود) .

وبالمناسبة .. فإنه يمكن إيجاد الحل الأوّلى بسهولة بدون الاستكمال الكلى للمتغيرات المساعدة والصناعية . مثال ذلك : المسألة (٢ – ٥) .

التكلفة الجزائية PENALTY COSTS

إن إضافة كل من المتغيرات المساعدة أو الزائدة لا تغير من طبيعة المتغيرات أو أهدافها . ولذلك فإن هذه المتغيرات تأخذ معاملات صفرية فى الدالة الهدفية ، ومع ذلك .. فإن المتغيرات الصناعية تُغير من طبيعة القيود ، حيث إن هذه المتغيرات تضاف إلى طرف واحد فقط من المتساوية ، ولذا فإن النموذج الجديد للقيود يكون مكافئاً للنموذج القديم فى حالة واحدة فقط ، وهى أن تكون المتغيرات الصناعية مساوية للصفر . ولضمان هذا فى الحل الأمثل (بعكس الحل الأوّلىّ) تدخل المتغيرات الصناعية فى الدالة الهدفية بمعاملات موجبة كبيرة جداً فى برنامج تصغير ، أو بمتغيرات سالبة كبيرة جداً فى برنامج تعظيم . ويعبر عن هذه المتغيرات بأى من M ، أو $-M$ تفهم M على أنها عدد موجب كبير يمثل الجزاء (الشديد) الحادث من إعطاء المتغيرات الصناعية وحدة واحدة .

وتترك التكلفة الجزائية فى صورة $\pm M$ فى حالة الحسابات اليدوية . أما فى الحاسبات ، فيجب أن تعطى M قيمة عددية ، وفى الغالب أكبر ثلاث أو أربع مرات من أى عدد آخر فى البرنامج .

الصيغة القياسية STANDARD FORM

يكون البرنامج الخطى فى صورته القياسية إذا كانت كل القيود فى صورة متساويات ، وإذا عرف حل واحد ممكن . وبأسلوب المصفوفات تكون الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned} &\text{تعظيم :} && z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \\ &\text{علما بأن :} && \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\ &\text{مع :} && \mathbf{X} \geq 0 \end{aligned} \qquad (٣ - ٢)$$

حيث إن $\mathbf{X}$ تعبر عن عامود متجه المتغيرات ، بما فيها المتغيرات المساعدة ، الزائدة والصناعية ، و $\mathbf{C}^T$ يعبر عن صف متجة التكلفة المقابلة ، و $\mathbf{A}$ هو معامل المصفوفة لمعادلات القيود ، و $\mathbf{B}$ هو عامود متجه الحدود اليمنى لمعادلات القيود . [لاحظ : فى بقية هذا الكتاب ستمثل المتجهات عادة مصفوفة ذات عامود واحد ، وسنقول دائماً « متجه » ، بدلاً من « عامود متجه » . وتمثل T مقلوب المصفوفة] .

إذا مثلت $\mathbf{X}_0$ متجه المتغيرات المساعدة والصناعية فقط ، فإن الحل الأوّلىّ الممكن يعطى فى صورة $\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}$ ، حيث إنه من المفهوم أن كل المتغيرات فى $\mathbf{X}$ ، وغير الموجودة فى $\mathbf{X}_0$ معطاه قيماً صفرية .

مسائل محلولة

Solved Problems

٢ - ١ ضع البرنامج التالى فى صيغة المصفوفات القياسية :

$$\begin{aligned} &\text{تعظيم :} && z = x_1 + x_2 \\ &\text{علماً بأن :} && x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & && 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

x_1 ، x_2 : غير سلبيين

بإضافة متغيرين مساعدين x_3 ، x_4 على التوالى للطرفين الأيسرين للقيود ، وإدخال هذين المتغيرين بمعامل تكلفة يساوى صفراً

فى الهدف نحصل على :

$$z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 \quad = 5 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + x_2 \quad + x_4 = 4$$

كل المتغيرات لاسلبية

ولما كانت كل معادلة قيد تحتوى على متغير مساعد ، لذلك لا يُطلَب أى متغير صناعى ، ويكون الحل الأوَّلىّ هو $x_3 = 5,\ x_4 = 4,\ x_1 = x_2 = 0$ ، والنموذج (١) يكون الصيغة القياسية (٢ – ٣) إذا عرفنا

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \qquad \mathbf{C} = [1, 1, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

٢ – ٢ ضع البرنامج التالى فى الصيغة القياسية :

$$z = 80x_1 + 60x_2 \quad : \quad \text{تصغير}$$

$$0.20x_1 + 0.32x_2 \leq 0.25 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$x_1 + \quad x_2 = 1$$

x_1 ، x_2 لا سلبيين

لتحويل القيد الأول إلى متساوية ، أضف متغير مساعد x_3 للطرف الأيسر . وحيث إن القيد الثانى معادلة لا تحتوى على متغير مساعد ، أضف متغيراً صناعياً x_4 إلى طرفها الأيسر ، ويضاف المتغيران الجديدان فى الدالة الهدفية ، والمتغير المساعد بمعامل تكلفة صفر ، والمتغير الصناعى بمعامل تكلفة سلبى كبير ، يؤول البرنامج إلى :

$$z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 - Mx_4 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 \quad = 0.25 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$x_1 + \quad x_2 \quad + x_4 = 1$$

كل المتغيرات لاسلبية

هذا البرنامج من الصيغة القياسية وبحل أوّلىّ ممكن هو : $x_3 = 0.25,\ x_4 = 1,\ x_1 = x_2 = 0.$

٢ – ٣ أعد المسألة ٢ – ٢ إذ الهدف هو تصغير .

التغير الوحيد فى معاملات التكلفة أن المرتبط المتغير الصناعى يصبح $+M$ ، بدلاً من $-M$.

٢ – ٤ ضع البرنامج التالى فى الصيغة القياسية .

تعظيم : $z = 5x_1 + 2x_2$

علماً بأن : $6x_1 + x_2 \geq 6$

$4x_1 + 3x_2 \geq 12$

$x_1 + 2x_2 \geq 4$

x_1 ، x_2 غير سلبيين

بطرح المتغيرات الزائدة x_3, x_4, x_5 على التوالى من الأطراف اليسرى للقيود ، وإدخال كل متغير جديد بقيمة صفرية لمعاملات التكلفة فى الهدف نحصل على :

تعظيم : $z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
6x_1 + x_2 - x_3 &= 6\\
4x_1 + 3x_2 - x_4 &= 12\\
x_1 + 2x_2 - x_5 &= 4
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لاسلبية

حيث لا تحتوى أى معادلة قيد على متغير مساعد ، نضيف المتغيرات الصناعية x_6, x_7, x_8, على التوالى للأطراف اليسرى للمعادلات . وندخل هذه المتغيرات بمعاملات تكلفة سالبة كبيرة فى الهدف . ويصبح البرنامج :

تعظيم : $z = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
6x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &= 6\\
4x_1 + 3x_2 - x_4 + x_7 &= 12\\
x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 &= 4
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات غير سالبة

هذا البرنامج من الصيغة القياسية بحل أوّلى ممكن $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ، $x_6 = 6,\ x_7 = 12,\ x_8 = 4$.

٢ - ٥ ضع البرنامج التالى فى صيغة المصفوفات القياسية

تصغير : $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_3 &\leq 5\\
5x_1 + x_2 + 6x_3 &= 7\\
8x_1 + 9x_3 &\geq 2
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لاسلبية

بإضافة متغير مساعد x_4 للطرف الأيسر للقيد الأول ، طرح متغير زائد x_5 من الطرف الأيسر للقيد الثالث ، ثم إضافة متغير صناعى x_6 فقط للطرف الأيسر للقيد الثالث نحصل على البرنامج :

$$z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 \quad : \quad \text{تصغير}$$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad + 4x_3 + x_4 \quad &= 5 \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 \quad &= 7 \\ 8x_1 \quad + 9x_3 \quad - x_5 + x_6 &= 2 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

هذا البرنامج فى الصيغة القياسية وبحل أوّلىّ ممكن $x_4 = 5,\ x_2 = 7,\ x_6 = 2,\ x_1 = x_3 = x_5 = 0$ ، ويأخذ صورة النموذج (٢ - ٣) إذا عرفنا

$$\mathbf{X} \equiv [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]^T \qquad \mathbf{C} \equiv [1, 2, 3, 0, 0, M]^T$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 \equiv \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

فى هذه الحالة يمكن استخدام x_2 لإيجاد الحل الأوّلىّ الممكن ، فضلاً عن إضافة المتغير الصناعى للقيد الثانى للحصول على نفس النتيجة . وبوجه عام ، عندما يظهر متغير واحد فى معادلة قيد واحدة فقط وبمعامل موجب ، فإنه يمكن استخدام هذا المعامل فى إيجاد جزء من الحل الأوّلىّ بقسمة معادلة القيد على المعامل الموجب ، ثم وضع المتغير مساوياً للطرف الأيمن للمعادلة ، ولا ضرورة لإضافة متغير صناعى للمعادلة .

٢ - ٦ ضع البرنامج التالى فى الصيغة القياسية

$$z = 25x_1 + 30x_2 \quad : \quad \text{تصغير}$$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 &\geq 1 \\ 8x_1 + 5x_2 &\geq 3 \\ 6x_1 + 9x_2 &\geq -2 \end{aligned}$$

حيث إن كلاً من x_1 ، x_2 غير مقيدين ، نضع $x_1 = x_3 - x_4$ ، $x_2 = x_5 - x_6$ ، بحيث تكون كل المتغيرات الجديدة لاسلبية . وبالتعويض عن قيم هذه الكميات فى البرنامج المعطى ، ثم ضرب القيد الأخير فى 1- لجعل الطرف الأيمن غير سلبى ، نحصل على البرنامج المكافىء :

$$z = 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 \quad : \quad \text{تصغير}$$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} 4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 &\geq 1 \\ 8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 &\geq 3 \\ -6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 &\leq 2 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

يحول هذا البرنامج إلى الصيغة القياسية بطرح المتغيرات الزائدة x_7 ، x_8 على التوالى من الطرف الأيسر لكل من القيدين الأولين ، وإضافة متغير مساعد x_9 للطرف الأيسر للقيد الثالث ، ثم إضافة متغير صناعى x_{10} ، x_{11} على التوالى للطرف الأيسر لكل من القيدين الأولين نحصل على :

تصغير :
$$z = 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + Mx_{10} + Mx_{11}$$

علماً بأن :
$$\begin{aligned}
4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 - x_7 \qquad + x_{10} \qquad &= 1\\
8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 \qquad - x_8 \qquad + x_{11} &= 3\\
-6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 \qquad + x_9 \qquad &= 2
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

الحل الأوّلىّ لهذه المسألة فى الصيغة القياسية هو :

$$x_{10} = 1 \qquad x_{11} = 3 \qquad x_9 = 2 \qquad x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$$

مسائل مكملة

Supplementary Problems

ضع كل من البرامج التالية فى صيغة المصفوفات القياسية

٢ – ٧

تصغير .
$$z = 2x_1 - x_2 + 4x_3$$

علماً بأن :
$$\begin{aligned}
5x_1 + 2x_2 - 3x_3 &\geq -7\\
2x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 8
\end{aligned}$$

x_1 لاسلبية

٢ – ٨

تصغير :
$$z = 10x_1 + 11x_2$$

علماً بأن :
$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 150\\
3x_1 + 4x_2 &\leq 200\\
6x_1 + x_2 &\leq 175
\end{aligned}$$

x_1 x_2 لاسلبيين

٢ – ٩ نفس المسألة ٢ – ٨ مع عكس متباينات القيود الثلاثة

٢ – ١٠

تصغير :
$$z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4$$

علماً بأن :
$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\geq 1000\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\geq 1500
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

٢ - ١١

تصغير : $z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$

علماً بأن : $x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$

كل المتغيرات لاسلبية

٢ - ١٢

تعظيم : $z = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$

علماً بأن : $2x_1 + 7x_2 = 7$

$5x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 10$

$x_1 + x_3 = 11$

x_1, x_2, x_3 لاسلبية

٢ - ١٣

تصغير : $z = 10x_1 + 2x_2 - x_3$

علماً بأن : $x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 + x_2 \geq 10$

$x_2 + x_3 \leq 30$

$x_2 + x_3 \geq 7$

$x_1 + x_2 + x_3 = 60$

كل المتغيرات لاسلبية

تصغير : $z = 25x_3 - 25x_4 + 30x_5 - 30x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + Mx_{10} + Mx_{11}$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
4x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 7x_6 - x_7 \qquad + x_{10} \qquad &= 1 \\
8x_3 - 8x_4 + 5x_5 - 5x_6 \qquad - x_8 \qquad + x_{11} &= 3 \\
-6x_3 + 6x_4 - 9x_5 + 9x_6 \qquad + x_9 \qquad &= 2
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لا سلبية

الحل الأوّليّ لهذه المسألة فى الصيغة القياسية هو :

$x_{10} = 1 \qquad x_{11} = 3 \qquad x_9 = 2 \qquad x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$

مسائل مكملة

Supplementary Problems

ضع كل من البرامج التالية فى صيغة المصفوفات القياسية

٢ – ٧

تصغير . $z = 2x_1 - x_2 + 4x_3$

علماً بأن : $5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq -7$

$2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 8$

x_1 لاسلبية

٢ – ٨

تصغير : $z = 10x_1 + 11x_2$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 \leq 150$

$3x_1 + 4x_2 \leq 200$

$6x_1 + x_2 \leq 175$

x_1 x_2 لاسلبيين

٢ – ٩ نفس المسألة ٢ – ٨ مع عكس متباينات القيود الثلاثة

٢ – ١٠

تصغير : $z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 1000$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \geq 1500$

كل المتغيرات لاسلبية

٢ - ١١

تصغير : $z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$

علماً بأن : $x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 15$

كل المتغيرات لاسلبية

٢ - ١٢

تعظيم : $z = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$

علماً بأن : $2x_1 + 7x_2 = 7$

$5x_1 + 8x_2 + 2x_4 = 10$

$x_1 + x_3 = 11$

x_1, x_2, x_3 لاسلبية

٢ - ١٣

تصغير : $z = 10x_1 + 2x_2 - x_3$

علماً بأن : $x_1 + x_2 \leq 50$

$x_1 + x_2 \geq 10$

$x_2 + x_3 \leq 30$

$x_2 + x_3 \geq 7$

$x_1 + x_2 + x_3 = 60$

كل المتغيرات لاسلبية

البرمجة الخطية : نظرية الحلول

Linear Programming: Theory of Solutions

الاعتماد والاستقلال الخطى LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE

تعتبر فئة المتجهات ذات الأبعاد $\{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_n\}$ « معتمدة خطياً » إذا كانت الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ لاتساوى صفراً ، بمعنى :

$$\alpha_1\mathbb{P}_1 + \alpha_2\mathbb{P}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbb{P}_n = \mathbb{0} \qquad (١ - ٣)$$

مثال ٣ - ١ فئة المتجهات ذات الخمسة أبعاد

$$\{[1, 2, 0, 0, 0]^T, [1, 0, 0, 0, 0]^T, [0, 0, 1, 1, 0]^T, [0, 1, 0, 0, 0]^T\}$$

معتمدة خطياً ، حيث إن

$$-1\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

نظرية (٣ - ١) تعتبر كل فئة المتجهات ذات الأبعاد $m + 1$ أو أكثر من m معتمدة خطياً .

تعتبر فئة المتجهات $\{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_n\}$ ذات الأبعاد m مستقلة خطياً إذا كانت الثوابت التى تحقق المعادلة هى فقط $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$ (انظر المسألة ٣ - ١ ، والمسألة ٣ - ٢)

التكوينات المحدبة CONVEX COMBINATIONS

يعتبر المتجه $\mathbb{P}$ ذو الأبعاد m تكويناً محدباً من المتجهات ذات الأبعاد m ، $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_n$ إذا تواجدت ثوابت لاسلبية $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ مجموعها مساوياً واحداً ، بمعنى :

$$\mathbb{P} = \beta_1\mathbb{P}_1 + \beta_2\mathbb{P}_2 + \cdots + \beta_n\mathbb{P}_n \qquad (٢ - ٣)$$

مثال ٣ - ٢ يعتبر المتجه ذو البعدين $[5/3, 5/6]^T$ تكويناً محدباً من المتجهات $[1, 1]^T, [3, 0]^T, [1, 2]^T$ ، لأن :

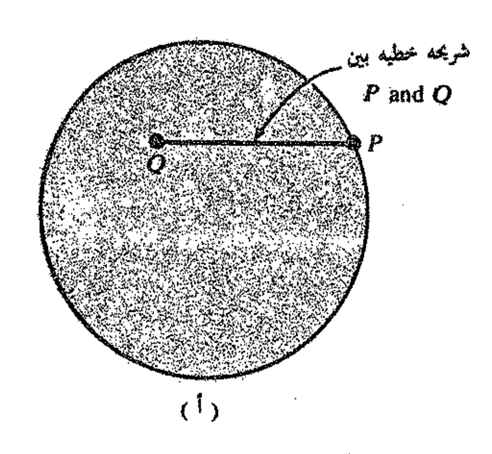
$$\begin{bmatrix}5/3\\5/6\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

إذا أعطينا المتجهين $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ ذوى الأبعاد m ، نطلق على هذه الفئة تكوينات محدبة للمتجهات $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ « الشريحة الخطية » بين هذين المتجهين ، ويظهر المعنى الهندسى لهذا الاصطلاح فى حالة $m = 3$.

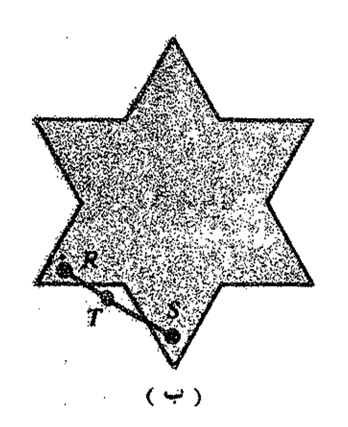
الفئات المحدبة CONVEX SETS

تعتبر فئة المتجهات ذات الأبعاد m « محدبة » إذا تبع هذه الفئة متجهان ، وأيضاً الشريحة الخطية بين المتجهين .

مثال ٣ – ٣ يعتبر القرص المظلل فى شكل (٣ – ١ – أ) فئة محدبة ، حيث إن الشريحة الخطية بين اى نقطتين فيها (متجهان ذوا بعدين) تقع بالكامل داخل القرص . ولا يعتبر الشكل (٣ – ١ – ب) محدباً ، بالرغم من تبعية S ، R للفئة المظللة ، فإنه توجد نقط مثل T تتبع الشريحة الخطية بين S ، R اللذين لا يعتبران جزءًا من النجمة .



(أ)



(ب)

شكل ٣ – ١

يعتبر المتجه $\mathbf{P}$ هو نقطة طرفية لفئة محدبة إذا لم يكن فى الإمكان التعبير عنه بتكوين محدب من متجهين آخرين فى الفئة ، بمعنى أنه لاتقع النقطة الطرفية على الشريحة الخطية بين أى متجهين آخرين فى الفئة .

مثال ٣ – ٤ تعتبر أى نقطة على محيط القرص فى شكل (٣ – ١ – أ) نقطة طرفية فى القرص .

نظرية ٣ – ٢ يمكن التعبير عن أى متجه فى فئه مغلقة ومحدبة محدودة ، بها عدد محدد من النقط الطرفية بأنه تكوين محدب من النقط الطرفية .

نظرية ٣ – ٣ يعتبر فراغ الحل لفئة المعادلات الخطية الآنية فئة محدبة بها عدد محدد من النقط الطرفية .

حلول النقط الطرفية EXTREME-POINT SOLUTIONS

افترض $\mathcal{S}$ تمثل فئة كل الحلول الممكنة للبرنامج الخطى من الصيغة القياسية (٢ – ٣) ، بمعنى أن $\mathcal{S}$ هى فئة كل المتجهات $\mathbf{X}$ التى تحقق $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.من النظرية ٣ – ٣ وفى الحقيقة .. إن الفئات المحدبة تتقاطع فى فئات محدبة أيضاً (المسألة ٣ – ١١) ، ويتبع ذلك أن $\mathcal{S}$ تكون فئة محدبة بها عدد محدد من النقط الطرفية .

ملاحظة ١ : تحقق الدالة الهدفية قيمتها المثلى (تعظيم أو تصغير) فى النقط الطرفية لـ $\mathscr{S}$ ، بافتراض أن هناك حلاً أمثل انظر المسألة (٣ - ١٢)

ملاحظة ٢ : إذا كانت $\mathbf{A}$ أبعادها $m \times n$ (m صف ، n عمود) ، حيث إن $m \leq n$ ، فإن النقط الطرفية لـ $\mathscr{S}$ يكون فيها على الأقل $n - m$ عناصر صفرية . (انظر المسألة ٣ - ١٣) .

الحلول الأساسية الممكنة BASIC FEASIBLE SOLUTIONS

عبر عن الأعمدة $m \times n$ فى مصفوفة المعاملات $\mathbf{A}$ فى النموذج (٢ - ٣) بـ $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ على التوالى ، لذلك يمكن كتابة مصفوفة معادلات القيود $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ فى صورة متجهات :

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \cdots + x_n\mathbf{A}_n = \mathbf{B} \qquad (٣ - ٣)$$

ونؤكد أن المتجهات $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ هى من المتجهات ذات الأبعاد m ، والمطلوب إيجاد حلول لاسلبية للمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وسنفرض أن $m \leq n$ ، ورتبة $\mathbf{A} = m$ ، وذلك يعنى أنه توجد على الأقل مجموعة m من المتجهات $\mathbf{A}$ مستقلة خطياً .

يمكن الحصول على الحل الأساسى الممكن للمعادلة (٣ - ٣) بوضع $n - m$ من المتغيرات x مساوية للصفر ، ثم إيجاد حلول لاسلبية لباقى المتغيرات x ، مع افتراض أن المجموعة m من المتجهات $\mathbf{A}$ المرتبطة بالمتغيرات x ، والتى لاتساوى الصفر هى مستقلة خطياً . تسمى مجموعة المتغيرات x التى لم تعط الحلول صفراً بـ « المتغيرات الأساسية » . إذا تحول أى من المتغيرات الأساسية إلى الصفر ، فإن الحل الأساسى الممكن « ينحرف » ، وإذا كانت كل المتغيرات الأساسية موجبة ، فإن الحل الأساسى الممكن « لا ينحرف » (انظر المسألة ٣ - ٧ ، ٣ - ٨ ، ٣ - ٩) .

يمكن تقوية الملاحظات ١ ، ٢ كمايلى :

ملاحظة ١ : تحقق الدالة الهدفية الحل الأمثل عند الحل الأساسى الممكن .

ملاحظة ٢ : تعتبر النقط الطرفية لـ $\mathscr{S}$ بدقة هى الحلول الأساسية الممكنة (انظر المسائل ٣ - ١٣ ، ٣ -١٤)

يتبع ذلك أنه يمكن حل البرنامج الخطى القياسى بالبحث بين الحلول الأساسية الممكنة عن الحل أو الحلول المثلى للهدف . ويعطى الفصل الرابع طريقة حسابية فعالة لهذا الحل .

مسائل محلولة

Solved Problems

٣ - ١ حدد إذا كانت $\{[1, 2]^T, [2, 4]^T\}$ مستقلة خطياً .

وسَمِّ المتجهين $\mathbf{P}_1$ ، $\mathbf{P}_2$. من الواضح أن $\mathbf{P}_2 = 2\mathbf{P}_1$ ، أو

$$2\mathbf{P}_1 + (-1)\mathbf{P}_2 = \mathbf{0}$$

لذلك فإن فئة المتجهات المعطاه تكون معتمدة خطياً (ليست مستقلة خطياً) .

٣ – ٢ هل $\{[1, 1, 3, 1]^T, [1, 2, 1, 1]^T, [1, 0, 0, 1]^T\}$ مستقلة خطياً ؟

لهذه المتجهات ، فإن (٣ – ١) تصبح

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{aligned}\alpha_1+\ \alpha_2+\alpha_3&=0\\ \alpha_1+2\alpha_2\qquad&=0\\ 3\alpha_1+\ \alpha_2\qquad&=0\\ \alpha_1+\ \alpha_2+\alpha_3&=0\end{aligned}$$

فى المعادلات الثلاث الأولى (الرابعة زائدة عن الحاجة) $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ كحل وحيد . لذلك ، فإن المتجهات المعطاه مستقلة خطياً .

٣ – ٣ المتجه $\mathbf{Q}$ هو تكوين خطى من المتجهات $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_n$ إذا وجدت الثوابت $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ، بحيث

$$\mathbf{Q}=\delta_1\mathbf{Q}_1+\delta_2\mathbf{Q}_2+\cdots+\delta_n\mathbf{Q}_n$$

بين أن فئة المتجهات $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n\}$ مستقلة خطياً لو ــ وفقط لو[*] ــ كان أحد هذه المتجهات تكويناً خطياً من الباقى .

إذا كان $\mathbf{P}_i=\delta_1\mathbf{P}_1+\cdots+\delta_{i-1}\mathbf{P}_{i-1}+\delta_{i+1}\mathbf{P}_{i+1}+\cdots+\delta_n\mathbf{P}_n,$ فيه بعض أو كل δ يمكن أن يكون صفراً ، إذا :

$$\delta_1\mathbf{P}_1+\cdots+\delta_{i-1}\mathbf{P}_{i-1}+(-1)\mathbf{P}_i+\delta_{i+1}\mathbf{P}_{i+1}+\cdots+\delta_n\mathbf{P}_n=0$$

وبالتالى فإن الفئة تكون معتمدة خطياً

ومن ناحية أخرى .. إذا كانت الفئة معتمدة خطياً ، ضع α_j لتكون أول معامل غير صفرى فى (٣ – ١) . إذا

$$\mathbf{P}_j=0\mathbf{P}_1+\cdots+0\mathbf{P}_{j-1}+\left(\frac{\alpha_{j+1}}{-\alpha_j}\right)\mathbf{P}_{j+1}+\cdots+\left(\frac{\alpha_n}{-\alpha_j}\right)\mathbf{P}_n$$

أى أن $\mathbf{P}_j$ هو تكوين خطى من المتجهات المتبقية .

٣ – ٤ حدد إذا كانت $[1, 2, 3]^T$ تكويناً خطياً

$$[1, 2, 1]^T \qquad [1, 1, 1]^T \qquad [2, 3, 2]^T$$

لا إنها ليست خطية : أى تكوين خطى من ثلاثة متجهات من الضرورى أن يتساوى فيه العنصر الأول والثالث . وبوجه عام :

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\delta_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\delta_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\delta_3\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$$

لو

$$\begin{aligned}\delta_1+\delta_2+2\delta_3&=1\\ 2\delta_1+\delta_2+3\delta_3&=2\\ \delta_1+\delta_2+2\delta_3&=3\end{aligned}$$

[*] لو و =لو وفقط لو تماثل if and only if

ولكن هذا النموذج الثانى ليس له حل .

٣ - ٥ اثبت أنه إذا كانت $\{\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_r\}$ فئة متجهات مستقلة خطياً ، و $\mathbb{P}$ هو متجه ، بحيث

$$\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{r} d_j \mathbb{P}_j \quad \text{و} \quad \mathbb{P} = \sum_{j=1} c_j \mathbb{P}_j$$

إذن $c_j = d_j \ (j = 1, 2, \ldots, r)$

بطرح الصيغتين نحصل على :

$$\sum_{j=1}^{r} (c_j - d_j)\mathbb{P}_j = 0$$

الذى يمثل (٣ -١) مع $\alpha_j = c_j - d_j$ ، $n = r$. حيث إن $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_r$ مستقلان خطياً ، يتبع ذلك أن $c_j - d_j = 0,$ أو $c_j = d_j \ (j = 1, 2, \ldots, r).$

٣ - ٦ أكتب معادلات القيود للبرامج الخطية التالية بصيغة المتجهات (٣ -٣)

تصغير : $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + Mx_5 + 0x_6$

علماً بأن :
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 6$$

كل المتغيرات لاسلبية

من هذه المسألة تصبح (٣ -٣)

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_6\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$
$$\mathbb{A}_1 \quad \mathbb{A}_2 \quad \mathbb{A}_3 \quad \mathbb{A}_4 \quad \mathbb{A}_5 \quad \mathbb{A}_6 \quad \mathbb{B}$$

٣ - ٧ حدد إذا كان $[1, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ هو حلاً أساسياً ممكناً للبرنامج الخطى المعطى بالمسألة (٣ - ٦)

ولو أن كل المكونات ليست سلبية ، فإن الحل المقترح ليس أساسياً . المتجهات $\mathbb{A}_1$ ، $\mathbb{A}_3$ مشاركة مع المتغيرات $\mathbb{X}$ ، والتى تساوى صفراً ، ليست مستقلة خطياً (مسألة ٣ - ١)

٣ - ٨ حدد إذا كان $[1, 0, 0, 0, 2, 4]^T$ هو حلاً أساسياً ممكناً للبرنامج الخطى المعطى بالمسألة (٣ - ٦)

تحتوى مصفوفة المعاملات A المتكونة من أعمدة المتجهات A_1 حتى A_6 ، وتتكون من 2×6 . لذلك ، فإن حلاً أساسياً ممكناً يجب أن يحتوى على الأقل على $6 - 2 = 4$ عناصر صفرية (متغيرات) . وهى غير الحالة المقدمة بالمسألة .

٣ - ٩ أوجد حلين أساسيين ممكنين مختلفين للمسألة (٣ - ٦)

حيث إن $n - m = 4$ هو حل أساسى ممكن يحتوى على أربعة متغيرات x تأخذ القيم صفر . بوضع المتغيرات x_1 حتى x_4 مساوية للصفر ، يصبح متجه معادلة القيود .

$$x_5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_6\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

وله الحل اللاصفرى $x_6 = 6$ ، $x_5 = 3$. وحيث إن A_5 ، A_6 مستقلان خطياً ، فيكون الحل الكامل $[0, 0, 0, 0, 3, 6]^T$ أساسياً . وهنا تكون المتغيرات الأساسية x_5 ، x_6 . وحيث إن كليهما موجب ، لذلك فإن الحل لن ينحرف .

للحصول على حل أساسى ممكن آخر نضع $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ ، ويصبح متجه معادلة القيود .

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ x_1 x_2 نجد أن $x_1 = 3$ ، $x_2 = 0$ ، وتكون المتجهات التابعة A ، وهى A_1 ، A_2 ، مستقلة خطياً ويكون الحل الكامل $[3, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ أساسياً . تكون المتغيرات الأساسية x_1 ، x_2 ، وحيث إن أحدها صفرىّ ، فإن الحل ينحرف

٣ - ١٠ حدد إذا كان المتجه $[0, 7]^T$ تكويناً محدباً من الفئة $\{[3, 6]^T, [-6, 9]^T, [2, 1]^T, [-1, 1]^T\}$

لهذه المتجهات ، تصبح (٣ - ٢)

$$\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix} = \beta_1\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} + \beta_2\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix} + \beta_3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + \beta_4\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \quad (1)$$

أو

$$\begin{aligned} 3\beta_1 - 6\beta_2 + 2\beta_3 - \beta_4 &= 0 \\ 6\beta_1 + 9\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &= 7 \end{aligned}$$

نضيف شرطاً ثالثاً لهذه المعادلات هو :

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1 \qquad (٢)$$

يجب أن نحدد هل توجد قيم لاسلبية لـ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ تحقق آنياً (١) ، (٢) . بحل هذه المعادلات نحصل على :

$$\beta_1 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\beta_4 \qquad \beta_2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{16}\beta_4 \qquad \beta_3 = (-19/16)\beta_4$$

باختيار قيمة β_4 يجب اختيار $\beta_4 = 0$ نحصل على

$$\beta_1 = \tfrac{2}{3} \qquad \beta_2 = \tfrac{1}{3} \qquad \beta_3 = 0 \qquad \beta_4 = 0$$

كمجموعة مقبولة من الثوابت ، لذلك $[0, 7]^T$ تعتبر تكويناً محدباً للفئة المعطاة ذات الأربعة متجهات .

٣ - ١١ إذا كانت $\mathscr{Q}$ ، $\mathscr{R}$ فئتين محدبتين ، بين أن تقاطعهما $\mathscr{Q} \cap \mathscr{R}$ هو فئة محدبة .

افرض $\mathbb{X}$ ، $\mathbb{Y}$ متجهين فى $\mathscr{Q} \cap \mathscr{R}$ ، فإن الشريحة الخطية بين $\mathbb{X}$ ، $\mathbb{Y}$ تكون فى $\mathscr{Q}$ (لأن $\mathbb{X}$ ، $\mathbb{Y}$ تتواجد فى $\mathscr{Q}$ ، $\mathscr{Q}$ محدبة) وكذلك فى $\mathscr{R}$ (بالتماثل) . لذلك فإن الشريحة الخطية تكون فى $\mathscr{Q} \cap \mathscr{R}$ ، ويكون $\mathscr{Q} \cap \mathscr{R}$ محدباً .

فى الحالة التى يكون فيها $\mathscr{Q}$ ، $\mathscr{R}$ محدبين متعددى السطوح (بهما نقط طرفية كثيرة محددة) ، فإنه من البديهى أن تقاطعهما يكون محدباً متعدد الأسطح .

٣ - ١٢ اثبت أن الدالة الهدفية $z = f(\mathbb{X}) = \mathbf{C}^T\mathbb{X}$ فى النموذج (٢ - ٣) تحقق الحل الأمثل (تصغير) عند أى نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$ ، علماً بأنه يوجد حد أدنى (تصغير) ، وأن $\mathscr{S}$ محددة .

إذا وجد حد أدنى ، فإنه توجد نقطة $\mathbb{X}_0 \in \mathscr{S}$ ، بحيث إن :

$$f(\mathbb{X}_0) \leq f(\mathbb{X}) \text{ لكل } : \mathbb{X} \in \mathscr{S} \qquad (١)$$

إذا كانت $\mathbb{X}_0$ نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$ ، فهذا يعتبر حلاً ، وإذا لم تكن كذلك ، فإننا يجب أن نحصل على نقطة طرفية $\mathbb{X}_m$ ، بحيث تكون $f(\mathbb{X}_m) = f(\mathbb{X}_0)$.

والآن فإن $\mathscr{S}$ عدد محدد فقط من النقط الطرفية ، يمكن تحديدهم $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \ldots, \mathbb{X}_p$ ، ولأن $\mathscr{S}$ محددة (وأيضاً مغلقة) . تؤكد النظرية (٣ - ٢) أن $\mathbb{X}_0$ يمكن كتابتها كتكوين محدب لهذه النقط الطرفية ، بمعنى أنه توجد قيم لاسلبية $\beta_j \ (j = 1, 2, \ldots, p)$ مجموعها = واحد ، بحيث :

$$\mathbb{X}_0 = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbb{X}_j$$

دع الحد الأدنى $f(\mathbb{X})$ عند النقط الطرفية ليكون $\mathbb{X}_m$ من (1) ، $f(\mathbb{X}_0) \leq f(\mathbb{X}_m)$ ، ولكن :

$$f(X_0)=f\left(\sum_{j=1}^{p}\beta_j X_j\right)=\sum_{j=1}^{p}\beta_j f(X_j)\geq\sum_{j=1}^{p}\beta_j f(X_m)=f(X_m)\sum_{j=1}^{p}\beta_j=f(X_m) \qquad (٢)$$

وبالتالى $f(X_0)=f(X_m)$ ، وكذلك توجد نقط طرفية تسمى X_m عندما تصل $f(X)$ إلى الحد الأدنى .

طبقاً لمبادىء نظرية فايرستراس (نظرية ١١ - ١) الدوال المتصلة ــ وبالأخص الدوال الخطية مثل $f(X)$ ــ تفرض قيمة حد أدنى فى منطقة مغلقة محددة . ونستنتج من ذلك أن البرنامج الخطى القياسى يحقق حل النقط الطرفية الأمثل عندما تكون $\mathscr{S}$ محددة ، وإذا كانت $\mathscr{S}$ غير محددة . فقد لا توجد الأمثلية ، ومع ذلك ، إذا وجدت الأمثلية فإنها تحقق النقط الطرفية .

٣ - ١٣ اثبت أن كل نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$ لها على الأقل $n-m$ عناصر صفرية ، وأنها حل أساسى ممكن .

دع $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ لتكون نقط طرفية فى $\mathscr{S}$ ، بدون أن نفقد العمومية ، يمكن أن نثبت أن المتغيرات x يمكن ترتيبها بحيث إن $(r\leq n)$ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ تكون موجبة ، وأن كل العناصر التالية فى X ، إذا كانت هناك عناصر ، تكون موجبة ،حيث إن : $X\in\mathscr{S}$ ، فإن $AX=B$ ، وتبعا لذلك فإن $x_j=0$ لكل $j>r$ ، ويمكن كتابتها فى الصورة .

$$\sum_{j=1}^{r}x_j A_j=B \qquad (١)$$

نبين أولاً أن المتجه A_j فى (١) مستقل خطياً . وبافتراض أنه ليس كذلك ، فإنه توجد ثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ليست جميعها أصفاراً بحيث إن :

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j A_j=0 \qquad (٢)$$

دع θ لتكون موجبة ، فإن (١) ، (٢) ، تعطى :

$$\sum_{j=1}^{r}(x_j+\theta\alpha_j)A_j=B \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{r}(x_j-\theta\alpha_j)A_j=B$$

إذا إخترنا θ صغيرة ، بحيث إن $x_j+\theta\alpha_j$ $x_j-\theta\alpha_j$ تبقى موجبة لكل قيم $j=1, 2, \ldots, r$ ، ويتبع ذلك مباشرة من (٣) أن :

$$X_1=[x_1+\theta\alpha_1, x_2+\theta\alpha_2, \ldots, x_r+\theta\alpha_r, 0, 0, \ldots, 0]^T$$
$$X_2=[x_1-\theta\alpha_1, x_2-\theta\alpha_2, \ldots, x_r-\theta\alpha_r, 0, 0, \ldots, 0]^T$$

هى قيم معينة من $\mathscr{S}$ ، ولكن $X=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$ ، وهذا غير ممكن ، حيث إن X هى نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$ ، لذلك يجب أن تكون فئة $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ مستقلة خطياً .

وحيث إن المتجهات لها ذات أبعاد m ، فيتبع ذلك من النظرية ٣ - ١ أنه لايمكن أن يوجد أكثر من عدد m منهم يكون مستقلاً خطياً . وتبعاً لذلك $r\leq m$ ، ولكن كل العناصر فى r التى تلى العنصر رقم X تكون صفرية ، ومن ثم يجب أن تحتوى X على $n-m$ عناصر صفرية على الأقل .

فى حالة $r=m$ يحدد البرهان السابق مباشرة أن X هى حل أساسى ممكن ، إذا كانت $r<m$ ، فيمكن دائماً تعريف $m-r$ عناصر صفرية فى X (مع فرض أن رتبة $A=m$) بحيث تشترك المتجهات A مع نظائرها $A_1, A_2, \ldots, A_r$ لتكون فئة مستقلة خطياً . ولذلك ، ومرة أخرى ، تكون X حلاً أساسياً ممكناً .

٣ – ١٤ اثبت أن كل حل أساسى ممكن هو نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$.

دع $\mathbb{X}$ لتكون حلاً أساسياً ممكناً ، إذاً $\mathbb{X} \in \mathscr{S}$ ، وتكون $n-m$ على الأقل من عناصر $\mathbb{X}$ صفرية . بدون فقد العمومية يمكن افتراض أن المتغيرات x قد رتبت بحيث تظهر العناصر الموجبة فى $\mathbb{X}$ أولاً :

$$\mathbb{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \tag{١}$$

بحيث إن $x_j > 0 \ (j = 1, 2, \ldots, s)$ $s \leq m$. وتبعاً لذلك ، فإن $A\mathbb{X} = \mathbb{B}$ يمكن كتابتها فى الصورة :

$$\sum_{j=1}^{s} x_j \mathbb{A}_j = \mathbb{B}$$

حيث إن ، وكنتيجة لكون $\mathbb{X}$ أساسية ، فإن الفئة $\{\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \ldots, \mathbb{A}_s\}$ تكون مستقلة خطياً (انظر المسألة ٣ – ٢٢) .
افرض أن $\mathbb{X}$ ليست نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$ ، لذلك يمكن التعبير عن $\mathbb{X}$ كتكوين محدب فى نقطتين أخريين فى $\mathscr{S}$:

$$\mathbb{X} = \beta_1 \mathbb{X}_1 + \beta_2 \mathbb{X}_2 \quad \text{حيث} \quad \mathbb{X}_1 \neq \mathbb{X}_2 \tag{٢}$$

وحيث إن عناصر كل من $\mathbb{X}_1$ ، $\mathbb{X}_2$ لا سلبية ، والثوابت β_1 ، β_2 موجبة ، فينتج من (١) ، (٢) أن العناصر $n-s$ الأخيرة فى $\mathbb{X}_2$ و $\mathbb{X}_1$ تكون أيضاً صفرية ، لذلك

$$\mathbb{X}_1 = [c_1, c_2, \ldots, c_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \qquad \mathbb{X}_2 = [d_1, d_2, \ldots, d_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \tag{٣}$$

وبالنظر إلى (٣) ، $A\mathbb{X}_1 = \mathbb{B}$ و $A\mathbb{X}_2 = \mathbb{B}$ تأخذ صيغة المتجهات :

$$\sum_{j=1}^{s} d_j \mathbb{A}_j = \mathbb{B} \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{s} c_j \mathbb{A}_j = \mathbb{B}$$

باستخدام نتيجة المسألة ٣ – ٥ نستنتج أن : $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2$ حيث إن $c_j = d_j$. ويحدد هذا التناقض أن $\mathbb{X}$ ، فى الحقيقة ، تكون نقطة طرفية .

٣ – ١٥ بين أن الحل الأوّلىّ $\mathbb{X}_0$ المستنتج فى الفصل الثانى هو حل أساسى ممكن .
تمثل فئة المتجهات $\mathbb{A}$ المرتبطة بالحل الأوّلىّ أعمدة $m \times m$ فى المصفوفة الأحادية ، وأنها مستقلة خطياً .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٣ – ١٦ حدد بالرسم أن $[1, 2]^T$ هو تكوين محدب فى $[1, 1]^T$ ، $[2, -1]^T$.

٣ – ١٧ اكتب معادلات القيود للبرنامج الخطى التالى فى صيغة متجهات :

تصغير : $z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + Mx_4 + 0x_5$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 6$

كل المتغيرات لاسلبية

٣ – ١٨ حدد أياً من المتجهات التالية تكون حلولاً أساسية ممكنة للبرنامج الخطى فى المسأله ٣ – ١٧ ؟ هل ينحرف أى من الحلول الممكنة ؛

(*a*) $[1, 1, 0, 0, 0]^T$ (*b*) $[3, 0, 0, 0, 0]^T$ (*c*) $[0, 0, 3, 0, 6]^T$ (*d*) $[0, 0, 3, 2, 8]^T$

٣ – ١٩ اكتب معادلات القيود للبرنامج الخطى التالى فى صيغة المتجهات :

تعظيم : $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 9$

$2x_1 + x_2 + 3x_4 + x_6 = 9$

$-x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 0$

كل المتغيرات لاسلبية

٣ – ٢٠ حدد أياً من المتجهات التالية حل ممكن للبرنامج الخطى فى المسألة ٣ – ١٩ ؟ هل ينحرف أى من الحلول الأساسية الممكنة ؟

(*a*) $[3, 3, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ (*c*) $[0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]^T$ (*e*) $[1, 0, 0, 0, 8, 7, 1]^T$

(*b*) $[2, 2, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ (*d*) $[0, 0, 0, 0, 9, 9, 0]^T$ (*f*) $[0, 0, 9, 0, 0, 9, -9]^T$

٣ – ٢١ اثبت أنه إذا حققت الدالة الخطية قيمتها الصغرى عند نقطتين من الفئة المحدبة ، فإنها تحقق هذه القيمة الصغرى على كل الشريحة الخطية بين النقط ؟

٣ - ١٤ اثبت أن كل حل أساسى ممكن هو نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$.

دع $\mathbf{X}$ لتكون حلاً أساسياً ممكناً ، إذاً $\mathbf{X} \in \mathscr{S}$ ، وتكون $n-m$ على الأقل من عناصر $\mathbf{X}$ صفرية . بدون فقد العمومية يمكن افتراض أن المتغيرات x قد رتبت بحيث تظهر العناصر الموجبة فى $\mathbf{X}$ أولاً :

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \qquad (١)$$

بحيث إن $x_j > 0 \ (j = 1, 2, \ldots, s)$ و $s \leq m$. وتبعاً لذلك ، فإن $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ يمكن كتابتها فى الصورة :

$$\sum_{j=1}^{s} x_j \mathbf{A}_j = \mathbf{B}$$

حيث إن ، وكنتيجة لكون $\mathbf{X}$ أساسية ، فإن الفئة $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_s\}$ تكون مستقلة خطياً (انظر المسألة ٣ - ٢٢) .
افرض أن $\mathbf{X}$ ليست نقطة طرفية فى $\mathscr{S}$ ، لذلك يمكن التعبير عن $\mathbf{X}$ كتكوين محدب فى نقطتين أخريين فى $\mathscr{S}$:

$$\mathbf{X} = \beta_1 \mathbf{X}_1 + \beta_2 \mathbf{X}_2 \quad \text{حيث} \quad \mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2 \qquad (٢)$$

وحيث إن عناصر كل من $\mathbf{X}_1$ ، $\mathbf{X}_2$ لا سلبية ، والثوابت β_1 ، β_2 موجبة ، فينتج من (١) ، (٢) أن العناصر $n-s$ الأخيرة فى $\mathbf{X}_2$ و $\mathbf{X}_1$ تكون أيضاً صفرية ، لذلك

$$\mathbf{X}_2 = [d_1, d_2, \ldots, d_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \qquad \mathbf{X}_1 = [c_1, c_2, \ldots, c_s, 0, 0, \ldots, 0]^T \qquad (٣)$$

وبالنظر إلى (٣) ، $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{B}$ و $\mathbf{AX}_2 = \mathbf{B}$ تأخذ صيغة المتجهات :

$$\sum_{j=1}^{s} d_j \mathbf{A}_j = \mathbf{B} \qquad \text{و} \qquad \sum_{j=1}^{s} c_j \mathbf{A}_j = \mathbf{B}$$

باستخدام نتيجة المسألة ٣ - ٥ نستنتج أن : $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ حيث إن $c_j = d_j$. ويحدد هذا التناقض أن $\mathbf{X}$ ، فى الحقيقة ، تكون نقطة طرفية .

٣ - ١٥ بين أن الحل الأوّلى $\mathbf{X}_0$ المستنتج فى الفصل الثانى هو حل أساسى ممكن .
تمثل فئة المتجهات $\mathbf{A}$ المرتبطة بالحل الأوّلىّ أعمدة $m \times m$ فى المصفوفة الأحادية ، وأنها مستقلة خطياً .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٣ - ١٦ حدد بالرسم أن $[1, 2]^T$ هو تكوين محدب فى $[1, 1]^T$ ، $[2, -1]^T$.

٣ – ١٧ اكتب معادلات القيود للبرنامج الخطى التالى فى صيغة متجهات :

تصغير : $z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + Mx_4 + 0x_5$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

٣ – ١٨ حدد أياً من المتجهات التالية تكون حلولاً أساسية ممكنة للبرنامج الخطى فى المسألة ٣ – ١٧ ؟ هل ينحرف أى من الحلول الممكنة ؛

(a) $[1, 1, 0, 0, 0]^T$ (b) $[3, 0, 0, 0, 0]^T$ (c) $[0, 0, 3, 0, 6]^T$ (d) $[0, 0, 3, 2, 8]^T$

٣ – ١٩ أكتب معادلات القيود للبرنامج الخطى التالى فى صيغة المتجهات :

تعظيم : $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 9 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + 3x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 9 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 &= 0 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لاسلبية

٣ – ٢٠ حدد أياً من المتجهات التالية حل ممكن للبرنامج الخطى فى المسألة ٣ – ١٩ ؟ هل ينحرف أى من الحلول الأساسية الممكنة ؟

(a) $[3, 3, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ (c) $[0, 0, 0, 3, 0, 0, 0]^T$ (e) $[1, 0, 0, 0, 8, 7, 1]^T$

(b) $[2, 2, 0, 1, 0, 0, 0]^T$ (d) $[0, 0, 0, 0, 9, 9, 0]^T$ (f) $[0, 0, 9, 0, 0, 9, -9]^T$

٣ – ٢١ اثبت أنه إذا حققت الدالة الخطية قيمتها الصغرى عند نقطتين من الفئة المحدبة ، فإنها تحقق هذه القيمة الصغرى على كل الشريحة الخطية بين النقط ؟

٣ - ٢٢ اثبت أن أى فئة صغرى غير فارغة فى أى فئة متجهات مستقلة خطياً هى فى حد ذاتها مستقلة خطياً ؟

٣ - ٢٣ اثبت أن أى فئة متجهات تحتوى على متجه صفرى هو مستقل خطياً ؟

البرمجة الخطية طريقة السمبلكس

Linear Programming: The Simplex Method

جدول السمبلكس THE SIMPLEX TABLEAU

تعتبر طريقة السمبلكس هى طريقة المصفوفات لحل البرامج الخطية فى الصيغة القياسية .

أمثليـــة : $z = \mathbf{C}^T\mathbf{X}$

علما بأن : $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

عند : $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

حيث إن $\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ وبمعرفة الحل الأساسى الممكن $\mathbf{X}_0$ (المسألة ٣ ــ ١٥) . تُوجد الطريقة بالتالى حلولاً أساسية ممكنة ابتداءً من $\mathbf{X}_0$ وبقيم أحسن للهدف ، حتى الحصول على الحل الأمثل . وفى برامج التصغير تستخدم طريقة السمبلكس ــ جدول ٤ ــ ١ ــ وفيه يمثل $\mathbf{C}_0$ متجه التكلفة المرتبط بالمتغيرات فى $\mathbf{X}_0$.

		$\mathbf{X}^T$ $\mathbf{C}^T$	
$\mathbf{X}_0$	$\mathbf{C}_0$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
		$\mathbf{C}^T - \mathbf{C}_0^T\mathbf{A}$	$-\mathbf{C}_0^T\mathbf{B}$

جدول (٤ - ١)

وفى برامج التعظيم يطبق جدول ٤ ــ ١ إذا عكست إشارات الصف الأخير .

مثال ٤ ــ ١ فى برنامج التصغير للمسالة ٢ ــ ٥ ، $\mathbf{C}_0 = [0, 2, M]^T$ إذاً :

$$\mathbf{C}^T - \mathbf{C}_0^T\mathbf{A} = [1, 2, 3, 0, 0, M] - [0, 2, M]\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [1, 2, 3, 0, 0, M] - [10 + 8M, 2, 12 + 9M, 0, -M, M] = [-9 - 8M, 0, -9 - 9M, 0, M, 0]$$

$$-\mathbf{C}_0^T\mathbf{B} = -[0, 2, M]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = -14 - 2M$$

ويصبح الجدول ٤ ــ ١

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
		1	2	3	0	0	M	
x_4	0	3	0	4	1	0	0	5
x_2	2	5	1	6	0	0	0	7
x_6	M	8	0	9	0	-1	1	2
		$-9-8M$	0	$-9-9M$	0	M	0	$-14-2M$

تبسيط الجدول . A TABLEAU SIMPLIFICATION

لكل j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ عرف $z_j \equiv C_0^T A_j$ حاصل ضرب النقطة dot product لـ C_0 عند العمود j من A . المدخل رقم j فى الصف الأخير من الجدول ٤ ــ ١ هو $c_j - z_j$ (أو $z_j - c_j$ فى حالة التعظيم) ، حيث إن c_j هى تكلفة الصف الثانى من الجدول فوق A_j مباشرة . وبمجرد الحصول على هذا الصف يصبح الصف الثانى والعمود الثانى فى الجدول المناظرين لـ C^T ، C_0 على التوالى زائدين عن الحاجة ، ويمكن حذفهما .

طريقة السمبلكس THE SIMPLEX METHOD

الخطوة ١ : حدد أعلى قيمة سالبة فى الصف السفلى من جدول السمبلكس ، باستثناء العمود الأخير ، واطلق على العمود الذى تظهر فيه هذه القيمة « عمود العمل » . إذا وجد أكثر من رقم متساوٍ ، اختر أحدهما .

الخطوة ٢ : كون نسباً بقسمة كل رقم موجب فى عمود العمل ، باستثناء الصف الأخير ، على العنصر (الرقم) فى نفس الصف فى العمود الأخير . وحدد العنصر فى عمود العمل الذى يؤدى إلى أصغر نسبة ، وأطلق عليه « العنصر المحورى » . إذا أدى أكثر من رقم إلى نفس النسبة ، فاختر أحدهما . وإذا لم يوجد فى عمود العمل أى رقم موجب ، يكون البرنامج ليس له حل .

الخطوة ٣ : استخدم العمليات الأولية فى تحويل العنصر المحورى إلى واحد ، واختصار كل العناصر الأخرى فى عمود المحور إلى صفر .

الخطوة ٤ : استبدل المتغير x فى صف المحور والعمود الأول بالمتغير x فى الصف الأول وعمود المحور . وهذا العمود الأول هو فئة المتغيرات الأساسية الحالية (انظر فصل ٣)

الخطوة ٥ : كرر الخطوات من ١ حتى ٤ ، حتى لا تبقى هناك أعداد سالبة فى الصف الأخير ، باستثناء العمود الأخير .

الخطوة ٦ : نصل إلى الحل الأمثل بتخصيص لكل متغير فى العمود الأول قيمة مناظرة فى الصف المناظر والعمود الأخير . وكل المتغيرات الباقية تأخذ القيم صفر . والقيمة المثلى للهدف z^* المرتبطة بهذا هى العدد الموجود فى الصف الأخير والعمود الأخير ، فى حالة برنامج التعظيم ، والقيمة السالبة لهذا العدد فى حالة برنامج التصغير .

تعديل البرنامج باستخدام المتغيرات الصناعية MODIFICATIONS FOR PROGRAMS WITH ARTIFICIAL VARIABLES

حيثما تكون المتغيرات الصناعية جزءًا من الحل الأوَّلىّ X_0 ، فإن الصف الأخير من الجدول ٤ ــ ١ يحتوى على التكلفة الجزائية M (انظر فصل ٢) . لتقليل أخطاء الاستكمال (انظر مسألة ٤ ــ ٦) تجرى التعديلات التالية على طريقة السمبلكس ، وتكون الطريقة الناتجة هى « طريقة المرحلتين » *two-phase method* .

التغيير الأول : يقسم الصف الأخير فى الجدول ٤ ــ ١ إلى صفين ، يحتوى الأول منهما على الحدود التى لا تحتوى على M ، بينما يحتوى الثانى على معاملات M فى الحدود الباقية .

مثال ٤ ــ ٢ الصف الأخير فى الجدول فى المثال ٤ ــ ١

$$-9-8M \quad 0 \quad -9-9M \quad 0 \quad M \quad 0 \quad -14-2M$$

بالتغيير الأول يحول الصف إلى صفين هما :

−9	0	−9	0	0	0	−14
−8	0	−9	0	1	0	− 2

التغيير الثانى : تطبق الخطوة الأولى فى طريقة السمبلكس على الصف الأخير الناتج من التغيير الأول . (ويتبع بالخطوات ٢ ، ٣ ، ٤) حتى لايحتوى هذا الصف على عناصر سالبة ، ثم تطبق الخطوة الأولى على العناصر التى فى الصف قبل الأخير ، والتى فوق الأصفار فى الصف الأخير .

التغيير الثالث : عندما يتحول أى متغير صناعى إلى أساسى ــ أى ينتقل من العمود الأول فى الجدول [نتيجة تطبيق الخطوة الرابعة] ــ فإنه يحذف من الصف الأعلى بالجدول ، وكذلك من كل العمود الذى تحته . (هذا التعديل يبسط الحسابات اليدوية ، ولا يستخدم فى حالة برامج الحاسبات)

التغيير الرابع : يمكن حذف الصف الأخير من الجدول عندما يحتوى كله على أصفار .

التغيير الخامس : إذا وجدت متغيرات صناعية لا صفرية فى الفئة الأساسية النهائية ، فإن البرنامج يكون ليس له حل . (وعلى النقيض ، فإن المتغيرات الصناعية الصفرية يمكن أن تظهر كمتغيرات أساسية فى الحل النهائى عندما تكون واحدة أو أكثر من معادلة القيود الأصلية زائدة عن الحاجة .

مسائل محلولة

Solved Problems

٤ ــ ١

تعظيم : $z = x_1 + 9x_2 + x_3$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$

كل المتغيرات لا سابية

يوضع هذا البرنامج فى صورة مصفوفة قياسية بإدخال المتغيرات المساعدة x_4 x_5 فى متباينات القيود الأولى والثانية على التوالى ، ثم نعرف بعد ذلك :

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \qquad \mathbf{C} = [1, 9, 1, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

وتكون التكلفة المرتبطة بعناصر $\mathbf{X}_0$ (المتغيرات المساعدة) صفرية ، ومن ثم $\mathbf{C}_0 = [0, 0]^T$. ويصبح جدول ٤ ــ ١ :

		x_1 1	x_2 9	x_3 1	x_4 0	x_5 0	
x_4	0	1	2	3	1	0	9
x_5	0	3	2	2	0	1	15

لحساب الصف الأخير من هذا الجدول نستخدم تبسيط الجدول ، ونحسب كل z_j أولاً . بالتفتيش : فإنها مضروب العمود 2 والعمود رقم j في A ، ثم نطرح منها التكلفة المناظرة c_j (برنامج تعظيم) . في هذه الحالة يكون العمود الثاني صفراً ، وكذلك $z_j - c_j = 0 - c_j = -c_j$ ، ومن ثم يكون الصف الأسفل من الجدول ، باستثناء العنصر الأخير ، هو القيم السالبة للصف الثاني . ويكون العنصر الأخير في الصف ، ببساطة ، هو مضروب العمود 2 والعمود النهائي B ، ويكون صفراً أيضاً . عند هذه النقطة يكون العمود الثاني والصف الثاني من الجدول زائدين . وبحذفهما نحصل على الجدول ١ كجدول أوّليّ كامل .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	2*	3	1	0	9
x_5	3	2	2	0	1	15
$(z_j - c_j)$:	−1	−9	−1	0	0	0

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2
x_5	2	0	−1	−1	1	6
	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2

جدول ٢

ويمكن الآن تطبيق طريقة السمبلكس . أعلى قيمة سلبية في العمود الأخير في الجدول ١ هي 9− ، مناظرة لعمود x_2 ، ومن ثم يعتبر هذا العمود هو عمود العمل . وبتكوين النسب $9/2 = 4.5$ ، $15/2 = 7.5$ نجد أن العنصر 2 ، الموضح بنجمة في الجدول الأول ، هو عنصر المحور ، وبالتالي فتكون له أصغر نسبة . بتطبيق الخطوة ٣ ، ٤ على الجدول الأول ، نحصل على الجدول الثاني . وحيث إن الصف الأخير في الجدول الثاني لا يحتوي على عناصر سالبة ، فينتج من الخطوة ٦ أن الحل الأمثل هو : $x_2^* = 9/2,\ x_5^* = 6,\ x_1^* = x_3^* = x_4^* = 0$

عند : $z^* = 81/2$

٤ − ٢

$$\text{تصغير}: \quad z = 80x_1 + 60x_2$$
$$\text{علماً بأن}: \quad 0.20x_1 + 0.32x_2 \le 0.25$$
$$x_1 + \quad x_2 = \quad 1$$

مع x_1 و x_2 لا سلبيين

بإضافة متغير مساعد x_3 ومتغير صناعي x_4 للقيدين الأول والثاني على التوالي يتحول البرنامج إلى صيغة المصفوفات القياسية :

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \qquad \mathbf{C} = [80, 60, 0, M]^T$$
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.32 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

بتعويض هذه المصفوفات ، ومع $\mathbf{C}_0 = [0, M]^T$ في جدول ٤ − ١ نحصل على الجدول صفر. وحيث إن الصف الأسفل يحتوي على M نطبق التغيير الأول ، فيكون الجدول ١ الناتج هو الجدول الأوّليّ لطريقة المرحلتين .

		x_1 80	x_2 60	x_3 0	x_4 M	
x_3	0	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4	M	1	1	0	1	1
		$80-M$	$60-M$	0	0	$-M$

جدول صفر

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0.20	0.32	1	0	0.25
x_4	1*	1	0	1	1
$(c_j - z_j)$:	80	60	0	0	0
	−1	−1	0	0	−1

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	0.12*	1	0.05
x_1	1	1	0	1
	0	−20	0	−80
	0	0	0	0

جدول ٢

باستخدام الخطوة الأولى لطريقة السمبلكس والتغيير الثانى نجد أن أعلى عنصر سالب فى الصف الأخير من الجدول الأوّلىّ (باستثناء العمود الأخير) هو -1 والذى يظهر مرتين . وباختيار العمود x_1 كعمود عمل ، نكون النسب $0.25/0.20 = 1.25$ و $1/1 = 1$. وحيث إن العنصر 1 الموضح بنجمة فى الجدول الأول يؤدى إلى أصغر نسبة ، فيصبح هو المحور ، ثم بتطبيق الخطوات ٣ ، ٤ والتغيير ٣ على الجدول ١ يمكن استنتاج الجدول 2 . لاحظ أن x_1 تحل محل المتغير الصناعى x_4 فى العمود الأول لجدول ٢ ، لذلك فإن كل عمود x_4 غير موجود فى الجدول ٢ . والآن ، بدون متغيرات صناعية فى العمود الأوّلىّ ، وبتنفيذ التغيير الثالث يجب أن يكون كل الصف الأخير فى الجدول صفرياً ، أى أنه بالتغيير الرابع يمكن حذف هذا الصف ، ويتبقى

$$0 \quad -20 \quad 0 \quad -80$$

ممثلًا الصف الأخير الجديد فى الجدول ٢ .

بتكرار الخطوات من ١ إلى ٤ نجد أن العمود x_2 هو عمود العمل الجديد (مع تذكر أن العنصر فى الصف الأخير قد استثنى فى الخطوة ١) ، ويكون العنصر الموضح بنجمة فى الجدول ٢ هو المحور الجديد ، وتؤدى العمليات الأولية للصف إلى الجدول ٣ ، وفيه قُرِّبت كل الحسابات إلى أربعة أرقام . وحيث لا يحتوى الصف الأخير فى الجدول ٣ ـــ باستثناء العمود الأخير ـــ على أى عناصر سلبية ، فإنه ينتج من الخطوة ٦ $x_1^* = 0.5833,\ x_2^* = 0.4167,\ x_3^* = x_4^* = 0$ عند $z^* = 71.67$ (قارن بالمسألة ١ − ٢) .

	x_1	x_2	x_3	
x_2	0	1	8.333	0.4167
x_1	1	0	−8.333	0.5833
	0	0	166.7	−71.67

جدول ٣

٤ − ٣

تعظيم : $z = 5x_1 + 2x_2$

علماً بأن : $6x_1 + x_2 \geq 6$

$4x_1 + 3x_2 \geq 12$

$x_1 + 2x_2 \geq 4$

كل المتغيرات لا سلبية

يوضع هذا البرنامج فى الصيغة القياسية بإدخال المتغيرات الزائدة x_3, x_4, x_5 على التوالى فى متباينات القيود ، ثم المتغيرات الصناعية x_6, x_7, x_8 على التوالى فى المعادلات الناتجة ، ثم بتطبيق طريقة المرحلتين ، وتقريب كل الحسابات إلى أربعة أرقام ، نستنتج تتابعياً الجداول التالية ، وفيها يوضح عنصر المحور بنجمة .

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
		5	2	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	
x_6	$-M$	6*	1	−1	0	0	1	0	0	6
x_7	$-M$	4	3	0	−1	0	0	1	0	12
x_8	$-M$	1	2	0	0	−1	0	0	1	4
$(z_j - c_j)$:		−5	−2	0	0	0	0	0	0	0
		−11	−6	1	1	1	0	0	0	−22

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	
x_1	1	0.1667	−0.1667	0	0	0	0	1
x_7	0	2.333	0.6668	−1	0	1	0	8
x_8	0	1.833*	0.1667	0	−1	0	1	3
	0	−1.167	−0.8335	0	0	0	0	5
	0	−4.166	−0.8337	1	1	0	0	−11

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	
x_1	1	0	−0.1819	0	0.09095	0	0.7271
x_7	0	0	0.4546	−1	1.273*	1	4.181
x_2	0	1	0.09094	0	−0.5456	0	1.637
	0	0	−0.7274	0	−0.6367	0	6.910
	0	0	−0.4548	1	−1.273	0	−4.180

جدول ٣

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	−0.2144	0.07144*	0	0.4284
x_5	0	1	0.3571	−0.7855	1	3.284
x_2	0	1	0.2858	−0.4286	0	3.429
	0	0	−0.5000	−0.5001	0	9.001
	0	0	−0.0002	0.0001	0	0.0005

جدول ٤

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	14.00	0	−3.001	1	0	6.000
x_5	11.00	0	−2.000	0	[illegible]	7.997
x_2	6.000	1	−1.000	0	0	6.001
	7.001	0	−2.001	0	0	12.00

جدول ٥

والجدول ٤ هو أول جدول لا يحوى متغيرات صناعية فى عموده الأول ، ومن ثم ، بتنفيذ التغيير الثالث ، يجب أن يكون الصف الأخير فى الجدول صفرياً . وبالتقريب الخطأ صفرياً ، يمكن حذفه من الجدول ، ومع ذلك فإن جدول ٥ يمثل مسألة لا يمكن تجاهلها ، وهى أن عمود العمل هو العمود x_3 ، وكل العناصر فى هذا العمود سلبية ! وينتج من الخطوة ٢ أن البرنامج الأصلى ليس له حل . (من السهل التوضيح بالرسم أن المنطقة الممكنة محددة ، وأن الدالة الهدفية يمكن جعلها كبيرة اختيارياً ، وذلك باختيار نقط ذات إحداثيات كبيرة) .

٤ - ٤

تعظيم : $z = 2x_1 + 3x_2$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 \leqq 2$

$6x_1 + 4x_2 \geqq 24$

كل المتغيرات لا سلبية

يوضع هذا البرنامج فى الصيغة القياسية بإدخال متغير زائد x_3 فى القيد الأول ، وكذلك متغير زائد x_4 ، ومتغير صناعى x_5 فى القيد الثانى ؛ فيصبح الجدول ٤ - ١ بالتغيير الأول ، جدول ١

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		2	3	0	0	$-M$	
x_3	0	1*	2	1	0	0	2
x_5	$-M$	6	4	0	-1	1	24
$(z_j - c_j)$:		-2	-3	0	0	0	0
		-6	-4	0	1	0	-24

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	2	1	0	0	2
x_5	0	-8	-6	-1	1	12
	0	1	2	0	0	4
	0	8	6	1	0	-12

جدول ٢

بتطبيق طريقة المرحلتين على الجدول ١ (عنصر المحور موضح بنجمة) يمكن إيجاد الجدول ٢ . ولا توجد مدخلات سلبية فى الصف قبل الأخير من الجدول ٢ ، ولا توجد مدخلات سلبية فى الصف قبل الأخير موضوعه أعلى من صفر فى الصف الأخير . لذلك فإن طريقة المرحلتين تدل على الوصول إلى الحل الأمثل ، ولكن المتغير الصناعى غير الصفرى x_5 مازال أساسياً ! وبالتغيير الخامس فإن البرنامج الأصلى ليس له حل . (فى هذه الحالة $\mathscr{S}$ تكون فارغة ، حيث لا يمكن تحقيق متباينات القيود وشروط اللاسلبية آنياً) .

٤ - ٥

تعظيم : $z = -x_5$

علماً بأن : $3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 - x_5 \leqq 0$

$-4x_1 + 2x_2 - x_3 - 8x_4 - x_5 \leqq 0$

$-3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 \leqq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 1$

$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leqq -1$

x_1, x_2, x_3, x_4 لا سلبية

حيث إن x_5 غير مقيدة ، فإننا نضع $x_5 = x_6 - x_7$ ، حيث إن كلاً من x_6 و x_7 غير سلبيين ، وباقى المتغيرات لا سلبية ، بضرب القيد الأخير فى -1 نحصل على طرف أيمن موجب ، ويمكن فى النهاية تحقيق الصيغة القياسية بإضافة متغيرات مساعدة x_8 حتى x_{11} على التوالى إلى الأطراف اليسرى للقيود الأربعة الأولى . وبطرح المتغير الزائد x_{12} ، وإضافة متغير صناعى x_{13} إلى الطرف الأيسر للقيد الأخير . ويمثل الجدول ١ الجدول الأولىّ لطريقة المرحلتين ، ومنه نشتق الجداول ٢ ، ٣ ، . . ٦ من الجدول ٣ يكون الصف الأسفل دائماً لا سلبياً . وتقيد الخطوة الأولى فى طريقة السمبلكس بالنسبة للعناصر فى الصف قبل الأخير ، والموضوعة أعلى من الصفر فى الصف الأخير من الجدول ٦ .

$x_1^* = 0 \qquad x_2^* = 0.11667 \qquad x_3^* = 0.7 \qquad x_4^* = 0.18333 \qquad x_5^* = x_6^* - x_7^* = -1.93334$

$z^* = 1.93334.$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
		0	0	0	0	−1	1	0	0	0	0	0	$-M$	
x_8	0	3*	−2	−4	6	−1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_9	0	−4	2	−1	−8	−1	1	0	1	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	−3	−2	−1	−1	1	0	0	1	0	0	0	0
x_{11}	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{13}	$-M$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	−1	1	1
$(z_j - c_j)$:		0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0
		−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	1	0	−1

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_1	1	−0.666667	−1.33333	2	−0.333333	0.333333	0.333333	0	0	0	0	0	0
x_9	0	−0.666668	−6.33332	0	−2.333333	2.33333	1.33333	1	0	0	0	0	0
x_{10}	0	−3	−2	−1	−1	1	0	0	1	0	0	0	0
x_{11}	0	1.66667	2.33333*	−1	0.333333	−0.333333	−0.333333	0	0	1	0	0	1
x_{13}	0	1.66667	2.33333	−1	0.333333	−0.333333	−0.333333	0	0	0	−1	1	1
	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0
	0	−1.666667	−2.33333	1	−0.333333	0.333333	0.333333	0	0	0	1	0	−1

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_1	1	0.285715	0	1.42857	−0.142857	0.142857	0.142857	0	0	0.571428	0	0	0.571428
x_9	0	3.85715	0	−2.71428	−1.42857	1.42857	0.428571	1	0	2.71427	0	0	2.71427
x_{10}	0	−1.57142	0	−1.85714	−0.714286	0.714286*	−0.285714	0	1	0.857144	0	0	0.857144
x_3	0	0.714288	1	−0.428572	0.142857	−0.142857	−0.142857	0	0	0.428572	0	0	0.428572
x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	1	0
	0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

جدول ٣

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
x_4	0.583333	0	0	1	0	0	0.0666667	−0.05	−0.0166668	0.183333	0	0	0.183333
x_2	−0.0833332	1	0	0	0	0	0.133333	0.15	−0.283333	0.116667	0	0	0.116667
x_7	1.33333	0	0	0	−1	1	0.0666671	0.20	0.733334	1.93334	0	0	1.93334
x_3	0.499999	0	1	0	0	0	−0.200000	−0.10	0.300000	0.700000	0	0	0.700000
x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	1	0
	1.33333	0	0	0	0	0	0.0666659	0.20	0.733333	1.93334	0	0	1.93334
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

جدول ٦

٤ - ٦ حل البرنامج التالى باستخدام طريقة السمبلكس بدون أى تعديلات (هذه الطريقة تعرف باسم طريقة M الكبيرة) ؟ وبين كيف يؤثر التقريب على الإجابة ؟

تعظيم : $z = -8x_1 + 3x_2 - 6x_3$

علماً بأن : $x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$

$5x_1 + 3x_2 - 4x_3 \geq 6$

كل المتغيرات لا سلبية

يوضع هذا البرنامج فى الصيغة القياسية بإدخال متغير زائد x_4 فى متباينة القيد ومتغيرات صناعية x_5 ، x_6 فى متساويات القيود . والتعويض بالمعاملات المناسبة فى جدول ٤ – ١ ، وتطبيق طريقة السمبلكس مباشرة ، وتقريب كل الحسابات إلى أربعة أرقام ، وبتوضيح عناصر المحور بنجوم ، نستنتج الجداول التالية ١ حتى ٤ :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	-8	3	-6	0	$-M$	$-M$	
x_5 $-M$	1	-3	5	0	1	0	4
x_6 $-M$	5*	3	-4	-1	0	1	6
$(z_j - c_j)$:	$-6M+8$	-3	$-M+6$	M	0	0	$-10M$

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	-3.6	5.8*	0.2	1	-0.2	2.8
x_1	1	0.6	-0.8	-0.2	0	0.2	1.2
	0	$3.6M-7.8$	$-5.8M+12.4$	$-0.2M+1.6$	0	$1.2M-1.6$	$-2.8M-9.6$

جدول ٢

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	-0.6207	1	0.03448	0.1724	-0.03448	0.4828
x_1	1	0.1034*	0	-0.1724	0.1379	0.1724	1.586
	0	-0.1033	0	1.172	$M-2.138$	$M-1.172$	-15.59

جدول ٣

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	6.003	0	1	-10.00	1.000	10.00	10.00
x_2	9.671	1	0	-1.667	1.334	1.667	15.34
	0.9990	0	0	0.9998	$M-2$	$M-0.9998$	-14.01

جدول ٤

حيث إن M تمثل رقماً موجباً كبيراً ، فإن كل العناصر المدخلة فى الصف الأخير من الجدول ٤ ، باستثناء المدخلات فى العمود الأخير ، تكون غير سلبية . ولذلك فإن الحل الأمثل يمكن قراءته مباشرة من الجدول بالآتى $x_3^* = 10.00,\ x_2^* = 15.34$ ، وكل المتغيرات الأخرى تكون صفرية ، $z^* = -14.01$.

يمكن ترك قيمة M فى الحسابات السابقة كحرف وذلك فى حالة الحسابات اليدوية . وفى حالة استخدام الحاسب ، فإنه يتم التعويض بقيمة كبيرة عن M مثلاً $M = 10\,000$. وبافتراض أن كل الأرقام مقربة إلى ٤ أرقام يصبح العمود الأخير فى الجدول :

$$-60\,000 \quad -3 \quad -10\,000 \quad 10\,000 \quad 0 \quad 0 \quad -100\,000$$

لاحظ أن الثوابت المضافة 8+ فى المدخل الأول ، و 6+ فى المدخل الثالث قد اختفت فى عملية التقريب ، ويصبح الصف الأسفل فى الجدول ٢ هو :

$$0 \quad 36\,000 \quad -58\,000 \quad -2\,000 \quad 12\,000 \quad -28\,000$$

بينما الصف الأسفل فى الجدول ٣ يكون :

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10\,000 \quad 10\,000 \quad 0$$

والذى يدل على الأمثلية ! ويمكن قراءة الحل الأمثل من الجدول ٣ : $x_3^* = 0.4828,\ x_1^* = 1.586$ وباقى المتغيرات تكون صفرية ، وأيضاً $z^* = 0$.

ولا تحدث مشكلة التقريب هذه فى طريقة المرحلتين ، حيث إن الحدود التى لا تحتوى على M تكون منفصلة من تلك التى تحتوى عليها ، مما يجعل من المستحيل للحدود التى بها M أن تغمر الآخرين .

٤ - ٧ حل المسألة ١ - ٧

باستخدام البرنامج الرياضى المُعَرّف فى (١٢) فى المسألة ١ - ٧ ندخل متغيرات مساعدة x_5 حتى x_{12} كل منها فى إحدى معادلات القيود ، ومتغيرين صناعيين x_{13} ، x_{14} كل منهما فى الصفين الأخيرين للقيود . وبإدخال المعاملات المناسبة فى الجدول ٤ - ١ ، واستخدام التغيير الأول نحصل على الجدول ١ ، ثم بتطبيق طريقة المرحلتين نستخرج الجداول من ٢ حتى ٥ . ويمكن قراءة الحل الأمثل مباشرة من الجدول ٥ .

$x_1^* = 37\,727.3$ برميلا

$x_4^* = 2727.3$ برميلا

$x_3^* = 2272.7$ برميلا

$x_2^* = 12\,272.7$ برميلا

$z^* = \$125\,000$

وفى ظل هذا الجدول الأمثل للإنتاج تنتج شركة أزتك $x_1^* + x_2^* = 50\,000$ برميلًا من الزيت العادى له ضغط بخار 22.5 ، ورقم أكتين 89.7 ، وتنتج أيضاً $x_3^* + x_4^* = 5000$ برميلًا من الممتاز له ضغط بخار 19.5 ، ورقم أكتين 93.0. لذلك ستنتج الكميات المطلوبة بالضبط لمواجهة الحد الأدنى من الاحتياجات بدون زيادة . ولتحقيق ذلك .. ستستخدم أزتك $x_1^* + x_3^* = 40\,000$ برميلًا من مخازنها (كل ما تملك) ، وكذلك $x_2^* + x_4^* = 15\,000$ برميلًا من المستودعات الأجنبية .

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
		4	−3	6	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_5	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20 000
x_7	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	60 000
x_9	0	1	−10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	6	−5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{11}	0	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	0	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{15}	$-M$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	0	50 000
x_{16}	$-M$	0	0	1	1°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	5 000
$(z_j - c_j)$:		−4	3	−6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	−55 000

جدول ١

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	
x_5	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100 000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15 000
x_7	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	40 000
x_8	0	1	−1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	55 000
x_9	1	−10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	−5	0	25 000
x_{11}	2	−8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{12}	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−8	0	40 000
x_{15}	1	1°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	1	50 000
x_4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	5 000
	−4	3	−7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	−5 000
	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−50 000

جدول ٢

....

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	50 000
x_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	15 000
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	−0.0909	0	0	0	0.4545	37 727.3
x_8	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	45 000
x_9	0	0	0	0	0	0	−11	0	1	1	0	0	−10	−5	85 000
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.0909	0	0	0	−0.4545	2 272.7
x_{11}	0	0	0	0	0	0	−10	0	0	0.9091	1	0	−8	−4.5455	22 727.2
x_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−0.9091	0	1	0	−3.4545	17 272.7
x_2	0	1	0	0	0	0	−1	0	0	0.0909	0	0	−1	−0.4545	12 272.7
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	−0.0909	0	0	0	−0.5455	2 727.3
	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	3	1	125 000

جدول ٥

٤ – ٨ بين مدى صحة طريقة السمبلكس فى حل ٤ ــ ٢ جبرياً ؟

البرنامج فى الصورة القياسية هو :

$$
\begin{aligned}
&\text{تعظيم :} && z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 + Mx_4 \\
&\text{علماً بأن :} && 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 \quad = 0.25 \qquad (١)\\
& && x_1 + \quad x_2 \quad + x_4 = \ 1
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لا سلبية

بتطبيق النظرية المقدمة فى الفصل الثالث على هذا النموذج ، فإن $n = 4$ (المتغيرات) ، و $m = 2$ (معادلات القيود) ، بحيث إن النقط الطرفية للمنطقة الممكنة $\mathscr{S}$ يجب أن تكون لها $n - m = 2$ عناصر صفرية . وحيث إن الحد الأدنى يجب أن يحدث عند إحدى النقط الطرفية، فهذه هى الاعتبارات الوحيدة الممكن أخذها فى الاعتبار .

كحل أوّلىّ بالنقطة الطرفية للنموذج (١) هو : $x_1 = x_2 = 0,$ ، $x_3 = 0.25$ ، $x_4 = 1$ نحدد ما إذا كان هذا الحل يمكن تحسينه بكتابة الدالة الهدفية منفردة بدلالة المتغيرات الصفرية ، وهما x_1 ، x_2 . (يمكن بالتأكيد حل معادلات القيود فى x_3 ، x_4 بدلالة x_1 ، x_2 ، وذلك لأن حل النقطة الطرفية هو حل أساسى ممكن) . بحل معادلة القيد الثانى فى x_4 ، والتعويض فى الدالة الهدفية ، نحصل على :

$$z = (80 - M)x_1 + (60 - M)x_2 + M \qquad (٢)$$

بمقارنة النموذج (١) بالجدول صفر فى المسألة ٤ ــ ٢ ، وبملاحظة كيف تعطى (٢) بالصف الأسفل من الجدول .

فى الحل الحالى $x_1 = x_2 = 0$ ، ومن (٢) $z = M$ يمكن اختصار الدالة الهدفية إذا كانت x_2 ، أو x_1 من الممكن أن تكون موجبة ، نختار x_1 . ولذلك فإن القيد (١) يحدد أن x_1 ليست أكبر من $0.25/0.20 = 1.25$ وحدات ، وذلك إذا ظلت المتغيرات الباقية لا صفرية ، بينما يحدد القيد الثانى أن x_1 ليست أكبر من واحد ، وذلك لنفس السبب . ولما كان القيدان يجب أن يتحققا ، فإن x_1 يجب ألا تزيد عن الواحد . بوضع $x_1 = 1$ كنتيجة $x_2 = x_4 = 0$ ، فإننا نحصل من معادلات القيد على $x_3 = 0.05$. وتُكَوِّن هذه القيم حل النقط الطرفية (الأساسى) للبرنامج .

يدخل المتغير الصناعى x_4 مبدئياً فقط للحصول على الحل الأول . وفى النهاية يصل هذا المتغير إلى الصفر . وحيث إن لدينا الآن حلاً للبرنامج باستخدام $x_4 = 0$ ، فإننا يمكن أن نحذفه من أى اعتبار ، ونتمسك بالبرنامج :

$$
\begin{aligned}
&\text{تصغير :} && z = 80x_1 + 60x_2 + 0x_3 && (٣)\\
&\text{علماً بأن :} && 0.20x_1 + 0.32x_2 + x_3 = 0.25 && (٤)\\
& && x_1 + \quad x_2 \quad = \ 1 && (٥)
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لا سلبية

وفيه حل النقط الطرفية ــ $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.05$ ــ معروفه ، لاحظ أن هذا الحل فيه $n = 3$ متغيرات ، $m = 2$ معادلة قيود ، لذلك فإن النقط الطرفية يجب أن تحتوى على الأقل على $3 - 2 = 1$ متغيرات صفرية .

لتحديد ما إذا كان الحل الابتدائى للبرنامج الجديد يمكن أن يُحسن ، نحل المعادله (٥) ــ المعادلة التى حددت x_1 ــ بالنسبة لـ x_1 ، ونعوض بالنتيجة فى (٣) ، (٤) ؛ فيصبح البرنامج :

$$
\begin{aligned}
&\text{تصغير :} && z = 0x_1 - 20x_2 + 0x_3 + 80 && (٦)\\
&\text{علماً بأن :} && 0.12x_2 + x_3 = 0.05 && (٧)\\
& && x_1 + \quad x_2 \quad = \ 1 && (٨)
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لا سلبية

قارن هذا البرنامج بالجدول ٢ فى المسألة (٤ ـــ٢)

فى الحل الحالى $x_2 = 0$ ، وينتج أيضاً من (٦) أن $z = 80$. من هذه المعادلة يتضح أن z تنقص إذا زادت x_2 . ويحدد القيد (٧) x_2 بالقيمة بين $0.05/0.12 = 5/12$ إذا بقيت المتغيرات الأخرى لا سلبية ، بينما تحدد (٨) قيمة x_2 بالواحد . ولما كان كلا القيدين يجب أن يتحققا ، فإن x_2 لا يمكن زيادتها عن $5/12$ ، وذلك يجعل $x_3 = 0$. نجد من (٨) أن $x_1 = 7/12$. وهذا هو حل النقطة الطرفية الجديد للبرنامج .

ولتحديد ما إذا كان من الممكن تحسين هذا الحل ، نحل المعادلة (٧) ـــ المعادلة التى حددت قيمة x_2 ـــ بالنسبة لـ x_2 ، ونعوض بالنتيجة فى (٦) ، (٨) ؛ فيصبح البرنامج :

تصغير : $z = 0x_1 + 0x_2 + 166.7x_3 + 71.67$ (٩)

علماً بأن : $x_2 + 8.333x_3 = 0.4167$ (١٠)

$x_1 \quad - 8.333x_3 = 0.5833$ (١١)

كل المتغيرات لا سلبية

المعادلة (١٠) هى نفسها (٧) مقسومة على 0.12 . قارن صيغة هذا البرنامج بالجدول ٣ فى المسألة ٤ ـــ ٢ .

فى الحل الحالى $x_3 = 0$ ، لذلك ينتج من (٩) أن $z = 71.67$. كما ينتج من (٩) أيضاً أن أى قيمة موجبة لـ x_3 سوف تنقص قيمة z عن هذه القيمة . وفى الحقيقة ، فإن أى تخصيص لقيمة x_3 سوف يزيد قيمة z ، لذلك فإن الحل الحالى هو الحل الأمثل .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

استخدم طريقة السمبلكس أو طريقة المرحلتين لحل المسائل التالية :

٤ - ٩

تعظيم : $z = x_1 + x_2$

علماً بأن : $x_1 + 5x_2 \leq 5$

$2x_1 + x_2 \leq 4$

x_1, x_2 لا سلبية

٤ - ١٠

تعظيم : $z = 3x_1 + 4x_2$

علماً بأن : $2x_1 + x_2 \leq 6$

$2x_1 + 3x_2 \leq 9$

x_1, x_2 لا سلبية

٤ - ١١

تصغير : $z = x_1 + 2x_2$

علماً بأن : $x_1 + 3x_2 \geq 11$

$2x_1 + x_2 \geq 9$

x_1, x_2 لا سلبية

٤ - ١٢

تعظيم : $z = -x_1 - x_2$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 \geq 5\,000$

$5x_1 + 3x_2 \geq 12\,000$

x_1, x_2 لا سلبية

٤ - ١٣

تعظيم : $z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$

علماً بأن : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$

كل المتغيرات لا سلبية

٤ - ١٤

تصغير : $z = 14x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 13x_5 + 12x_6$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1200\\
x_4 + x_5 + x_6 &= 1000\\
x_1 \qquad\quad + x_4 \qquad\qquad &= 1000\\
x_2 \qquad\quad + x_5 \qquad &= 700\\
x_3 \qquad\quad + x_6 &= 500
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لا سلبية

٤ - ١٥ مسألة ٢ - ٨

٤ - ١٦ مسألة ٢ - ١٠

٤ - ١٧ مسألة ٢ - ٩

٤ - ١٨ مسألة ٢ - ١١

٤ - ١٩ مسألة ٢ - ١٣

٤ – ٢٠   مسألة ١ – ٧ ولكن الزيت المخزون ٨٠,٠٠٠ برميل ، والزيوت الأخرى ٢٠,٠٠٠
٤ – ٢١   مسألة ١ – ١٧
٤ – ٢٢   مسألة ١ – ١٨
٤ – ٢٣   مسألة ١ – ١٩
٤ – ٢٤   مسألة ١ – ٢٢

البرمجة الخطية : الازدواجية

Linear Programming: Duality

يرتبط كل برنامج خطى فى المتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ببرنامج خطى آخر فى المتغيرات $w_1, w_2, \ldots, w_m$ (حيث إن m هى عدد القيود فى البرنامج الأصلى) يعرف « بازدواج » البرنامج . والبرنامج الأصلى يسمى الأوْلِىّ ، ويحدد تماما شكل ازدواجه .

الازدواجات المتماثلة SYMMETRIC DUALS

ازدواج برنامج خطى (أوّلىّ) فى صيغة المصفوفات (غير القياسية)

$$z = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \quad : \text{تصغير}$$
$$\mathbf{AX} \geq \mathbf{B} \quad : \text{علماً بأن}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \quad : \text{حيث} \qquad (٥ - ١)$$

فى البرنامج الخطى

$$z = \mathbf{B}^T\mathbf{W} \quad : \text{تعظيم}$$
$$\mathbf{A}^T\mathbf{W} \leq \mathbf{C} \quad : \text{علماً بأن}$$
$$\mathbf{W} \geq \mathbf{0} \quad : \text{حيث} \qquad (٥ - ٢)$$

وبالعكس ، فإن ازدواج برنامج (٥ - ٢) هو البرنامج (٥ - ١) .

البرنامجان (٥ - ١) ، (٥ - ٢) يكونان متماثلين ، وكلاهما يحتوى على متغيرات لا سلبية ومتباينات قيود ، ويعرفان بأنهما الازدواجات المتماثلة لكل منهما . ويطلق أحياناً على متغيرات الازدواج $w_1, w_2, \ldots, w_m$ تكلفة الظل .

حلول الازدواج DUAL SOLUTIONS

نظرية ٥ - ١ (**نظرية الازدواجية** ***Duality Theorem***) : إذا وجد حل أمثل للبرنامج الأول أو برنامج الازدواج ، فإن البرنامج الآخر يكون له أيضاً حل أمثل ، ويكون لدالتى الهدف نفس الحل الأمثل .

فى هذه الحالات يوجد الحل الأمثل للازدواج الأول فى الصف الأخير من جدول السمبلكس النهائى للازدواج الثانى ، وذلك فى الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات الزائدة أو المساعدة (انظر مسألة ٥ - ٣) . وحيث إن حل البرنامجين يمكن الحصول عليه من حل أحدهما ، فإنه من الأسهل حسابياً حل الازدواج ، بدلاً من البرنامج نفسه (انظر المسألة ٥ - ٤)

نظرية ٥ – ٢ (مبدأ المساعدة المكملة *Complementary Slackness Principle*) : لما كان للازدواجين المتماثلين حلول مثلى ، فإن القيد رقم k فى أى نموذج يمثل متباينة ـــ بمعنى أن المتغير الزائد أو المساعد يكون موجباً ـــ ويكون العنصر رقم k فى الحل الأمثل فى الازدواج المماثل مساوياً للصفر .

انظر المسألتين (٥ – ١١ ، ٥ – ١٢)

الازدواجات غير المتماثلة UNSYMMETRIC DUALS

فى حالة البرامج الأولية فى الصيغة القياسية يمكن تعريف الازدواجات كما يلى :

	الأولى		الازدواج
(٥ – ٣)	تصغير : $z = C^T X$ علماً بأن : $AX = B$ حيث : $X \geq 0$	(٥ – ٤)	تعظيم : $z = B^T W$ علماً بأن : $A^T W \leq C$
(٥ – ٥)	تعظيم : $z = C^T X$ علماً بأن : $AX = B$ حيث : $X \geq 0$	(٥ – ٦)	تصغير : $z = B^T W$ علماً بأن : $A^T W \geq C$

(انظر المسائل ٥ – ٥ ، ٥ – ٦) . وبالعكس .. فإنه يمكن تعريف ازدواجات البرنامجين (٥ – ٤) ، و (٥ – ٦) بأنهما البرنامجان (٥ – ٣) ، (٥ – ٥) على التوالى . وحيث إن إزدواج أى برنامج فى الصيغة القياسية لا يكون ـــ فى حد ذاته ـــ فى صيغة قياسية ، فتكون هذه الازدواجات غير متماثلة . وتكون هذه الصيغ متسقة مع ، وتابعة مباشرة لتعريف الازدواجات المتماثلة (انظر المسألة ٥ – ٨) .

تتحقق أيضا النظرية ٥ – ١ للازدواجات غير المتماثلة تتحقق أيضاً . ومع ذلك .. لا يكون حل أى ازدواج غير متماثل ، عامة ، ظاهرة مباشرة من حل البرنامج الأول ، وتكون العلاقة :

$$W^{*T} = C_0^T A_0^{-1} \quad \text{or} \quad W^* = (A_0^T)^{-1} C_0 \qquad (٥ – ٧)$$

$$X^{*T} = B_0^T (A_0^T)^{-1} \quad \text{or} \quad X^* = A_0^{-1} B_0 \qquad (٥ – ٨)$$

فى (٥ – ٧) ، A_0 , C_0 تتكونا من عناصر A , C فى برنامجيهما (٥ – ٣) أو (٥ – ٥) ، ويتبع هذا للمتغيرات الأساسية فى X^* ، فى (٥ – ٨) ، A_0 , B_0 تتكونا من عناصر A , B فى برنامجيهما (٥ – ٤) أو (٥ – ٦) ، ويتبع هذا للمتغيرات الأساسية W^* (انظر المسألة ٥ – ٧) .

مسائل محلولة

Solved Problems

٥ – ١ حدد الازدواج المتماثل للبرنامج

تصغير : $z = 5x_1 + 2x_2 + x_3$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 20 \\
6x_1 + 8x_2 + 5x_3 &\geq 30 \\
7x_1 + x_2 + 3x_3 &\geq 40 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 50
\end{aligned}
\qquad (١)
$$

كل المتغيرات لا سلبية

هذا البرنامج له صيغة (٥ − ١) ، وازدواجه من الصيغة (٥ − ٢) يمكن إيجاده بأخذ عكس الأمثل ، وتبادل $\mathbb{C}$, $\mathbb{B}$ ومقلوب $\mathbb{A}$ وعكس متباينات القيود :

تعظيم : $z = 20w_1 + 30w_2 + 40w_3 + 50w_4$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
2w_1 + 6w_2 + 7w_3 + w_4 &\leq 5 \\
3w_1 + 8w_2 + w_3 + 2w_4 &\leq 2 \\
w_1 + 5w_2 + 3w_3 + 4w_4 &\leq 1
\end{aligned}
\qquad (٢)
$$

كل المتغيرات لا سلبية

لاحظ أن البرنامج الأول (١) يحتوى على ثلاثة متغيرات وأربعة قيود ، بينما يحتوى ازدواجه (٢) على أربعة متغيرات وثلاثة قيود .

٥ − ٢ حدد الازدواج المتماثل فى البرنامج :

تعظيم : $z = 2x_1 + x_2$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\
x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\
2x_1 + 2x_2 &\leq 8
\end{aligned}
\qquad (١)
$$

كل المتغيرات لا سلبية

هذا البرنامج من الصيغة (٥ − ٢) بمتغيرات x تستبدل بالمتغيرات w . وبنفس خطوات المسألة (٥ − ١) ، نجد الازدواج (٥ − ١) بالمتغيرات w ، بدلاً من المتغيرات x .

تصغير : $z = 10w_1 + 6w_2 + 8w_3$

علماً بأن :

$$
\begin{aligned}
w_1 + w_2 + 2w_3 &\geq 2 \\
5w_1 + 3w_2 + 2w_3 &\geq 1
\end{aligned}
$$

كل المتغيرات لا سلبية

٥ − ٣ بين أن كلا من البرنامج الأوَّلىّ والازدواج فى المسألة (٥ − ٢) لهما نفس القيمة المثلى لـ z ، وأن حل كُلٍّ منهما يتواجد فى جدول السمبلكس الأخير كلٌّ للآخر .

بادخال المتغيرات المساعدة x_3, x_4, x_5 على التوالى فى متباينات القيود للبرنامج الأول (١) فى المسألة (٥ – ٢) ، وتطبيق طريقة السمبلكس على البرنامج الناتج ، فإننا نستنتج بالتتابع الجداول ١ ، ٢ .

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		2	1	0	0	0	
x_3	0	1	5	1	0	0	10
x_4	0	1	3	0	1	0	6
x_5	0	2*	2	0	0	1	8
$(z_j - c_j)$:		−2	−1	0	0	0	0

جدول ١

	x_1	x_2	x_3 (متغيرات مساعدة)	x_4	x_5	
x_3	0	4	1	0	−1/2	6
x_4	0	2	0	1	−1/2	2
x_1	1	1	0	0	1/2	4
	0	1	0	0	1	8

حل الازدواج

جدول ٢

يستنتج حل البرنامج الأول من الجدول ٢ : $x_1^* = 4,\ x_2^* = 0,\quad z^* = 8.$ ويوجد حل الازدواج فى الصف الأخير من الجدول فى الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات المساعدة للحل الأمثل . وهنا $w_1^* = 0,\ w_2^* = 0,\quad w_3^* = 1$.

ويمكن حل الازدواج مباشرة بإدخال متغيرات زائدة w_4 و w_5 ومتغيرات صناعية w_6 و w_7 للبرنامج (٢) فى المسألة (٥ – ٢) ، وتطبيق طريقة المرحلتين التى تنتج الجداول ١َ ،...، ٤َ .

		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	
		10	6	8	0	0	M	M	
w_6	M	1	1	2	−1	0	1	0	2
w_7	M	5*	3	2	0	−1	0	1	1
$(c_j - z_j)$:		10	6	8	0	0	0	0	0
		−6	−4	−4	1	1	0	0	−3

جدول ١َ

	w_1	w_2	w_3	w_4 (متغيرات زائدة)	w_5	
w_5	−4	−5	0	−1	1	1
w_3	1/2	1/2	1	−1/2	0	1
	6	2	0	4	0	−8

حل البرنامج الأوّلىّ

جدول ٤َ

يمكن قراءة حل الازدواج من الجدول ٤َ كالتالى : $w_1^* = w_2^* = 0,\ w_3^* = 1$ ، حيث $z^* = -(-8) = 8$ ، ويوجد حل البرنامج الأوّلىّ فى الصف الأخير من هذا الجدول فى الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات الزائدة . وهونفسه الحل السابق .

٥ – ٤

تصغير : $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

علماً بأن :

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 &\geq 7\\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\quad &\geq 20\\
x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad &\geq 14\\
x_3 + x_4 \qquad\quad &\geq 20\\
x_4 + x_5 \quad &\geq 10\\
x_5 + x_6 &\geq 5
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

لحل هذا البرنامج مباشرة يتطلب إدخال ١٢ متغيراً جديداً ستة منهم زائدة ، وستة صناعية . وتطبيق طريقة المرحلتين . وكمدخل أسهل ، فإننا نعتبر الازدواج :

تعظيم : $z = 7w_1 + 20w_2 + 14w_3 + 20w_4 + 10w_5 + 5w_6$

علماً بأن :

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 &\le 1 \\
w_2 + w_3 &\le 1 \\
w_3 + w_4 &\le 1 \\
w_4 + w_5 &\le 1 \\
w_5 + w_6 &\le 1 \\
w_1 \qquad\qquad + w_6 &\le 1
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	
		7	20	14	20	10	5	0	0	0	0	0	0	
w_7	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
w_8	0	0	1*	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
w_9	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
w_{10}	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
w_{11}	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
w_{12}	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
$(z_j - c_j)$:		−7	−20	−14	−20	−10	−5	0	0	0	0	0	0	0

جدول ١

. . . .

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7 (متغيرات مساعدة)	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	
w_1	1	0	−1	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0
w_2	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
w_9	0	0	1	0	−1	0	0	0	1	−1	0	0	0
w_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
w_{11}	0	0	−1	0	1	0	1	−1	0	0	1	−1	0
w_6	0	0	1	0	0	1	−1	1	0	0	0	1	1
	0	0	4	0	10	0	2	18	0	20	0	5	45

حل البرنامج الأولى

جدول ٥

يوضع هذا النموذج فى الصيغة القياسية بإدخال ستة متغيرات جديدة كلها مساعدة . وبتطبيق طريقة السمبلكس نحصل على التوالى على الجداول . يعطى الجدول ٥ الحل الأمثل للازدواج ، وبالتالى فإن الحل الأمثل للبرنامج الأولى يتواجد فى الصف الأخير من هذا الجدول فى الأعمدة المرتبطة بالمتغيرات المساعدة . وبالتحديد $x_1^* = 2,\ x_2^* = 18,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 20,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 5,$ عند $z^* = 45$.

٥ – ٥ حدد ازدواج البرنامج

$$z = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$4x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 25 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$7x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 30$$

كل المتغيرات لا سلبية

هذا البرنامج من الصيغة (٥ — ٥) ، ويعطى ازدواجه غير المتماثل فى (٥ — ٦) كما يلى :

$$z = 25w_1 + 30w_2 \quad : \quad \text{تصغير}$$

$$4w_1 + 7w_2 \geq 1 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$8w_1 + 5w_2 \geq 3$$

$$6w_1 + 9w_2 \geq -2$$

٥ - ٦ حدد ازدواج البرنامج

$$z = 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6 \quad : \quad \text{تصغير}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad = 7 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + 3x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 = 8$$

كل المتغيرات لا سلبية

ولما كان هذا البرنامج من الصيغة (٥ — ٣) ، فإن ازدواجه غير المتماثل يعطى (٥ — ٤) كما يلى :

$$z = 7w_1 + 8w_2 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$w_1 + 2w_2 \leq 3 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$w_1 + 3w_2 \leq 1$$

$$-w_1 \quad \leq 0$$

$$-w_2 \leq 0$$

$$w_1 \quad \leq M$$

$$w_2 \leq M$$

ولأن القيدين الثالث والرابع متكافئان $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$ ، ولأن القيدين الخامس السادس يتطلبان أن تكون المتغيرا محددة

(هذا الشرط مفترض مسبقاً) ، فإن برنامج الازدواج يمكن تبسيطه إلى :

$$z = 7w_1 + 8w_2 \quad : \quad \text{تعظيم}$$

$$w_1 + 2w_2 \leq 3 \quad : \quad \text{علماً بأن}$$

$$w_1 + 3w_2 \leq 1$$

w_1 , w_2 لا سلبية

٥ - ٧ حقق (٥ ــ ٧) ، (٥ ــ ٨) لبراج المسألة (٥ ــ ٥) .

يمكن حل البرنامج الأوّلىّ باستخدام طريقة المرحلتين إذا أضيف المتغيران الصناعيان x_5, x_4 على التوالى إلى الأطراف اليسرى لمعادلات القيود . تنتج الجداول ١٠٠٠، ٤ .

		x_1 1	x_2 3	x_3 −2	x_4 −M	x_5 −M	
x_4	−M	4	8	6	1	0	25
x_5	−M	7	5	9*	0	1	30
$(z_j - c_j)$:		−1	−3	2	0	0	0
		−11	−13	−15	0	0	−55

جدول ١

. . . .

	x_1	x_2	x_3	
x_2	0	1	0.1668	1.528
x_1	1	0	1.167	3.193
	0	0	3.668	7.777

جدول ٤

يوضع الازدواج فى الصيغة القياسية فى المسألة ٢ ــ ٦ (بإحلال w's محل x's) ، وبتطبيق طريقة المرحلتين لهذا البرنامج نستنتج الجداول ١، . . . ، ٣ .

وينتج من جدول ٤ أن : $x_1^* = 3.193,\ x_2^* = 1.528,\ x_3^* = 0$ عند $z^* = 7.777$. وينتج من جدول ٣ أن

$$w_1^* = w_3^* - w_4^* = 0.4444 \qquad w_2^* = w_5^* - w_6^* = -0.1111$$

عند $z^* = -(-7.778) = 7.778$

لاحظ أن قيم الهدف للبرنامج الأوّلىّ والازدواج متماثلة ، ما عدا تقريب الخطأ .

		w_3 25	w_4 −25	w_5 30	w_6 −30	w_7 0	w_8 0	w_9 0	w_{10} M	w_{11} M	
w_{10}	M	4*	−4	7	−7	−1	0	0	1	0	1
w_{11}	M	8	−8	5	−5	0	−1	0	0	1	3
w_9	0	−6	6	−9	9	0	0	1	0	0	2
$(c_j - z_j)$:		25	−25	30	−30	0	0	0	0	0	0
		−12	12	−12	12	1	1	0	0	0	−4

جدول ١'

. . . .

	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	
w_3	1	1	0	0	0.1389	−0.1944	0	0.4444
w_6	0	0	−1	1	0.2222	−0.1111	0	0.1111
w_9	0	0	0	0	−1.167	−0.1667	1	3.667
	0	0	0	0	3.195	1.528	0	−7.778

جدول ٣'

لتحقيق (٥ — ٧) نلاحظ أن المتغيرات الأساسية فى X^* هى x_1 , x_2 ، ومن ثم (٥ — ٧) تصبح :

$$W^{*T} = [1, 3]\begin{bmatrix}4 & 8\\ 7 & 5\end{bmatrix}^{-1} = [1, 3]\begin{bmatrix}-5/36 & 8/36\\ 7/36 & -4/36\end{bmatrix} = [16/36, -4/36] = [0.4444, -0.1111]$$

لتحقيق (٥ — ٨) نلاحظ أن المتغيرات الأساسية فى W^* كما هو معطى بالجدول ٣' هى w_3, w_6, w_9 ، ومن ثم (٥ — ٨) تصبح :

$$X^{*T} = [25, -30, 0]\begin{bmatrix}4 & -7 & 0\\ 8 & -5 & 0\\ -6 & 9 & 1\end{bmatrix}^{-1} = [25, -30, 0]\begin{bmatrix}-5/36 & 7/36 & 0\\ -8/36 & 4/36 & 0\\ 42/36 & 6/36 & 1\end{bmatrix}$$
$$= [115/36, 55/36, 0] = [3.194, 1.528, 0]$$

٥ — ٨ بين أن صيغة الازدواج غير المتماثلة تتحدد بصيغة الازدواج المتماثل فقط .

اعتبر البرنامج (٥ — ٣) ذا المصفوفة $A = m \times n$ ، حيث إن قيد التساوى $AX = B$ يكون مكافئاً لقيود المتباينات $AX \geq B$ ، $AX \leq B$ ، وحيث يمكن كتابة هذه المتباينة الثانية $-AX \geq -B$ يكون البرنامج (٥ — ٣) مكافئاً لـ :

تصغير : $z = C^T X$

علماً بأن : $\hat{A}X \geq \hat{B}$ (١)

عند : $X \geq 0$

حيث : $\hat{A} = \begin{bmatrix}A\\ -A\end{bmatrix}$ $\hat{B} = \begin{bmatrix}B\\ -B\end{bmatrix}$

يأخذ البرنامج (١) الصيغة (٥ — ١) ، ويعطى ازدواجه المتماثل (٥ — ٢) (بكتابة U بدلًا من W) :

تعظيم : $z = \hat{B}^T U$

علماً بأن : $\hat{A}^T U \leq C$ (٢)

حيث : $U \geq 0$

وبتجزىء U إلى متجهين ذوى أبعاد — m ، U_1 , U_2 ، وباستخدام تعريفات $\hat{B}$, $\hat{A}$ يمكن كتابة (٢)

تعظيم : $z = [B^T, -B^T]\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix} = B^T(U_1 - U_2)$

علماً بأن : $[A^T, -A^T]\begin{bmatrix}U_1\\ U_2\end{bmatrix} = A^T(U_1 - U_2) \leq C$ (٣)

عند : $U_1 \geq 0$ and $U_2 \geq 0$

وأخيراً .. بتعريف $W = U_1 - U_2$ ، وملاحظة أن الفرق بين المتجهين غير السلبيين ليس مقيداً بإشارة ، نضع (٣) التى تعتبر ازدواج البرنامج (٥ — ٣) فى الصيغة :

تعظيم : $z = B^T W$ (٤)

علماً بأن : $A^T W \leq C$

والنموذج الأخير هو بالضبط البرنامج (٥ ــ ٤) .

بتكرار الخطوات السابقة بالكلمتين « تعظيم » ، « تصغير » متبادلتين ، وبعكس المتباينات فى القيود الرئيسية ، يمكن بيان أن ازدواج البرنامج (٥ ــ ٥) هو البرنامج (٥ ــ ٦)

٥ - ٩ اثبت أنه إذا كانت $\mathbf{X}$ أى حل ممكن للبرنامج (٥ ــ ١) ، و $\mathbf{W}$ أى حل ممكن للبرنامج (٥ ــ ٢) ، فإن :

$$\mathbf{C}^T\mathbf{X} \geq \mathbf{B}^T\mathbf{W}$$

إذا كانت $\mathbf{X}$ حلاً ممكناً لـ (٥ ــ ١) ، فإن : $\mathbf{AX} \geq \mathbf{B}$. بالضرب السابق للمتباينة فى المتجة اللاسلبى $\mathbf{W}^T$ نحصل على : $\mathbf{W}^T\mathbf{AX} \geq \mathbf{W}^T\mathbf{B}$ والذى يكافىء :

$$\mathbf{W}^T\mathbf{AX} \geq \mathbf{B}^T\mathbf{W} \qquad (١)$$

حيث $\mathbf{W}^T\mathbf{B}$ كمية غير متجهة .

إذا كانت $\mathbf{W}$ حلًا ممكناً لـ (٥ ــ ٢) ، فإن : $\mathbf{W}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{C}^T$ أو $\mathbf{A}^T\mathbf{W} \leq \mathbf{C}$. بالضرب اللاحق فى المتجهة اللاسلبية $\mathbf{X}$ نحصل على :

$$\mathbf{W}^T\mathbf{AX} \leq \mathbf{C}^T\mathbf{X} \qquad (٢)$$

ويحقق (١) ، (٢) معاً $\mathbf{C}^T\mathbf{X} \geq \mathbf{B}^T\mathbf{W}$

٥ - ١٠ بمعرفة أن $\mathbf{A}$ فى البرنامج (٥ ــ ١) هى $m \times n$ ، ودع $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ ليكونوا متغيرات زائدة مدخلة فى البرنامج لمعالجة متساويات القيود ، ودع : $w_{m+1}, w_{m+2}, \ldots, w_{m+n}$ ليكونوا متغيرات مساعدة مدخلة إلى البرنامج (٥ ــ ٢) لنفس السبب ، ودع z_2 و z_1 لتكون قيم دوال الهدف للبرنامج (٥ ــ ١) على التوالى . بين أن :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_{m+j} + \sum_{i=1}^{m} w_i x_{n+i} = z_1 - z_2 \qquad (١)$$

البرنامج (٥ ــ ١) يأخذ الصيغة .

تصغير : $z_1 = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \cdots + 0x_{n+m}$

علماً بأن :

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} \qquad &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad - x_{n+2} &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad - x_{n+m} &= b_m
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

بضرب معادلة القيد رقم i بالبرنامج فى $w_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ وتجميع النتائج ، نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j w_i - \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}w_i = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

بطرح هذه المعادلة من :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z_1$$

نحصل على :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j w_i + \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} w_i = z_1 - \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

التى يمكن كتابتها كما يلى :

$$\sum_{j=1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) x_j + \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} w_i = z_1 - \sum_{i=1}^{m} b_i w_i \qquad (٢)$$

البرنامج (٥ — ٢) يأخذ الصيغة :

تعظيم : $z_2 = b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m + 0w_{m+1} + 0w_{m+2} + \cdots + 0w_{m+n}$

علماً بأن :

$$\begin{aligned}
a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m + w_{m+1} \qquad\qquad &= c_1\\
a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \qquad + w_{m+2} \qquad &= c_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \qquad\qquad + w_{m+n} &= c_n
\end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

بحل المتغيرات المساعدة $(j = 1, 2, \ldots, n)$ w_{m+j} فى البرنامج نجد أن :

$$w_{m+j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

بالتعويض بهذه النتيجة فى (٢) ، وبملاحظة أن :

$$z_2 = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i$$

نحصل على (١)

٥ — ١١ اثبت مبدأ المساعدة المكملة (نظرية ٥ — ٢) .

لحل البرنامجين (٥ — ١) ، (٥ — ٢) حلاً أمثلاً $\mathbf{W}^*$ ، $\mathbf{X}^*$ على التوالى ، تصبح العلاقة (١) فى المسألة (٥ — ١٠) :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* w_{m+j}^* + \sum_{i=1}^{m} w_i^* x_{n+i}^* = 0$$

يصبح الطرف الأيمن صفراً بسبب النظرية (٥ — ١) ، ولما كان كل متغير فى المعادلة السابقة غير سلبى ، فإن التجميعات الفردية يجب أن تختفى ، بمعنى أن :

$$x_j^* w_{m+j}^* = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{and} \qquad w_i^* x_{n+i}^* = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

وفى اليسار مضروب العنصر رقم j من $\mathbf{X}^*$ فى المتغير المساعد رقم j فى البرنامج (٥ — ٢) ، إذا كان أحدهما موجباً يجب أن يكون الآخر صفراً . وفى اليمين مضروب العنصر رقم i من $\mathbf{W}^*$ فى المتغير الزائد رقم i فى البرنامج (٥ — ١) ، إذا كان أحدهما موجباً ، فإن الآخر يكون صفراً .

٥ – ١٢ استخدم نتائج مسألة ٥ ـــ ٣ لتحقيق مبدأ المساعدة المكملة .

باعتبار الجدول الأمثل للبرنامج الأوّلىّ (الجدول ٢) ، نجد أن المتغيرين المساعدين الأوليين x_4 و x_3 موجبان $x_4 = 2$ و $x_3 = 6$. ومن ثم يجب أن يكون المتغيران الازدواجيان الأوليان w_2 و w_1 مساويين للصفر . وهما كذلك . ونجد كذلك أن متغير الازدواج الثالث $w_3 = 1$ وحيث إنه موجب ، فالمتغير المساعد الثالث فى البرنامج الأوّلىّ x_5 يجب أن يكون صفرياً أيضاً . وهو كذلك .

بعد ذلك اعتبر الجدول الأمثل لبرنامج الازدواج (الجدول ٤) . يكون المتغير الزائد الثانى w_5 موجبا ، ومن ثم يجب أن يكون المتغير الأوّلىّ الثانى x_2 مساوياً للصفر . وهو كذلك . ويكون المتغير الأوّلىّ x_1 موجباً ، لذلك يجب أن يكون المتغير w_4 الزائد الأول فى نموذج الازدواج مساوياً للصفر . وهو كذلك .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

فى المسائل من ٥ ـــ ١٣ حتى ٥ ـــ ١٧ حدد ازدواجات البرامج المعطاه

٥ – ١٣

تصغير : $z = 12x_1 + 26x_2 + 80x_3$

علماً بأن :

$$2x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 4$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6$$

كل المتغيرات لا سلبية

٥ – ١٤

تصغير : $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$

علماً بأن :

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 + x_5 \geq 6$$
$$4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 5$$
$$x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7$$

كل المتغيرات لا سلبية

٥ – ١٥

تعظيم : $z = 6x_1 - x_2 + 3x_3$

علماً بأن :

$$7x_1 + 11x_2 + 3x_3 \leq 25$$
$$2x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 30$$
$$6x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 35$$

كل المتغيرات لا سلبية

٥ – ١٦ تعظيم : $z = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 25x_4$

علماً بأن : $8x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 \geq 16$

$3x_1 + 2x_3 - x_4 = 20$

كل المتغيرات لا سلبية

٥ – ١٧

تصغير : $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

علماً بأن : $x_2 + x_3 = 1$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$

كل المتغيرات لا سلبية

٥ – ١٨ بين أن البرنامج المعطى فى المسألة ٥ – ١٣ له نفس القيمة المثلى مثل ازدواجه بحل البرنامجين مباشرة .

٥ – ١٩ أوجد الحل الأمثل — للبرنامج المعطى فى المسألة ٥ – ١٤ بحل ازدواجه .

٥ – ٢٠ حدد الازدواج المتماثل للبرنامج فى المسألة ٤ – ٣ . حل الازدواج مباشرة ، وتحقق من أن أياً من البرنامج الأوَّلىّ أو ازدواجه المتماثل له حل ولكن ليس أمثل . وبالتالى .. فالآخر ليس له حل .

٥ – ٢١ بإيجاد الازدواج غير المتماثل للبرنامج

تصغير : $z = -x_1 - x_2$

علماً بأن : $x_1 - x_2 = 5$

$x_1 - x_2 = -5$

كل المتغيرات لا سلبية

بينّ أنه من الممكن لكل من البرنامج الأوَّلىّ وإزدواجه ألا يكون لهما حل ممكن .

٥ – ٢٢ استخدم نتائج المسألة ٥ – ٤ لتحقيق مبدأ المساعدة المكملة .

٥ – ٢٣ حقق (٥ – ٧) ، (٥ – ٨) للبرنامج المعطى فى المسألة ٥ – ١٧ .

٥ – ٢٤ اثبت أنه إذا كانت $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{X}_0$ حلولاً ممكنة للبرنامجين (٥ – ١) ، (٥ – ٢) على التوالى ، بحيث إن : $\mathbf{C}^T\mathbf{X}_0 = \mathbf{B}^T\mathbf{W}_0$ ، فإن $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{X}_0$ تكون حلولاً مثالية لبرامجها .

طريقة التفريع والتحديد برمجة الأعداد الصحيحة

Integer Programming: Branch-and-Bound Algorithm

التقريب الأول FIRST APPROXIMATION

برنامج الأعداد الصحيحة هو برنامج خطى ، بشرط أن تكون كل متغيراته أعداداً صحيحة (انظر الفصل الأول) ، لذلك فإن التقريب الأول لحل برنامج الأعداد الصحيحة يمكن الحصول عليه بتجاهل هذا الشرط ، وحل البرنامج الخطى الناتج بإحدى الطرق السابق تقديمها . وإذا كان إلحل الأمثل للبرنامج الخطى أعداداً صحيحة ، يكون هذا الحل هو نفسه الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلى (انظر المسألة ٦ — ٣) . وإلا — وهذه هى الحالة الغالبة — فإنه يجب تقريب عناصر الحل إلى أقرب أعداد صحيحة ممكنة للحصول على التقريب الثانى . وتنفذ هذه الطريقة غالباً ، وبخاصة إذا كان التقريب الأول يحتوى على أعداد كبيرة ، ولكنها قد تكون غير دقيقة ، إذا كانت الأعداد صغيرة (انظر المسألة ٦ — ٥) .

التفريع BRANCHING

إذا احتوى التقريب الأول على متغير غير صحيح ، مثل x_j^* ، فإن $i_1 < x_j^* < i_2$ ، حيث تكون i_1 i_2 بالتالى أعداداً صحيحة لا سلبية . ويتولد برنامجا أعداد صحيحة بتزويد برنامج الأعداد الصحيحة الأصلى بأى من القيدين $x_j \leq i_1$ ، $x_j \geq i_2$ ، وتسمى هذه الطريقة « التفريع » ، ولها تأثير على تقليص المنطقة الممكنة بطريقة يمكن بها حذف الحل الحالى للأعداد غير الصحيحة فى x_j ، ولكنها تحافظ على كل حلول الأعداد الصحيحة الممكنة للمسألة الأصلية (انظر ٦ — ٨) .

مثال ٦ — ١ : كتقريب أول لبرنامج الأعداد الصحيحة

$$z = 10x_1 + x_2 \quad : \text{تعظيم}$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 11 \quad : \text{علماً بأن} \qquad (٦ - ١)$$

عند : x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

اعتبر البرنامج الخطى المرتبط بهذا البرنامج ، والذى نحصل عليه بحذف شرط الأعداد الصحيحة . يمكن إيجاد الحل بالرسم فى الآتى : $x_1^* = 5.5,\ x_2^* = 0$ عند $z^* = 55$ ، حيث إن $5 < x_1^* < 6$ ، فإن التفريع يوجد برنامجى الأعداد الصحيحة الجديدين .

$$z = 10x_1 + x_2 \quad : \text{تعظيم}$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 11 \quad : \text{علماً بأن} \qquad (٦ - ٢)$$
$$x_1 \leq 5$$

x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

تعظيم : $z = 10x_1 + x_2$

علماً بأن : $2x_1 + 5x_2 \leq 11$

$x_1 \geq 6$

x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

نحصل على التقريب الأول لبرنامجى الأعداد الصحيحة الناتجة من عملية التفريع بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، وحل البرنامج الخطى الناتج . إذا ظل التقريب الأول أعداداً غير صحيحة ، فإن برنامج الأعداد الصحيحة الذى أعطى زيادة للتقريب الأول يصبح أساساً لعملية تفريع تالية .

مثال ٦ – ٢ : باستخدام طريقة الرسم نجد أن البرنامج (٦ – ٢) له التقريب الأول $x_2^* = 0.2$ $x_1^* = 5$ عند $z^* = 50.2$ ، بينما البرنامج (٦ – ٣) ليس له حل ممكن ، لذلك فإن البرنامج (٦ – ٢) يعتبر أساساً لتفريعات تالية . حيث $0 < x_2^* < 1$ ، فنزيد (٦ – ٢) بإحدى $x_2 \geq 1$ ، $x_2 \leq 0$ ونحصل على البرنامجين الجديدين .

تعظيم : $z = 10x_1 + x_2$

علماً بأن : $2x_1 + 5x_2 \leq 11$

$x_1 \leq 5$

$x_2 \leq 0$

حيث x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

(وفيه $x_2 = 0$ بالحتم) و

تعظيم : $z = 10x_1 + x_2$

علماً بأن : $2x_1 + 5x_2 \leq 11$

$x_1 \leq 5$

$x_2 \geq 1$

حيث إن x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، يكون حل البرنامج (٦ – ٤) $x_2^* = 0$ $x_1^* = 5$ عند $z^* = 50$ ، بينما حل البرنامج (٦ – ٥) يكون $x_2^* = 1$ $x_1^* = 3$ عند $z^* = 31$. وحيث إن كلاً من هذين التقريبين صحيح ، فإنه ليس من المطلوب أى تفريع تال .

التحديد BOUNDING

بفرض تعظيم الدالة الهدفية ، فإن التفريع يستمر حتى الحصول على تقريب الأعداد الصحيحة الأول (الذى يكون حل أعداد صحيحة) . وتصبح قيمة الهدف لحل الأعداد الصحيحة الأول هى الحد الأسفل للمسألة ، وكل البرامج التى تؤدى حلولها الأولى — سواء أعداد صحيحة أم لا — إلى قيم دالة هدفية أصغر من الحد الأسفل ، تصبح ملغاة .

مثال ٦ – ٣ : للبرنامج (٦ – ٤) حل أعداد صحيحة $z^* = 50$ ، ومن ثم يصبح الحد الأسفل للمسألة . وللبرنامج (٦ – ٥) حل $z^* = 31$ ، وحيث إن 31 أقل من الحد الأسفل 50 ، فإن البرنامج (٦ – ٥) يُلغى من الاعتبار (وقد كان سيلغى أيضاً حتى إذا كان التقريب الأول له أعداد غير صحيحة) .

يستمر التفريع من هذه البرامج التى لها تقريب أولى بأعداد غير صحيحة ، والتى تعطى قيماً للدالة الهدفية أكبر من الحد الأسفل.. وإذا لم يتحقق فى هذه العملية أن يعطى حل الأعداد الصحيحة الجديدة قيمة للدالة للهدفية أكبر من القيمة الحالية للحد الأسفل ، فإن هذه القيمة للدالة الهدفية تصبح حداً أسفل جديداً ، ويلغى البرنامج الذى نتج عنه الحد الأسفل القديم ، وكل البرامج التى يؤدى تقريبها الأول إلى قيم للدالة الهدفية أصغر من الحد الأسفل الجديد . وتستمر عملية التفريع حتى لا توجد أى برامج لها تقريب أول أعداد غير صحيحة متبقية تحت الاعتبار . عند هذه النقطة ، فإن حل الحد الأسفل الحالى هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلى .

فى حالة تصغير الدالة الهدفية تظل الطريقة نفسها ، ما عدا أن الحد الأعلى يستخدم ، لذلك فإن قيمة حل الأعداد الصحيحة الأول يصبح حداً أعلى للمسألة ، وتلغى البرامج عند قيم التقريب الأول z الأكبر من الحد الأعلى الحالى .

الاعتبارات الحسابية COMPUTATIONAL CONSIDERATIONS

يتم التفريع دائماً من البرامج التى تظهر قريبه من الحل الأمثل . وعندما يوجد عدد من العناصر لتفريع أكثر ، نختار التفريع ذا أكبر قيمة لـ z ، إذا كان الهدف تعظيم الدالة الهدفية أو التى لها أصغر قيمة لـ z إذا كان الهدف تصغير الدالة الهدفية .

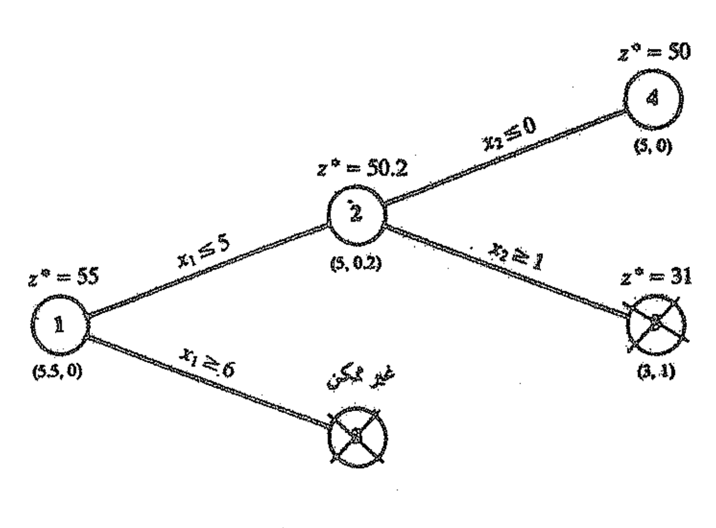
تضاف القيود الإضافية واحداً فى كل مرة . إذا احتوى التقريب الأول على أكثر من متغير واحد غير صحيح ، فتفرض هذه القيود الجديدة على هذا المتغير الذى غالباً ما يكون عدداً صحيحاً ، بمعنى أن المتغير الذى يقترب جزء الكسر فيه من 0.5 ، ولو حدث تساوٍ يُختار الذى يقوم بالحل أحد هذه المتغيرات .

وأخيراً .. فإنه من الممكن لأى برنامج أعداد صحيحة أو أى برنامج خطى مرتبط به أن يكون له أكثر من حل أمثل . وفى كلتا الحالتين فإننا نتمسك بما جاء فى الفصل الأول باختيار احدها كحل أمثل ، مع ترك الباق .

مسائل محلولة

Solved Problems

٦ – ١ ارسم الشكل الخطى (الشجرة) التى تعبر عن نتائج الأمثلة من (٦ – ١) إلى (٦ – ٣) .



شكل ٦ – ١

انظر شكل (٦-) . يوضح برنامج الأعداد الصحيحة (٦ - ١) برقم 1 داخل دائرة . وتوضح باقى البرامج الأخرى المتكونة من التفريعات طبقاً لترتيب تكوينها بدوائر مرقمة على التوالى ، لذلك فإن البرنامجين (٦ - ٢) حتى (٦ - ٥) يوضحان بالدوائر رقم 2 ، 5 على التوالى . ويكتبُ الحل التقريبى الأَوَّلِىّ لكل برنامج بالدائرة التى توضح هذا البرنامج . وتوصل كل دائرة (برنامج) بعد ذلك بخط بالدائرة (البرنامج) التى كونته من خلال عملية التفريع . ويكتب القيد الذى أوجد عملية التفريع فوق الخط . وأخيراً تشطب الدائرة التى يحذف برنامجها من أى اعتبار تال . ومن ثم يحذف التفريع 3 ، لأنه ليس ممكناً ؟ وقد حذف التفريع 5 بعملية التحديد فى المثال (٦ - ٣) . وحيث إنه لا تبقى أى تفريعات أعداد غير صحيحة لكى تؤخذ فى الاعتبار ، فإن الرسم التخطيطى الذى يدل على البرنامج 1 يحل فى

$$x_1^* = 5, \; x_2^* = 0, \; z^* = 50$$

٦ - ٢

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad \text{تعظيم}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad \text{: علما بأن}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

أعداد صحيحة لا سلبية x_1, x_2

بإهمال شرط الأعداد الصحيحة ، نحصل على $x_1^* = 2.25$ ، $x_2^* = 1.5$ عند $z^* = 12.75$ كحل للبرنامج الخطى المرتبط به . وحيث إن x_2^* بعيد عن القيمة الصحيحة من x_1^* ، فإننا نستخدمها لتكوين التفريعات $x_2 \geq 2$ ، $x_2 \leq 1$

البرنامج 2

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad : \text{تعظيم}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad : \text{علما بأن}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_2 \leq 1$$

صحيحة ولا سلبية x_1, x_2

البرنامج 3

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad : \text{تعظيم}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad : \text{علما بأن}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_2 \geq 2$$

صحيحة ولا سلبية x_1, x_2

التقريب الأَوَّلِى للبرنامج 2 هو $x_2^* = 1$ ، $x_1^* = 2.5$ عند $z^* = 11.5$ والتقريب الأولى للبرنامج 3 هو $x_2^* = 2$ ، $x_1^* = 1.5$ عند $z^* = 12.5$ تبين هذه النتائج فى الشكل (٦ - ٢) ، حيث إن البرنامجين 2 ، 3 لهما تقريب أول غير صحيح ، ولذا فإنه يمكن التفريع من أحدهما . ونختار البرنامج 3 ، لأن له قيمة أكبر للدالة الهدفية (أقرب إلى الأمثلية) ، وهنا $1 < x_1^* < 2$ ، ويكون البرنامج الجديد هو :

برنامج 4

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad : \text{تعظيم}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad : \text{علما بأن}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1 \leq 1$$

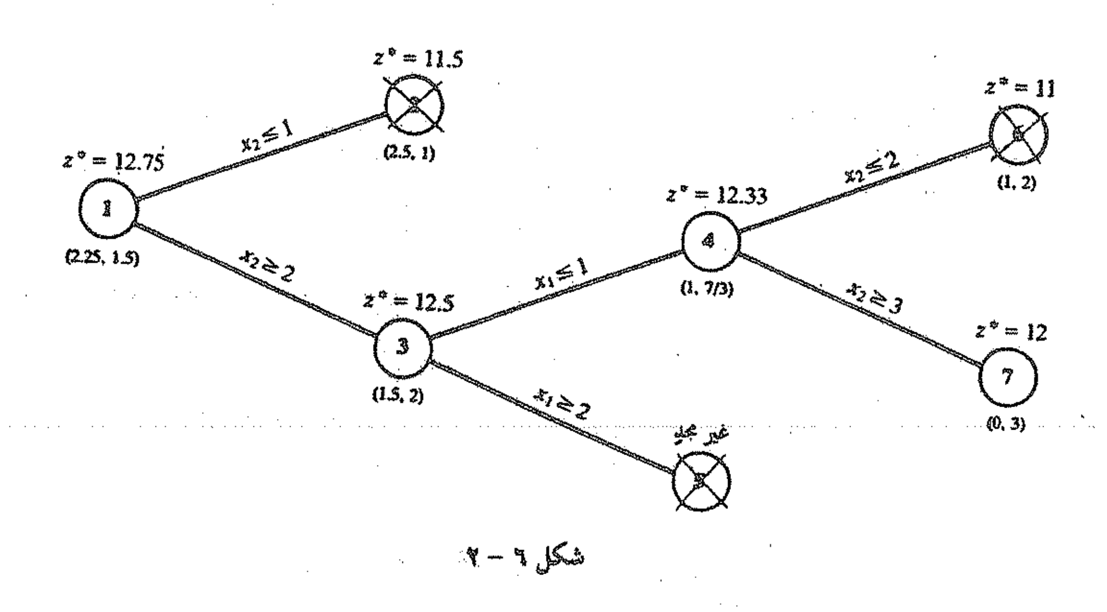
صحيحة ولا سلبية x_1, x_2

برنامج 5

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad : \text{تعظيم}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad : \text{علما بأن}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1 \geq 2$$

صحيحة ولا سلبية x_1, x_2

ولا يوجد حل للبرنامج 5 (غير ممكن) ، بينما حل البرنامج 4 مع تجاهل قيود الأعداد الصحيحة هو $x_1^* = 1 \quad x_2^* = 7/3$ عند $z^* = 12.33$ (انظر شكل ٦ – ٢) . ويمكن أن يستمر التفريع من أى من البرنامجين 2 أو 4 نختار البرنامج 4 ، حيث إن له قيمة أكبر لـ z .



شكل ٦ – ٢

وهنا $2 < x_2^* < 3$ ، ولذلك تصبح البرامج الجديدة

البرنامج 6

تعظيم : $z = 3x_1 + 4x_2$

علما بأن :

$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 9$$
$$x_2 \ge 2$$
$$x_1 \le 1$$
$$x_2 \le 2$$

حيث x_1, x_2 صحيحة ولا سلبية

البرنامج 7

تعظيم : $z = 3x_1 + 4x_2$

علما بأن :

$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 9$$
$$x_2 \ge 2$$
$$x_1 \le 1$$
$$x_2 \ge 3$$

حيث x_1, x_2 صحيحة ولا سلبيه

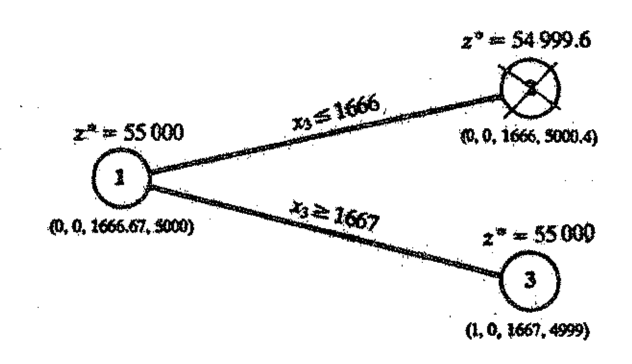
ويكون حل البرنامج 6 بتجاهل القيود الصحيحة هو $x_1^* = 1 \quad x_2^* = 2$ عند $z^* = 11$. وحيث إنه حل أعداد صحيحة ، $z = 11$ تصبح الحد الأسفل للمسألة ، فإن أي حل يؤدى بقيمة z لأقل من 11 يجب أن يحذف . والتقريب الأول للمسألة ٧ هو $x_1^* = 0 \quad x_2^* = 3$ عند $z^* = 12$. وحيث إن هذا هو حل أعداد صحيحة وقيمة z أكبر من الحد الأسفل الحالى ، تصبح $z = 12$ الحد الأسفل الجديد ، ويحذف البرنامج الذى نتج عنه الحد الأسفل القديم ، وهو البرنامج 6 من أى اعتبار تال ، كما فى البرنامج 2 . يبين شكل ٦ – ٢ الآن أنه لا تبقى أى تفريعات إلا المرتبطة بالحد الأسفل الحالى ، وبالتالى فإن هذا التفريع يعطى الحل الأمثل للبرنامج 1 : $x_1^* = 0 \quad x_2^* = 3$ عند $z^* = 12$

٩ – ٣ حل المسألة (١ – ٩) .

بالتغاضى عن شرط الأعداد الصحيحة فى البرنامج (1) بالمسألة (١ – ٩) ، فإننا نحل البرنامج الخطى أولاً لإيجاد (أنظر المسألة ٥ – ٤) : $x_1^* = 2,\ x_2^* = 18,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 20,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 5,$ عند $z^* = 45$ وهذا هو التقريب الأول . حيث أنه أعداداً صحيحة ، ومع ذلك ، فهو أيضاً الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلى .

٩ – ٤ حل المسألة (١ – ٦)

بالتغاضى عن شرط الأعداد الصحيحة فى البرنامج (4) بالمسألة (١ – ٦) تحصل على $x_1^* = x_2^* = 0,\ x_3^* = 1666.67,$ $x_4^* = 5000$ عند $z^* = 55\,000$ كتقريب أول . وحيث أن x_3^* غير صحيحة فإننا نتفرغ إلى برنامجين جديدين ، ونحلهما بالتغاطى عن شرط الأعداد الصحيحة . توضح النتيجة فى الشكل (٦ – ٣) . برنامج (3) له حل أعداد صحيحة عند قيمة z أكبر من قيمة z بالبرنامج (2) . وبالتالى نحذف برنامج (2) ونقبل حل البرنامج (3) كحل أمثل وهو $x_1^* = 1,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 1667,\ x_4^* = 4999$ عند $z^* = \$55\,000$



شكل (٩ – ٣)

٩ – ٥ ناقش الأخطاء الناتجة عن تقريب التقريب الأول للبرنامج الأصلى فى المسألة (٦ – ٢) ، (٦ – ٤) إلى أعداد صحيحة ثم أخذ هذه الاجابات إلى الحلول المثلى .

كان التقريب الأول فى المسألة (٦ – ٢) هو $x_2^* = 1.5$ ، $x_1^* = 2.25$. ونرغب الآن فى التقريب إلى أقرب نقطة أعداد صحيحة فى منطقة الحلول الممكنة . فى النقاط الأربعة ذات الأعداد الصحيحة التى تحدد التقريب الأول ، نجد أن نقطة واحدة فقط هى النقطة (2, 1) التى تقع داخل منطقة الحلول الممكنة . لذلك فإننا نأخذ $x_2^* = 1$ ، $x_1^* = 2$ عند قيمة z المناظرة $z^* = 10$ كحل أمثل مقترح . وقد وجد أن الحل الأمثل الحقيقى هو $z^* = 12$ ، لذلك فإن الحل المقرب يختلف عن الحل الحقيقى بأكثر من ١٦ فى المئه .

كان التقريب الأول فى المسألة (٦ – ٤) هو $x_1^* = x_2^* = 0,\ x_3^* = 1666.67,\ x_4^* = 5000$. وبتقريب x_3^* لتصبح ممكنة ، نحصل على $x_1^* = x_2^* = 0,\ x_3^* = 1666,\ x_4^* = 5000$ كإحداثيات للحل الأمثل . وتكون قيمة z المناظرة هى 54996 \$ التى تختلف عن الحل الحقيقى $z^* = \$55\,000$ بأقل من 0.008 فى المئه .

تصغير : $z = x_1 + x_2$

علما بأن : $2x_1 + 2x_2 \geq 5$

$12x_1 + 5x_2 \leq 30$

عند x_1 ، x_2 صحيحة ولا سلبية

التقريب الأول لهذا البرنامج هو $x_2^* = 0$ $x_1^* = 2.5$ عند $z^* = 2.5$. بتقريب x_1^* لأعلى حتى تبقى ممكنة نحصل على $x_2^* = 0$ $x_1^* = 3$ عند $z^* = 3$ كتقدير للحل الأمثل للبرنامج الأصلى . لا حظ مع ذلك أن الدالة الهدفية يجب أن تكون أعداداً صحيحة ، وذلك لقيم الأعداد الصحيحة للمتغيرات . قيمة z للتقريب الأول $z^* = 2.5$ تعطي حداً أسفل للقيمة المثلى للهدف ، وبالتالي فإن القيمة المثلى للهدف لا يمكن أن تقل عن 3 . ولما كان هناك تقدير للحفاظ على القيمة 3 ، فإن هذا التقدير يجب أن يكون أمثل ، بمعنى : $x_2^* = 0$ $x_1^* = 3$ عند $z^* = 3$.

٦ – ٧ حل مشكلة حقائب الظهر المصاغة فى المسألة ١ – ٨ .

يمكن استخدام طريقة السمبلكس لإيجاد التقريب الأول للبرنامج 3 للمسألة ١ – ٨ . والطريقة التالية تعتبر أكثر كفاءة :

يعتبر العامل الحرج الذى يحدد أخذ أحد العناصر ليس بوزنه أو قيمته ، ولكن بالنسبة بينهما ـــ قيمته لكل رطل ـــ ونطلق على هذا العامل « عامل الرغبة » ويمكن إضافته إلى البيانات لإنشاء الجدول ٦ – ١ ، حيث تكتب العناصر مرتبة طبقاً لعامل الرغبة المتناقص . وللحصول على الحل الأمثل لمسألة حقائب الظهر بتجاهل قيد الأعداد الصحيحة ، نأخذ أكبر عدد ممكن من العناصر (بدون الزيادة عن قيد وزن ٦٠ رطلاً) مبتدئين بالأكثر رغبة . ويتبع من جدول ٦ – ١ أن التقريب الأول يتكون من كل عناصر 2 (الأكثر رغبة) ، كل عناصر 5 (التالية فى الرغبة) ، و ٣٠ رطلاً من العنصر 3 :

$x_5^* = 1$ $x_4^* = 0$ ، $x_3^* = 30/35$ $x_2^* = 1$ $x_1^* = 0$ عند $z^* = 135$

العنصر	الوزن ـــ رطل	القيمة	الرغبة (القيمة / رطل)
2	23	60	2.61
5	7	15	2.14
3	35	70	2.00
1	52	100	1.92
4	15	15	1.00

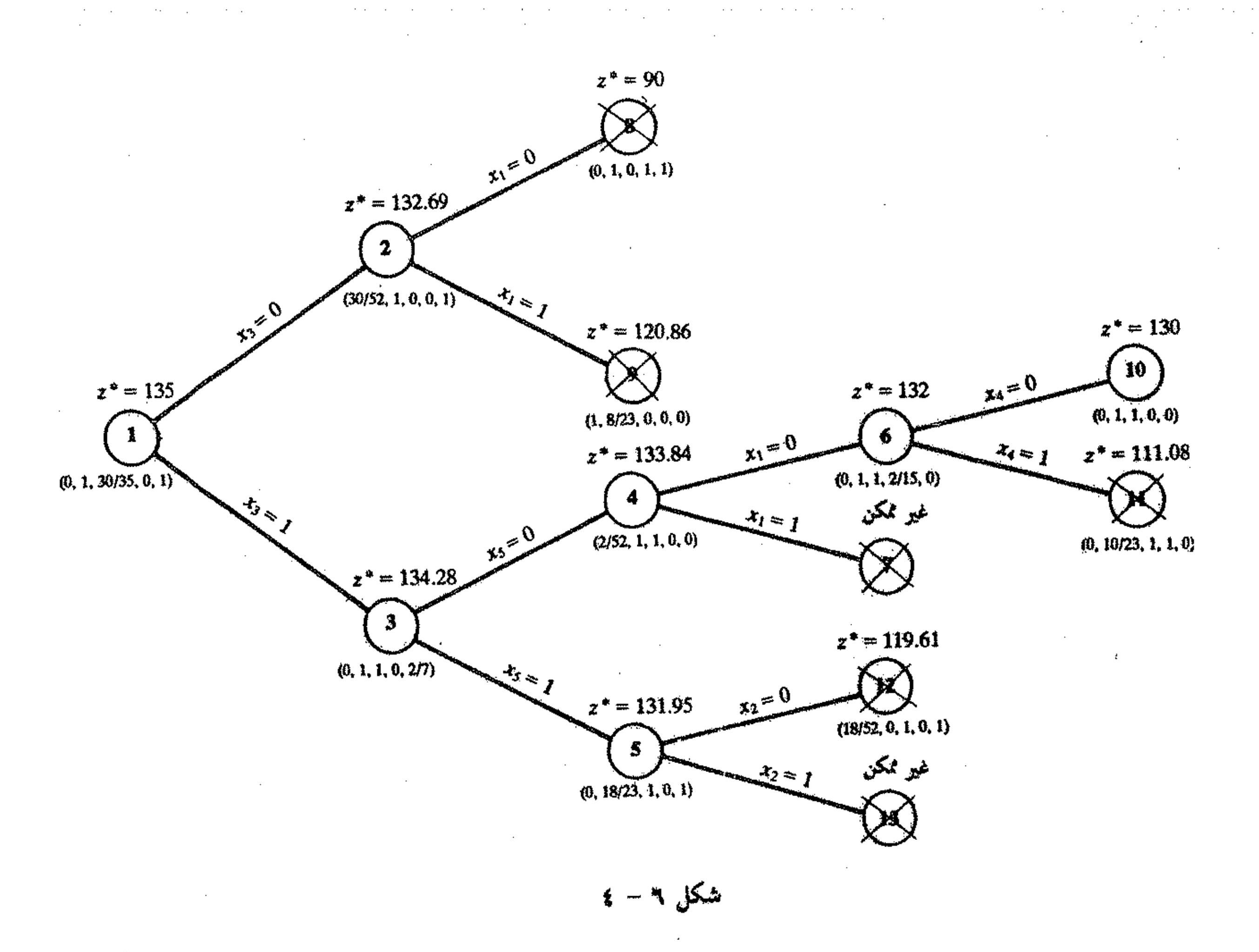
جدول ٦ – ١

وحيث إن هذا التقريب ليس أعداداً صحيحة ، فإننا نحدث تفريعاً بزيادة القيود الأصلية بأى من $x_3 \geq 1$ أو $x_3 \leq 0$. وقبل عمل ذلك نلاحظ أنه لما كانت x_3 مطلوبة أن تكون لا سلبية ، فإن القيد $x_3 \leq 0$ يمكن أن يلتزم بالقيمة $x_3 = 0$. ولما كان واحداً على الأكثر من أى عنصر سيؤخذ ، فإن القيد $x_3 \geq 1$ يمكن أن يلتزم بالقيمة $x_3 = 1$. ويوضح ذلك فى لوحة الشجرة ٦ – ٤ .

بالتغاضى عن شرط الأعداد الصحيحة ، نحدد الحل الأمثل لكل من البرامج 2 ، 3 فى شكل ٦ – ٤ باستخدام الجدول ٦ – ١

لإيجاد أحسن خليط من القيود ، فنحصل للبرنامج 2 على $x_1^* = 30/52,\ x_2^* = 1\ \ x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 1$ عند $z^* = 132.69$ ، ونحصل للبرنامج 3 على $x_1^* = 0\ \ x_2^* = 1\ \ x_3^* = 1\ \ x_4^* = 0\ \ x_5^* = 2/7$ عند $z^* = 134.28$.

باستمرار عملية التفريع والتحديد نكمل الشكل ٦ – ٤ . ونحصل على حل الأعداد الصحيحة الأول فى البرنامج 8 عند $z^* = 90$ ويمكن الحصول على حل أعداد صحيحة ثانٍ في البرنامج 10 عند $z^* = 130$.



شكل ٦ – ٤

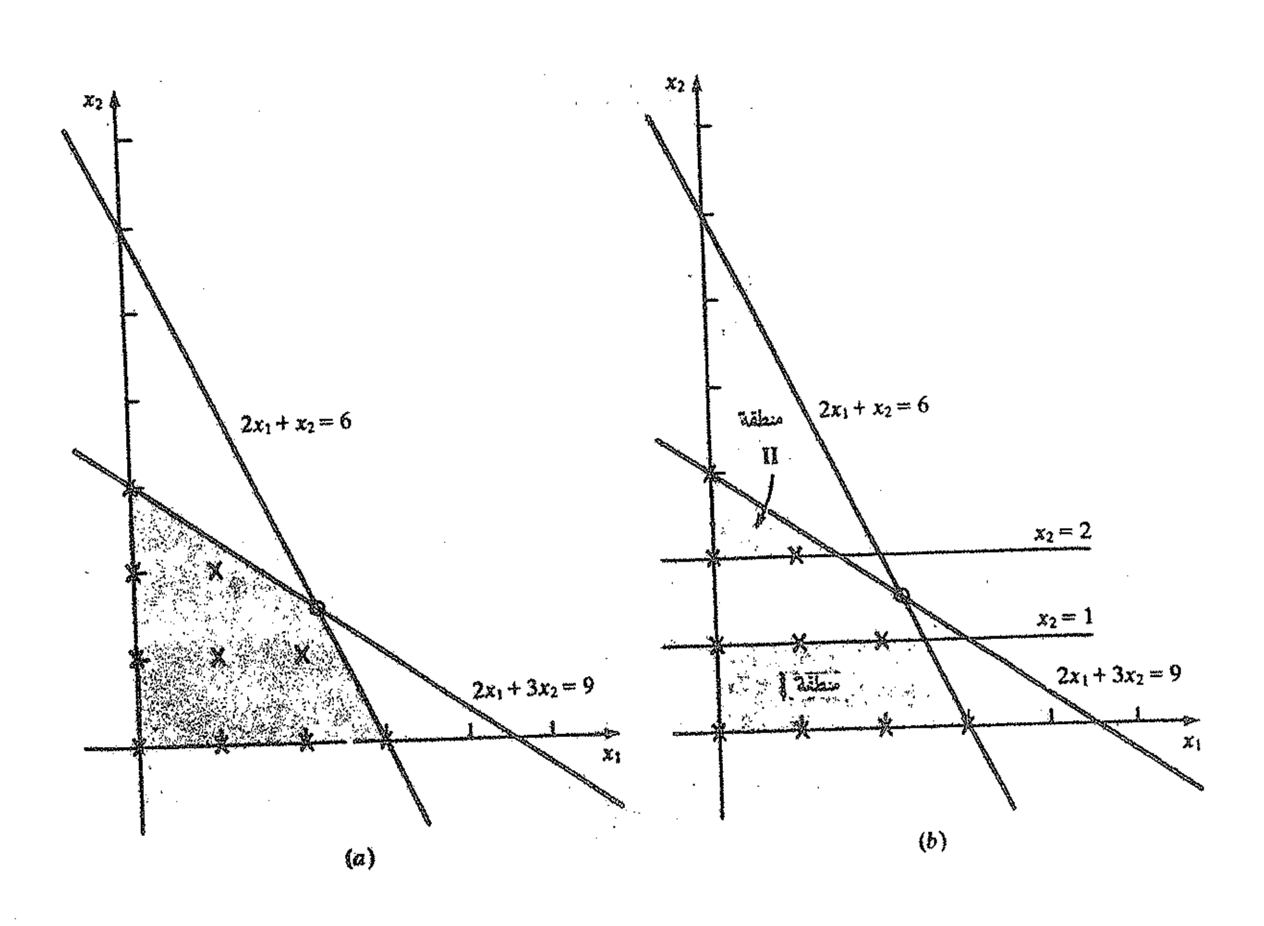
ولما كانت هذه القيمة الثانية لـ z أكبر من الأولى ، فإننا نحذف البرنامج 8 ، وكذلك البرنامجين 9 ، 11 . وللبرنامج 5 قيمة أكبر من قيمة الحد الأسفل الحالية ، ولذلك يستمر التفريع منها . وللبرنامج الناتج 12 قيمة z أقل من 130 ، بينما البرنامج 13 غير ممكن ، لذلك فإننا نحذف الاثنين . ويتبقى البرنامج 10 فقط ، لذلك فإن حله مع أخذ العناصر 2 ، 3 بقيمة إجمالية 130 يعتبر حلاً أمثل .

كان من الممكن تجنب كثير من عمليات التفريع والتحديد . ونعرف مقدماً أن أياً من $x_3 = 1$ أو $x_3 = 0$ هما فى الحل الأمثل ، فإذا كانت $x_3 = 0$ ، فإن البرنامج 2 ينطبق مع البرنامج الأصلى ، ونحصل على قيمة $z = 132.69$ عند تجاهل شرط الأعداد الصحيحة (بامتداد المنطقة الممكنة) ، والتى يجب أن تكون أكبر من أو على الأقل مساوية للحل الأمثل الحقيقى . وبالتماثل إذا كانت $x_3 = 1$ ، فإننا نرى من البرنامج 3 أن الحل الأمثل الحقيقى لا يمكن أن يزيد عن 134.28 . وأياً كانت الحالة ، فإن الحل الأمثل الحقيقى يقل بالتأكيد عن 135 ، ولكن لقيم الأعداد الصحيحة للمتغيرات ، فإن z تكون عدداً صحيحاً ، وفى الحقيقة فإنها مضروب 5 ، حيث إن قيم العناصر عبارة عن مضروبات 5 ، لذلك .. فإن الحل الأمثل الحقيقى يكون 130 على الأكثر . وبتقريب حل التقريب الأول للبرنامج 3 يعطى $x_1^* = 0\ \ x_2^* = 1,\ x_3^* = 1,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 0$ عند $z^* = 130$ ، وبالتالى يكون هذا الحل حلاً أمثل .

٦ – ٨ ناقش مدى صدق الهندسه التحليلية فى عمل التفريع الأول فى المسألة ٦ – ٢ .

تعتبر المنطقة المظللة فى الشكل ٦ – ٥ (أ) هى المنطقة الممكنة للمسألة ٦ – ٢ ، مع تجاهل شرط الأعداد الصحيحة ؛ وتُمثل المنطقة الممكنة للمسألة ٦ – ٢ كما هو معطى بمجموعة نقط الأعداد الصحيحة (الموضحة بعلامة ×) التابعة للمنطقة المظللة . ويكون التقريب الأول هو النقطة الطرفية داخل الدائرة .

وكنتيجة للتفريع ، فإن المنطقة الممكنة للبرنامج 2 مع تجاهل شرط الأعداد الصحيحة هى المنطقة I فى الشكل ٦ – ٥ (ب) ، بينما المنطقة II فى نفس الشكل تحتوى على كل نقط الأعداد الصحيحة لشكل ٦ – ٥ (أ) ، وهذه النقط هى الصحيحة فقط . ومن ثم فإذا كان للبرنامج الأصلى حل أمثل (كما فى هذه الحالة) ، فإنه سيكون حلًا أمثل لأحد برنامجى الأعداد الصحيحة الجديدين . وبالعكس إذا كان لبرنامجى الأعداد الصحيحة الجديدين حلان أمثلان ، فإن أحد هذين الحلين (الحل ذا القيمة z الأكبر فى حالة مسألة تعظيم) يكون حلًا أمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلى . وتنتج صحة أسلوب التحديد من الملحوظة السابقة بين القوسين .



شكل ٦ – ٥

مسائل مكملة :

Supplementary Problems

حل المسائل الآتية باستخدام طريقة التفريع والتحديد :

٦ – ٩

تعظيم : $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

علماً بأن : $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 11$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

٦ – ١٠

تعظيم : $z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$

علماً بأن : $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10$

$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 5$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

٦ – ١١

تعظيم : $z = 2x_1 + 10x_2 + x_3$

علماً بأن : $5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 15$

$2x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 20$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 25$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

٦ – ١٢

تصغير : $z = 10x_1 + 2x_2 + 11x_3$

علماً بأن : $2x_1 + 7x_2 + x_3 = 4$

$5x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 17$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

٦ – ١٣ : المسألة ١ – ٢٠

٦ – ١٤ : حل المسألة ٦ – ٧ بتطبيق طريقة التفريع والتحديد مباشرة للبرناج 3 للمسألة ١ – ٨ . وقارن هذه الطريقة بالمدخل المتبع ف المسأله ٦ – ٧ ؟

الفصل السابع

برمجة الأعداد الصحيحة : طرق القطع

Integer Programming: Cut Algorithms

فى كل مرحلة من مراحل التفريع فى طريقة التفريع والتحديد تقطع المنطقة الممكنة الحالية إلى منطقتين أصغر (بتجاهل قيود الأعداد الصحيحة للبرنامج الحالى) بإدخال قيدين جديدين مشتقين من التقريب الأول على البرنامج الحالى (إحداهما قد تكون فارغة) . وهذا القطع يكون بحيث يظهر الحل الأمثل للبرنامج الحالى كحل أمثل لأحد البرنامجين الجديدين (المسألة ٦ – ٨) .

وتعمل طرق القطع فى هذا الفصل بأسلوب متشابه بفرق واحد فقط هو إضافة قيد جديد واحد فى كل مرحلة ، وبالتالى فإن المنطقة الممكنة تتلاشى دون قطع .

طريقة جومورى THE GOMORY ALGORITHM

تُحدد القيود الجديدة بالخطوات الثلاث التالية : (انظر المسألة ٧ – ٥)

الخطوة الأولى : فى جدول السمبلكس النهائى الحالى ، اختر أحد المتغيرات ـــ عدداً غير صحيح (أى متغير) ـــ وبدون تخصيص قيم صفرية للمتغيرات الأساسية ، اعتبر معادلة القيد المقدمة فى صف المتغير المختار .

مثال ٧ – ١ جدول السمبلكس الموضح يعطى الحل الأمثل (أى التقريب الأول الحالى)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	−1/2	0	1	−7/3	1/2	11/2
x_2	1/2	1	0	−1	1/4	1
	4	0	0	1	3/4	25/2

بإعطاء كل من المتغيرات غير الأساسية x_5، x_4، x_1 قيماً صفرية . ويأتى تخصيص القيمة غير الصحيحة لـ x_3 من الصف الأول للجدول ، والذى يمثل القيد

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_3 - \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{11}{2} \qquad (١ - ٧)$$

الخطوة الثانية : أعد كتابة المعاملات الكسرية والثوابت فى معادلة القيد الناتجة من الخطوة الأولى ، كمجموع الأعداد الصحيحة والكسور الموجبة بين صفر ، وواحد ، ثم أعد كتابة المعادلة ، بحيث إن الطرف الأيسر يحتوى على حدود ذات معاملات كسرية فقط (وثابت كسرى) ، بينما الطرف الأيمن يحتوى على حدود بمعاملات أعداد صحيحة (وثوابت صحيحة) .

مثال ٧ – ٢ تصبح المعادلة (٧ – ١)

$$(-1 + \tfrac{1}{2})x_1 + x_3 + (-3 + \tfrac{2}{3})x_4 + (0 + \tfrac{1}{2})x_5 = 5 + \tfrac{1}{2}$$

أو

$$\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{2}{3}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 - \tfrac{1}{2} = 5 + x_1 - x_3 + 3x_4 \qquad (٢ - ٧)$$

الخطوة الثالثة تطلب أن يكون الطرف الأيسر فى المعادلة المعاد كتابتها غير سلبى . وتكون المتباينة الناتجة ، هى القيد الجديد .

مثال ٧ – ٣ س ٧ – ٢

$$\tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{2}{3}x_4+\tfrac{1}{2}x_5 \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{أو} \quad \tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{2}{3}x_4+\tfrac{1}{2}x_5-\tfrac{1}{2} \geq 0$$

هى القيد الجديد

الاعتبارات الحسابية : COMPUTATIONAL CONSIDERATIONS

يمكن توفير وقت الحساب بإلحاق متباينة القيد الجديد الناتجة من الخطوة 3 على معادلات القيود الموصوفة فى جدول السمبلكس النهائى الحالى ، فضلاً عن القيود الجبرية المكافئة المعطاه فى البرنامج الأصلى (انظر المسألة ٧ – ١) .

قد لا تتقارب طريقة جومورى ، بمعنى أنه قد لا نحصل على حل أعداد صحيحة ، بصرف النظر عن عدد محاولات تكرار الحل . وبوجه عام .. فإنه إذا كان الحل يتقارب ، فإنه يتقارب بسرعة ، لهذا السبب فإن الحد الأعلى لمرات تكرار الحل يجب أن يحدد قبل إنشاء الحل . فإذا لم نصل إلى حل أعداد صحيحة خلال هذا العدد من التكرار فإننا نتخلى عن الطريقة .

لا توجد أسباب نظرية للاختيار بين طريقة جومورى وطريقة التفريع والتحديد. وتعتبر طريقة التفريع والتحديد هى الأحدث فى الطريقتين ، وتبدو أنها مفضلة قليلاً بين الممارسين .

مسائل محلولة

Solved Problems

٧ – ١

تعظيم : $z = 2x_1 + x_2$

علماً بأن : $2x_1 + 5x_2 \leq 17$ (١)

$3x_1 + 2x_2 \leq 10$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة ولا سلبية

بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة وتطبيق طريقة السمبلكس على البرنامج الخطى الناتج ، نحصل على الجدول 1 كحل أمثل بعد محاولة واحدة .

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	11/3	1	−2/3	31/3
x_1	1	2/3	0	1/3	10/3
	0	1/3	0	2/3	20/3

جدول 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	1	−5/2	11/6	17/2
x_1	1	0	0	0	1/3	3
x_2	0	1	0	1/2	−1/2	1/2
	0	0	0	1/2	1/6	13/2.

جدول 2

التقريب الأول للبرنامج (١) ، $x_2^* = x_4^* = 0$ ، $x_3^* = 31/3$ ، $x_1^* = 10/3$. كلًا من x_3^* و x_1^* غير صحيحة . نختار x_1^* اختيارياً ، ونعتبر القيد الممثل بالصف الثانى من الجدول 1 ، وهو الصف الذى يحدد x_1^* .

$$x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_4 = \tfrac{10}{3}$$

بكتابه كل كسر كمجموع أعداد صحيحة وكسر بين 0 ، 1 نحصل على

$$x_1 + (0 + \tfrac{2}{3})x_2 + (0 + \tfrac{1}{3})x_4 = 3 + \tfrac{1}{3} \qquad \text{or} \qquad \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{1}{3} = 3 - x_1$$

وليكون الطرف الأيسر من هذه المعادلة غير سلبى ، نحصل على

$$\tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_4 - \tfrac{1}{3} \geq 0 \qquad \text{or} \qquad 2x_2 + x_4 \geq 1$$

كقيد جديد . وبإعادة كتابة قيود البرنامج الأصلى (١) فى الصورة المقترحة فى الجدول 1 وإضافة القيد الجديد ، نوجد البرنامج الجديد .

تعظيم : $z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$

علماً بأن : (٢)

$$\begin{aligned} \tfrac{11}{3}x_2 + x_3 - \tfrac{2}{3}x_4 &= \tfrac{31}{3} \\ x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 \qquad + \tfrac{1}{3}x_4 &= \tfrac{10}{3} \\ 2x_2 \qquad + x_4 &\geq 1 \end{aligned}$$

كل القيود أعداد صحيحة ولا سلبية

يدخل المتغير الزائد x_5 ، والمتغير الصناعى x_6 فى المتباينة للقيد (2) ، وتطبق بعد ذلك الطريقة ذات المرحلتين باعتبار x_1, x_3, x_6 المجموعة الأولية من المتغيرات الأساسية . وينتج الجدول 2 بعد محاولة واحدة غالباً . ويكون التقريب الأول للبرنامج (2) هو $x_4^* = x_5^* = 0$ ، $x_3^* = 17/2$ ، $x_2^* = 1/2$ ، $x_1^* = 3$: اختيار x_2^* لإنتاج القيد الجديد ، نحصل من الصف الثالث للجدول 2 على

$$\tfrac{1}{2}x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 - \tfrac{1}{2} \geq 0 \qquad \text{or} \qquad x_4 + x_5 \geq 1$$

يعطى هذا بالاشتراك مع القيود فى البرنامج (2) فى الصيغة المقترحة بالجدول 2 ، يعطى برنامج الأعداد الصحيحة الجديد .

تعظيم : $z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

علماً بأن : (٣)

$$\begin{aligned} x_3 - \tfrac{5}{2}x_4 + \tfrac{11}{6}x_5 &= \tfrac{17}{2} \\ x_1 \qquad\qquad + \tfrac{1}{3}x_5 &= 3 \\ x_2 \quad + \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_5 &= \tfrac{1}{2} \\ x_4 + \ x_5 &\geq 1 \end{aligned}$$

كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

بتجاهل قيد الأعداد الصحيحة وتطبيق الطريقة ذات المرحلتين على البرنامج (3) ، باعتبار x_1 x_2 x_3 ، x_7 (صناعى) كمجموعة أساسية أولية ، نحصل على الحل الأمثل بالجدول 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	0	0	1	−13/3	0	11/6	20/3
x_1	1	0	0	−1/3	0	1/3	8/3
x_2	0	1	0	1	0	−1/2	1
x_5	0	0	0	1	1	−1	1
	0	0	0	1/3	0	1/6	19/3

جدول 3

تبدأ محاولة جديدة للعملية من $x_1^* = 8/3$ فى الجدول 3 . وينتج هذا برنامجاً له حل أعداد صحيحة ، وفيه $z^* = 6$ $x_2^* = 0$ $x_1^* = 3$ وهذا الحل هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة (1) .

٧ – ٢ ناقش صدق الهندسة التحليلية للقيد المضاف فى المسألة ٧ – ١ .

مبدئياً ، تتكون المنطقة الممكنة من كل النقط فى الربع الأول ، والتى لها إحداثيات صحيحة ، وتحقق

$$2x_1 + 5x_2 \leq 17 \quad \text{and} \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

وهذه هى النقط الموضحة بالعلامة × فى الشكل ٧ – ١ (أ) .

القيد المضاف الى البرنامج الأصلى (1) هو $2x_2 + x_4 \geq 1$ ، ويؤدى إلى البرنامج (2) . وبحل معادلة القيد الثانى فى البرنامج (2) بالنسبة لـ x_4 ، وتعويض النتيجة فى القيد الجديد ، نحصل على

$$2x_2 + (10 - 3x_1 - 2x_2) \geq 1 \quad \text{or} \quad x_1 \leq 3$$

ويوضح تأثير إدخال $x_1 \leq 3$ فى الشكل ٧ – ١ (ب) : وتفصل شريحة صغيرة من المنطقة الممكنة تحتوى على التقريب الأول الحالى ، ومع ذلك لا تفقد أى نقطة أعداداً صحيحة .

٧ – ٣ حل المسألة ١ – ١٢ .

التقريب الأول لبرنامج الأعداد الصحيحة (انظر المسألة ٤ – ١٤ بإعادة تسمية المتغيرات) هو $x_{13}^* = 500$ $x_{12}^* = 700$ $x_{21}^* = 1000$، $x_{11}^* = x_{22}^* = x_{23}^* = 0$ عند $z^* = 27\,600¢$ سنتاً . وحيث إن هذا التقريب الأول أعداد صحيحة ، فإنه يكون الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة . وتحت هذا الجدول الأمثل ، ٧٠٠ صندوق سينقلون من المصنع 1 إلى المتعهد 2 ، و ٢٥٠٠ صندوق من المصنع 1 إلى المتعهد 3 ، و ١٠٠٠ صندوق من المصنع 2 إلى المتعهد 1 . والتكلفة الكلية للنقل هى ٢٧٦ دولار .

٧ – ٤ حل المسألة ١ – ٥

البرنامج (٤) فى المسألة ١ – ٥ بعد وضعه فى الصيغة القياسية يكون

تصغير : $z = 20x_1 + 22x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + Mx_9 + Mx_{10}$

علماً بأن :

$$\begin{aligned}
4x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 \qquad\qquad + x_9 &= 54 \\
4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \quad - x_5 \qquad\qquad + x_{10} &= 65 \\
x_1 \qquad + x_6 &= 7 \\
x_2 \qquad + x_7 &= 7 \\
x_3 \qquad + x_8 &= 7
\end{aligned}$$

مع : كل المتغيرات أعداد صحيحة ولا سلبية

بتجاهل قيود الأعداد الصحيحة وحل هذا البرنامج باستخدام الطريقة ذات المرحلتين نحصل على جدول 1 بعد ثلاث محاولات .
يكون التقريب الأول للبرنامج (1) هو $x_1^* = 1.75,\ x_2^* = 7\ \ x_3^* = 5,$ عند $z^* = 279.$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_1	1	0	0	−0.3	0.05	0	−1.6	0	1.75
x_3	0	0	1	0.2	−0.2	0	0.4	0	5
x_6	0	0	0	0.3	−0.05	1	1.6	0	5.25
x_2	0	1	0	0	0	0	1	0	7
x_8	0	0	0	−0.2	0.2	0	−0.4	1	2
	0	0	0	2.4	2.6	0	2.8	0	−279

جدول 1

يقرب هذا التقريب الأول إلى حل الأعداد الصحيحة الممكن $x_3 = 5.\ \ x_2 = 7\ \ x_1 = 2$ عند $z = 284$. ويتبع ذلك أن الحد الأدنى المطلوب لايمكن أن يزيد عن 284 . وعلى العكس .. بالرجوع إلى البرنامج الأصلى (4) فى المسألة ١ ــ ٥ نرى أن قيم الأعداد الصحيحة للمتغيرات z هى قيم صحيحة زوجية ، ومن ثم بالنظر إلى الحد الأسفل $z^* = 279$ المعطى بالتقريب الأول ، فإن الحد الأدنى z لايمكن أن يقل عن 280 . لذلك فإن الحد الأدنى لـ z يمكن أن يكون 280,282 ، أو 284 فقط . ونكون متأكدين أن الخطأ فى أخذ $(2, 7, 5)^T$ كحل أمثل هو على الأسوأ .

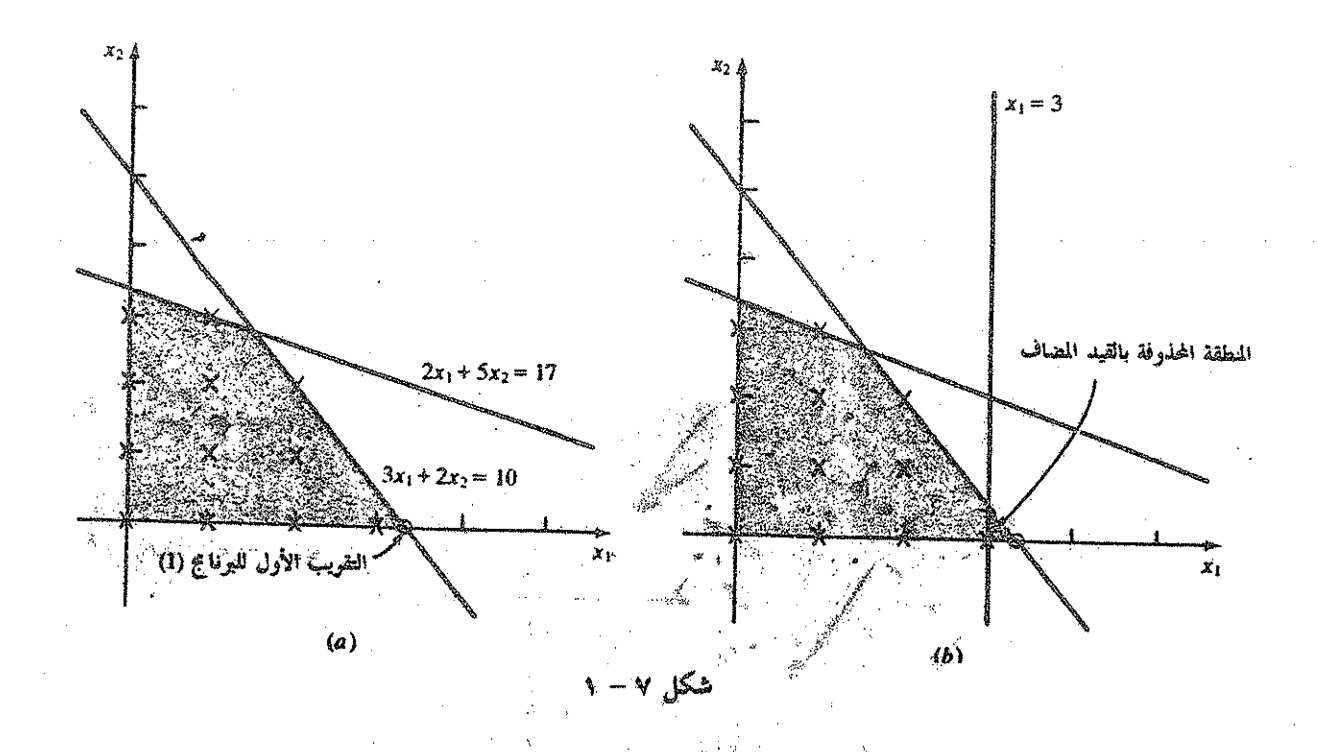
$$\frac{284 - 280}{280} = 1.43\,\%$$

(ابتداءً من الجدول 1 ، نجد بعد ست محاولات لطريقة جومورى أن $(2, 7, 5)^T$ هو فى الحقيقة حل أمثل) .

٧ – ٥ طور طريقة القطع لجومورى Develop the Gomory cut algorithm

اعتبر الجدول الأمثل الناتج من تطبيق طريقة السمبلكس لبرنامج أعداد صحيحة ، مع تجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، افرض أن أحد المتغيرات الأساسية x_b ليس عدداً صحيحاً ، فيجب أن تكون معادلة القيد المناظر لصف الجدول الذى يحدد x_b من الصيغة

$$x_b + \sum y_j x_j = y_0 \qquad (1)$$



شكل ٧ – ١

حيث يكون المجموع أكبر من كل المتغيرات غير الأساسية . والحدود y هي المعاملات ، والحد الثابت الذى يظهر فى صف الجدول الذى يحدد x_b . وحيث إن x_b ناتجة من (1) بإعطاء المتغيرات غير الأساسية قيماً صفرية ، فيتبع ذلك أن y_0 هى الأخرى غير صحيحة .

أكتب كل حد ــ y فى (1) كمجموع صحيح وكسر غير سلبي أقل من واحد :

$$y_0 = i_0 + f_0 \qquad \text{و} \qquad y_j = i_j + f_j$$

وتكون بعض f_j أصفاراً ، ولكن f_0 من المؤكد أن تكون موجبة .

تصبح المعادلة (1) :

$$x_b + \sum (i_j + f_j)x_j = i_0 + f_0$$

أو

$$x_b + \sum i_j x_j - i_0 = f_0 - \sum f_j x_j \qquad (٢)$$

إذا أريد جعل كل متغير x صحيحاً ، فإن الطرف الأيسر من (2) يكون صحيحاً ، وذلك يرغم الطرف الأيمن أيضاً ليكون صحيحاً . وحيث إن كُلاً من x_j ، f_j لاسلبية ، لذلك يكون $\sum f_j x_j$ أيضاً كذلك . ويكون الطرف الأيمن فى (2) صحيحاً ، وأصغر من الكسر الموجب ناقصاً واحداً ، أى أنه ، عدد صحيح غير موجب .

$$\sum f_j x_j - f_0 \geq 0 \qquad \text{أو} \qquad f_0 - \sum f_j x_j \leq 0$$

وهذا هو القيد الجديد فى طريقة جوموری .

٧ – ٩ طوّر طريقة قطع أخرى .

اعتبر (١) فى المسألة ٧ ــ ٥ . إذا كان كل متغير غير أساس x_j صفرياً ، فإن $y_0 = x_0$ تكون غير صحيحة . وإذا كان عدداً صحيحاً ، فإن أحد المتغيرات غير الأساسية x_0 على الأقل يجب أن تختلف عن الصفر . ولما كان من المطلوب أن تكون كل المتغيرات صحيحة ولاسلبية ، فيتبع ذلك أن واحداً على الأقل من المتغيرات غير الأساسية يجب أن يكون أكبر من أو يساوى 1 . وهذا بالتالى يفرض أن مجموع كل المتغيرات الأساسية يجب أن يكون أكبر من أو يساوى 1 . وإذا استخدم هذا الشرط كقيد جديد ليلتصق برنامج الأعداد الصحيحة الأصلى ، فنحصل على طريقة القطع التى وضعها دانزج أولاً .

٧ — ٧ استخدم طريقة القطع المطورة فى المسألة ٧ ــ ٦ لحل

$$z = 3x_1 + 4x_2 \quad : \text{تعظيم}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad : \text{علماً بأن}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 9$$

x_1 ، x_2 صحيحة ولاسلبية

بإدخال المتغيرات الزائدة x_4 ، x_3 وحل البرنامج الناتج ، وبتجاهل شرط الأعداد الصحيحة ، نحصل على الجدول 1 بطريقة السمبلكس

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	0	0.75	−0.25	2.25
x_2	0	1	−0.5	0.5	1.5
	0	0	0.25	1.25	12.75

جدول 1

التقريب الأول هو $x_2^* = 1.5$ $x_1^* = 2.25$ وهو ليس صحيحاً ، والمتغيرات غير الأساسية هى x_4 ، x_3 ، ولذلك فإن القيد الجديد يكون $x_3 + x_4 \geq 1$ بإلحاق هذا المتغير بالجدول 1 ، بعد إدخال المتغير الزائد x_5 والمتغير الصناعى x_6 ، وحل البرنامج الناتج بطريقة ذات المرحلتين ، نوجد الجدول 2 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	0	−1	0.75	1.5
x_2	0	1	0	1	−0.5	2
x_3	0	0	1	1	−1	1
	0	0	0	1	0.25	12.5

جدول 2

يتبع ذلك ، من جدول 2 أن : $x_3^* = 1$ $x_2^* = 2$ $x_1^* = 1.5$ مع x_5 ، x_4 متغيرات غير أساسية . وحيث إن هذا الحل هو حل أعداد غير صحيحة ، فإننا نأخذ $x_4 + x_5 \geq 1$ كقيد جديد . وبإلصاق هذا القيد فى الجدول 2 ، بعد إدخال المتغير الزائد x_6 ، المتغير الصناعى x_7 . وحل البرنامج الناتج بطريقة ذات المرحلتين ، نوجد الجدول 3 .

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	−1.75	0	0.75	0.75
x_2	0	1	0	1.5	0	−0.5	2.5
x_3	0	0	1	2	0	−1	2
x_5	0	0	0	1	1	−1	1
	0	0	0	0.75	0	0.25	12.25

جدول 3

من الجدول 3 ، فإن الحل الأمثل الحالى حل أعداد غير صحيحة فى المتغيرات غير الأساسية x_6 x_4 . ويكون القيد الجديد هو $x_4 + x_6 \geq 1$ بإلصاق هذا القيد فى الجدول 3 ، وحل البرنامج الناتج بالطريقة ذات المرحلتين ، نحصل على $x_2^* = 3$ $x_1^* = 0$ عند $z^* = 12$. وحيث إن هذا الحل أعداد صحيحة ، فيكون هو الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلى .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٧ – ٨ استخدم طريقة جوموری فى

تعظيم : $z = x_1 + 9x_2 + x_3$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9$

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

٧ – ٩ حل المسألة ١ – ٣ باستخدام طريقة جوموری

٧ – ١٠ حل المسألة ٦ – ٩ باستخدام طريقة جوموری

٧ – ١١ حل المسألة ٦ – ١٠ باستخدام طريقة جوموری

٧ – ١٢ حل المسألة ٦ – ١١ باستخدام طريقة جوموری

٧ – ١٣ حل المسألة ٦ – ٩ بطريقة القطع للمسألة ٧ – ٦ .

برمجة الأعداد الصحيحة : طريقة النقل

Integer Programming: The Transportation Algorithm

الصيغة القياسية STANDARD FORM

تتضمن مشكلة النقل مصادر m لكل منها عدد متاح من الوحدات $a_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ من منتج متجانس ، وكذلك أماكن وصول n كل منها تتطلب عدد من الوحدات $b_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ من هذا المنتج . والأعداد a_i ، b_j أعداد صحيحة موجبة . وتعطى التكلفة c_{ij} اللازمة لنقل وحدة واحدة من المنتج من المصدر i إلى مكان الوصول j ، وتعطى التكلفة لكل i ، j . يحدد الهدف من إنشاء جدول انتقال أعداد صحيحة (يجب ألا يكون المنتج كسرياً) ليواجه كل المتطلبات من المخزون الحالى بتكلفة انتقال كلية أقل ما يمكن . من المفروض أن الإمداد الكلى والطلب الكلى متساويان ، بمعنى :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (\text{١} - \text{٨})$$

تتحقق المعادلة (٨ - ١) بإيجاد إما أماكن وصول افتراضية بمتطلبات تساوى الزائد من المنتجات ـــ إذا كان الطلب الكلى يقل عن الإمداد الكلى ـــ أو مصادر افتراضية بإمداد يساوى النقص فى الطلب الكلى إذا كان الطلب الكلى يزيد على الإمداد الكلى (انظر المسألة ٨ - ١) .

دع x_{ij} تمثل العدد (غير المعروف) من الوحدات الذى يجب أن ينقل من المصدر i إلى مكان الوصول j ، فيكون النموذج الرياضى القياسى لهذه المسألة هو :

تصغير :

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

علماً بأن :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (\text{٢} - \text{٨})$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

مع : كل x_{ij} صحيحة ولا سلبية

طريقة النقل THE TRANSPORTATION ALGORITHM

التقريب الأول للنموذج (٨ - ٢) يكون دائماً أعداداً صحيحة (انظر المسألة ٧ - ٣) ، لذلك فهو دائماً الحل الأمثل . وفضلاً عن تحديد هذا التقريب الأول بالتطبيق المباشر لطريقة السمبلكس ، فإنه من الأكفأ العمل بالجدول ٨ - ١ . وكل مدخلات الجدول تشرح نفسها

باستثناء الحدين v_j ، u_i اللذين سيشرحان بعد ذلك . وطريقة النقل هي طريقة السمبلكس بالشكل الموجود بالجدول ٨ — ١ عادة ، تتضمن :

أ ــ إيجاد حل أولى أساسى ممكن .
ب ــ اختبار الحل لمعرفة أمثليته .
حـ ــ تحسين الحل إذا لم يكن أمثل .
د ــ تكرار الخطوات ب ، حـ ، حتى نحصل على الحل الأمثل .

أماكن الوصول

المصادر	1	2	3	...	n	الإمداد	u_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1	u_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2	u_2
....	....	....	....	...	....	....	....
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m	u_m
الاحتياج	b_1	b_2	b_3	...	b_n		
v_j	v_1	v_2	v_3	...	v_n		

جدول ٨ — ١

حل أساسى أول AN INITIAL BASIC SOLUTION

قاعدة الركن الشمالى الغربى . ابتداءً بالخلية (1, 1) فى الجدول ٨ — ١ (الركن الشمالى الغربى) ، خصص لـ x_{11} كل الوحدات الممكنة ، دون الخروج عن القيود . وهذا سيكون الأصغر من b_1 ، a_1 . بعد ذلك استمر فى التحرك خلية واحدة لجهة اليمين ، إذا تبقى بعض الإمداد ، أو لم يتبق أى امداد ، تحرك خلية لأسفل . فى كل خطوة ، خصص كل الوحدات الممكنة لهذه الخلية (المتغير) تحت الاعتبار ، دون الإخلال بالقيود : لا يمكن أن يزيد مجموع تخصيصات الصف رقم i عن a_i، ولا يمكن أن يزيد مجموع تخصيصات العمود رقم j عن b_j، ولا يمكن أن يكون أى تخصيص سالباً . وقد يكون التخصيص صفرياً . (انظر المسألة ٨ — ٣)

طريقة فوجل : *Vogel's method* لكل صف ولكل عمود يتبقى لهم بعض الإمدادات أو بعض الاحتياجات . احسب الفرق ؟ وهو الفرق اللاسلبى بين أصغر تكلفتى نقل c_{ij} مرتبطة بالمتغيرات غير المخصصة فى هذا الصف أو العمود ، اعتبر الصف أو العمود الذين لهما أكبر فرق ، فى حالة أى رابطة (تساوٍ) ، اختر أحدهما . فى هذا الصف أو العمود ، خصص هذا المتغير (الخلية) غير المخصصة ، والتى لها أقل وحدة تكلفة نقل ، وخصص لها كل الوحدات الممكنة ، دون الإخلال بالقيود . أعد حساب الفروق الجديدة ، وكرر الطريقة السابقة حتى استيفاء كل الاحتياجات . (انظر المسألة ٨ — ٥ ، ٨ — ٦) .

المتغيرات التى تعين لها قيم بإحدى هاتين الطريقتين تصبح المتغيرات الأولية الأساسية . وتكون المتغيرات غير المعينة (غير المخصصة) متغيرات غير أساسية ، ولذلك تكون صفراً . وهنا نفضل الأخذ بعدم إدخال متغيرات غير أساسية فى الجدول ٨ — ١ ــ من المفهوم أنها أصفاراً ــ مع توضيح تخصيصات المتغيرات الأساسية بالخط السميك .

وقاعدة الركن الشمالى الغربى هى أسهل الطريقتين فى التطبيق ، ومع ذلك فإن طريقة فوجل ، التى تأخذ فى الاعتبار تكاليف نقل الوحدة ، عادة ما تنتج حلولاً أقرب إلى المثالية . (انظر المسألة ٨ — ٥) .

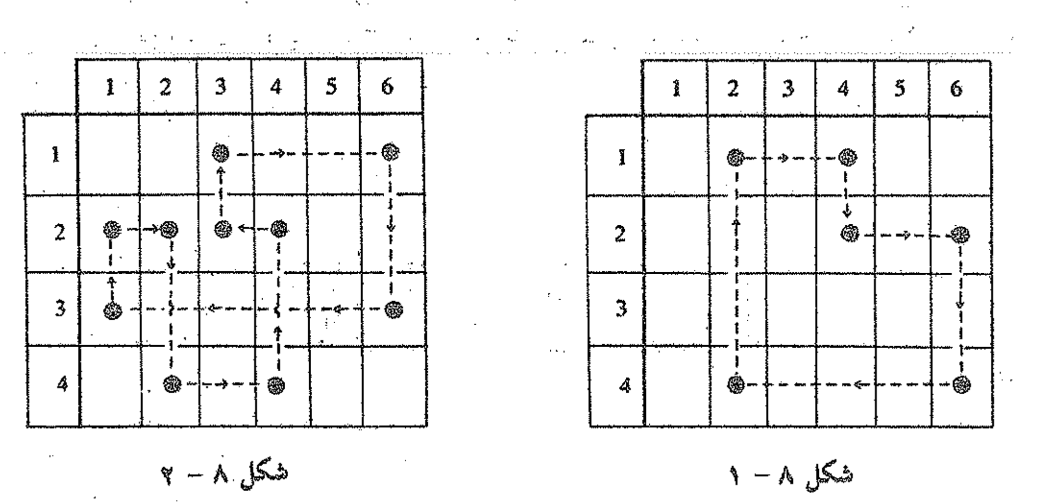
اختبار الأمثلية TEST FOR OPTIMALITY

عين القيمة صفر لأى من (أى واحدة) v_j ، u_i فى الجدول ٨ – ١ . واحسب الباقى من u_i ، v_j ، بحيث يكون لكل متغير أساسى $u_i + v_j = c_{ij}$. بعد ذلك ، لكل متغير غير أساسى ، احسب الكمية $c_{ij} - u_i - v_j$ إذا كانت كل هذه الكميات لا سلبية ، يكون الحل الحالى حلاً أمثل ، وإلا ، فلا يكون أمثل . (انظر المسألة ٨ – ٤ ، ٨ – ٨) .

تحسين الحل IMPROVING THE SOLUTION

تعريف : الحلقة هى تسلسل (تتابع) من الخلايا فى الجدول ٨ – ١ ، بحيث إن : (أ) كل زوج من الخلايا المتتالية يقع إما فى نفس الصف أو نفس العمود : (ب) لا تقع ثلاث خلايا متتالية فى نفس الصف أو العمود : (حـ) تقع الخلايا الأولى والأخيرة فى نفس الصف أو نفس العمود : (د) لا تظهر أى خلية أكثر من مرة واحدة فى التتابع .

مثال ٨ – ١ التتابعات [(1,2), (1,4), (2,6), (4,6), (4,2)] ، [(1,3), (1,6), (3,6), (3,1), (2,1), (2,2), (4,2), (4,4), (2,4), (2,3)] الموضحة بالأشكال ٨ – ١ ، ٨ – ٢ على التوالى تمثلان حلقات . لاحظ أنه من الممكن أن يحتوى الصف أو العمود على أكثر من خليتين فى الحلقة (مثل الصف الثانى فى الشكل ٨ – ٢) ، على ألا تكون هناك أكثر من اثنتين متتاليتين .



شكل ٨ – ٢   شكل ٨ – ١

اعتبر المتغير غير الأساسى المناظر لأعلى قيمة سالبة $c_{ij} - u_i - v_j$ المحسوبة فى اختبار الأمثلية ليكون المتغير الداخل . انشىء حلقة تتكون بالتحديد من هذا المتغير الداخل (الخلية) والمتغيرات الأساسية الحالية (الخلايا) . خصص للخلية الداخلة أكبر عدد ممكن من الوحدات ، بحيث أنه ، بعد عمل التعديل المناسب فى باق الخلايا فى الحلقة ، لا يحدث إخلال بالقيود ، وتبقى كل التخصيصات لا سلبية ، ويؤول أحد المتغيرات الأساسية القديمة إلى الصفر (رغم كونه متغيراً أساسياً) . انظر المسألة ٨ – ٤ .

الانحراف DEGENERACY

فى ضوء الشرط (٨ – ١) يكون عدد $n + m - 1$ فقط من معادلات القيود فى النموذج (٨ – ٢) مستقلة . لذلك ففى المسائل ٣ – ١٣ ، ٣ – ١٤ يتميز الحل الأساسى الممكن غير المنحرف بالقيم الموجبة لعدد $n + m - 1$ من المتغيرات الأساسية . وإذا نتج عن عملية تحسين الحل الأساسى الحالى اثنان أو أكثر من المتغيرات الأساسية المختصرة إلى الصفر فى وقت واحد ، فإن أحدها فقط هو المسموح أن يبقى غير أساسى . (باختيار من يحل المسألة ، بالرغم من تفضيل المتغير ذى تكلفة نقل الوحدة الأكبر) . ويبقى المتغير أو المتغيرات الأخرى أساسية ، ولكن بتخصيص قيم صفرية لها ينحرف الحل الأساسى الجديد .

وتعطى طريقة الركن الشمالى الغربى دائماً حلاً أساسياً أولياً (المسألة ٨ – ٢) ، ولكن قد تفشل فى إعطاء قيم موجبة عددها $n + m - 1$ (المسألة ٨ – ٣) ، ولذلك تؤول إلى حل منحرف . وإذا استخدمت طريقة فوجل ولم تعطِ نفس العدد من القيم الموجبة ، فإننا نخصص متغيرات إضافية ذات قيم صفرية كمتغيرات أساسية (انظر المسألة ٨ – ٦) . والاختيار متاح إلى الحد أن المتغيرات الأساسية لا يمكن أن تكون حلقة ، ويعطى التفضيل دائماً للمتغيرات ذات أقل تكلفة نقل .

وينتج تحسين الحل المنحرف عن إحلال أحد المتغيرات الأساسية ذات القيم الصفرية بمتغير آخر . (يحدث هذا فى التحسين الأول فى المسألة ٨ – ٤) . وبالرغم من أن الحلين المنحرفين هما متماثلان فعلياً — مع تغيير تخصيص المتغيرات الأساسية فقط دون قيمها — فإن محاولة إضافية للحل تكون مطلوبة لاستكمال طريقة النقل .

مسائل محلولة

Solved Problems

٨ – ١ تواجه شركة تأجير سيارات مشكلة تخصيص ناتجة من اتفاقيات التأجير التى تسمح بارتجاع العربات المؤجرة إلى أماكن غير التى تم التأجير فيها . يوجد فى الوقت الحالى مكانان لذلك (مصدران) بهما ١٥ ، ١٣ عربة زائدة على التوالى ، وأربعة أماكن ارتجاع (أماكن وصول) تتطلب ٩ ، ٦ ، ٧ ، ٩ عربات على التوالى . وتكلفة النقل للوحدة (بالدولار) بين الأماكن هى كما يلى :

الوصول	مكان الوصل 1	مكان الوصل 2	مكان الوصل 3	مكان الوصل 4
المصدر 1	45	17	21	30
المصدر 2	14	18	19	31

جدول النقل الأول (جدول ٨ – ١) لجدول أقل تكلفة .

مكان الوصول

المصدر	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45	17	21	30	15	
2	14	18	19	31	13	
3 (وهمى)	0	0	0	0	3	
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j						

جدول 1A

حيث إن الطلب الكلى (٩ + ٦ + ٧ + ٩ = ٣١) يزيد على الإمداد الكلى (١٥ + ١٣ = ٢٨) ، فإنه ينشأ مصدر وهمى له إمداد يساوى الـ ٣ وحدات الناقصة . فى الحقيقة .. فإن النقل من هذه المصادر الوهمية لا يتم ، وبالتالى فإن تكلفة النقل منها تساوى صفراً . ويمثل التخصيص الموجب من هذه المصادر لأى مكان وصول العربات ، التى لا يمكن أن تسلم نتيجة النقص فى الإمداد ، وهو النقص الذى سيواجهه مكان الوصول فى ظل جدول النقل الأمثل . فى هذه المسألة يصير الجدول (٨ – ١) الجدول 1 A . ولا تدخل x_{ij}, u_i ، v_j ، حيث إنها غير معروفة حالياً .

٨ – ٢   لجدول النقل $m \times n$ بين أن قاعدة الركن الشمالى الغربى تقيم $n + m - 1$ من المتغيرات .

لاحظ أنه بعد معالجة الخلية (1,1) تطبق الطريقة بنفس الصيغة على الجدول الأصغر ، ويكون الركن الشمالى الغربى الجديد هو ، إما الخلية (1,2) ، أو الخلية الأصلية (2,1) . نفرض أن النتيجة (بالحث الرياضى) تتحقق للجدول الأصغر الذى يتكون من ، إما $m \times (n-1)$ ، أو $(m-1) \times n$. فى كلتا الحالتين $n + m - 2$ متغير تقيم فى الجدول الأصغر ، حيث تقيم المتغيرات فى الجدول الأصغر .

$$(n + m - 2) + 1 = n + m - 1$$

ومن ثم تتحقق النتيجة بوضوح عند $n = m = 1$. ويكون الحل بالحث الرياضى كاملاً .

٨ – ٣   استخدم قاعدة الركن الشمالى الغربى للحصول على التخصيص الأول للجدول 1 A .

نبدأ بـ x_{11} ، ونعين لها الحد الأدنى $a_1 = 15$ and $b_1 = 9$. لذلك فإن $x_{11} = 9$ ، تاركة ست عربات زائدة فى المصدر الأول . نتحرك بعد ذلك خلية واحدة لجهة اليمين ، ونخصص $x_{12} = 6$. وهذان التخصيصان يستهلكان الإمداد فى المصدر الأول . نبدأ التحرك خلية واحدة لأسفل ، ونأخذ فى الاعتبار x_{22} . لاحظ ، مع ذلك ، أن الاحتياج فى مكان الوصول الثانى قد تم استيفاؤه بـ x_{12} . وحيث إننا لايمكن أن نسلم عربات زائدة لهذا المكان بدون زيادة احتياجه ، لذلك نخصص $x_{22} = 0$ ، ثم نتحرك خلية واحدة لجهة اليمين . وبالاستمرار فى هذه الطريقة نحصل على الحل المنحرف (أقل من $6 = 1 - 3 + 4$ مدخلات موجبة) الموضح فى الجدول 1 B .

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	(45) 9	(17) 6	(21)	(30)	15	
2	(14)	(18) 0	(19) 7	(31) 6	13	
3 (وهمى)	(0)	(0)	(0)	(0) 3	3	
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j						

جدول 1 B

٨ - ٤ حل مشكلة النقل الموصوفة فى المسألة ٨ ـ١

لتحديد ما إذا كان التخصيص الأول الموجود فى الجدول 1 B مثالياً ، نحسب أولاً الحدود v_j ، u_i بالنسبة للخلايا المتغيرات الأساسية فى الجدول . وباختيار $u_2 = 0$ (حيث إن الصف الثانى يحتوى على متغيرات أساسية أكثر من أى صف أو عمود ، فإن هذا الاختيار سيسهل الحسابات) ، ونجد :

الخلية (2, 2) $\quad u_2 + v_2 = c_{22}, \quad 0 + v_2 = 18, \quad \text{or} \quad v_2 = 18$

الخلية (2, 3) $\quad u_2 + v_3 = c_{23}, \quad 0 + v_3 = 19, \quad \text{or} \quad v_3 = 19$

الخلية (2, 4) $\quad u_2 + v_4 = c_{24}, \quad 0 + v_4 = 31, \quad \text{or} \quad v_4 = 31$

الخلية (1, 2) $\quad u_1 + v_2 = c_{12}, \quad u_1 + 18 = 17, \quad \text{or} \quad u_1 = -1$

الخلية (1, 1) $\quad u_1 + v_1 = c_{11}, \quad -1 + v_1 = 45, \quad \text{or} \quad v_1 = 46$

الخلية (3, 4) $\quad u_3 + v_4 = c_{34}, \quad u_3 + 31 = 0, \quad \text{or} \quad u_3 = -31$

وتوضح هذه القيم فى الجدول 1 C . بعد ذلك نحسب الكميات $c_{ij} - u_i - v_j$ لكل خلية متغير غير أساسى فى الجدول 1 B .

خلية (1, 3) $\quad c_{13} - u_1 - v_3 = 21 - (-1) - 19 = 3$

خلية (1, 4) $\quad c_{14} - u_1 - v_4 = 30 - (-1) - 31 = 0$

خلية (2, 1) $\quad c_{21} - u_2 - v_1 = 14 - 0 - 46 = -32$

خلية (3, 1) $\quad c_{31} - u_3 - v_1 = 0 - (-31) - 46 = -15$

خلية (3, 2) $\quad c_{32} - u_3 - v_2 = 0 - (-31) - 18 = 13$

خلية (3, 3) $\quad c_{33} - u_3 - v_3 = 0 - (-31) - 19 = 12$

وتسجل هذه النتائج أيضاً فى الجدول 1 C بين قوسين .

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	[45] 9	[*17] 6	[21] (3)	[30] (0)	15	−1
2	[14] (−32) +	[18] 0	[19] 7	[31] 6	13	0
3 (وهمى)	[0] (−15)	[0] (13)	[0] (12)	[0] 3	3	−31
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j	46	18	19	31		

الجدول 1 C

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45 9	17 6	21 (−29)	30 (−32) +	15	31
2	14 0	18 (32)	19 7	31 6	13	0
3 (وهمي)	0 (17)	0 (45)	0 (12)	0 3	3	−31
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j	14	−14	19	31		

جدول 1 E

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45 3	17 6	21	30 6	15	
2	14 6	18	19 7	31	13	
3 (وهمي)	0	0	0	0 3	3	
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j						

جدول 1 F

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45 (29)	17 6	21 3	30 6	15	0
2	14 9	18 (3)	19 4	31 (3)	13	−2
3 (وهمي)	0 (14)	0 (13)	0 (9)	0 3	3	−30
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j	16	17	21	30		

جدول 1 H

وحيث إنه ــ على الأقل ــ أحد هذه القيم $(c_{ij} - u_i - v_j)$ سالب ، فإن الحل الحالى ليس أمثل ، ويمكن الحصول على حل أفضل بزيادة التخصيص للمتغير (الخلية) الذى له أكبر مدخل سالب ، وهو هنا الخلية (2,1) فى الجدول 1 C . ونفعل ذلك بوضع علامة + ثقيلة (للدلالة على الزيادة) فى الخلية (2,1) ، وتحديد حلقة تحتوى على ، بالإضافة إلى الخلية ، خلايا المتغيرات الأساسية فقط . وتوضح هذه الخلايا بالخطوط الثقيلة فى الجدول 1 C . والآن نزيد التخصيص للخلية (2,1) على قدر الإمكان ، وفى نفس الوقت ، نعدل تخصيصات الخلايا الأخرى فى الحلقة ، بحيث لا تخل بقيود الإمداد ، والاحتياج ، أو شرط اللاسلبية . وأى تخصيص موجب للخلية (2,1) سيجعل X_{22} سالباً . ولتجنب ذلك ، مع جعل x_{21} أساسياً ، نخصص $x_{21} = 0$ ، ونستبعد من مجموعة المتغيرات الأساسية . ويعطى الحل الأساسى الجديد ، الذى ينحرف أيضاً ، بالجدول 1 D .

	1	2	3	4	الإمداد	u_i
1	45 (9)	17 (6)	21	30	15	
2	14 (0)	18	19 (7)	31 (6)	13	
3 (وهمى)	0	0	0	0 (3)	3	
الاحتياج	9	6	7	9		
v_j						

الجدول 1 D

نتحقق الآن من أن هذا الحل أمثل . وبالعمل مباشرة بالجدول 1 D نحسب أولاً v_j u_i الجديدتين بالنسبة للمتغيرات الأساسية الجديدة ، ثم نحسب $c_{ij} - u_i - v_j$ لكل خلية متغير غير أساسي . ومرة أخرى نختار $u_2 = 0$ ، حيث إن الصف الثانى يحتوى على متغيرات أساسية أكثر من أى صف أو عمود آخر . هذه النتائج موضحة بين قوسين فى الجدول 1E . وحيث إن المدخلين سالبان ، فإن الحل الحالى ليس أمثل ، ويمكن الحصول على حل أفضل بزيادة التخصيص للخلية (1,4) . وتوضح الحلقة المتكاملة بالخط الثقيل فى الجدول 1 E ؛ وتتكون من الخلايا (1,4) , (2,4) , (2,1) , (1,1) . وأى كمية تضاف إلى الخلية (1,4) يجب أن تطرح فى نفس الوقت من الخلية (1,1) , (2,4) ، ثم تضاف إلى الخلية (2,1) ، بحيث لا تخل بقيود الإمداد والاحتياج . لذلك فإنه لا يمكن إضافة أكثر من ست عربات إلى الخلية (1,4) بدون جعل x_{24} سالبة . وبالتالى نعيد تخصيص $x_{14} = 4$ ، وعمل التعديلات اللازمة فى الحلقة ، ونستبعد x_{24} كمتغير أساسي . ويكون الحل الأساسى الجديد غير المنحرف كما هو مبين فى الجدول 1 F .

بعد اختبار آخر من اختبارات الأمثلية (سالب) والتغيير التابع فى الأساس ، نحصل على الجدول 1 H ، والذى يبين أيضاً نتائج اختبار الأمثلية للحل الأساسى الجديد . ومن الملاحظ أن كل قيمة $c_{ij} - u_i - v_j$ لا سلبية ؛ لذلك فإن الحل الجديد يكون أمثل . أى أن : $x^*_{12} = 6$ $x^*_{13} = 3$ $x^*_{14} = 6$ $x^*_{21} = 9$ $x^*_{23} = 4$ $x^*_{34} = 3$ مع كل المتغيرات الأخرى غير أساسية ، ولذلك فهى صفرية . وأكثر من ذلك .. فإن

$$z^* = 6(17) + 3(21) + 6(30) + 9(14) + 4(19) + 3(0) = \$547$$

وحقيقة أن بعض التخصيصات الموجبة تأتى من المصادر الوهمية ، وتدل على أن كل الاحتياجات لا يمكن استيفاؤها بهذا الجدول الأمثل . وعلى الأخص ، مكان الوصول 4 يتسلم ثلاث عربات أقل من احتياجاته .

٨ — ٥ استخدم طريقة فوجل لتحديد الحل الأساسى الأول لمشكلة النقل الموضحة فى المسألة ٨ — ١

أصغر تكلفتين فى الصف الأول فى الجدول 1 A هما 17 , 21 ؛ والفرق بينهما 4 . وأصغر تكلفتين فى الصف الثانى هما 18 , 14 ؛ والفرق بينهما أيضاً 4 . وأصغر تكلفتين فى الصف الثالث هما صفر ، صفر ؛ وبالتالى فإن الفرق بينهما أيضاً صفر . وبتكرار هذا التحليل على الأعمدة ، نوجد الفروق الموضحة على جانب الجدول 5A . وحيث إن أكبر فرق ، والموضح بالعلامة † ، يحدث عند العمود 4 ، فنخصص أكبر كمية ممكنة للمتغير (الخلية) من هذا العمود التى لها أقل تكلفة نقل للوحدة . لذلك $x_{34} = 3$ تستهلك كل الإمداد من المصدر 3 ، ونحذف الصف الثالث من أى اعتبار تال .

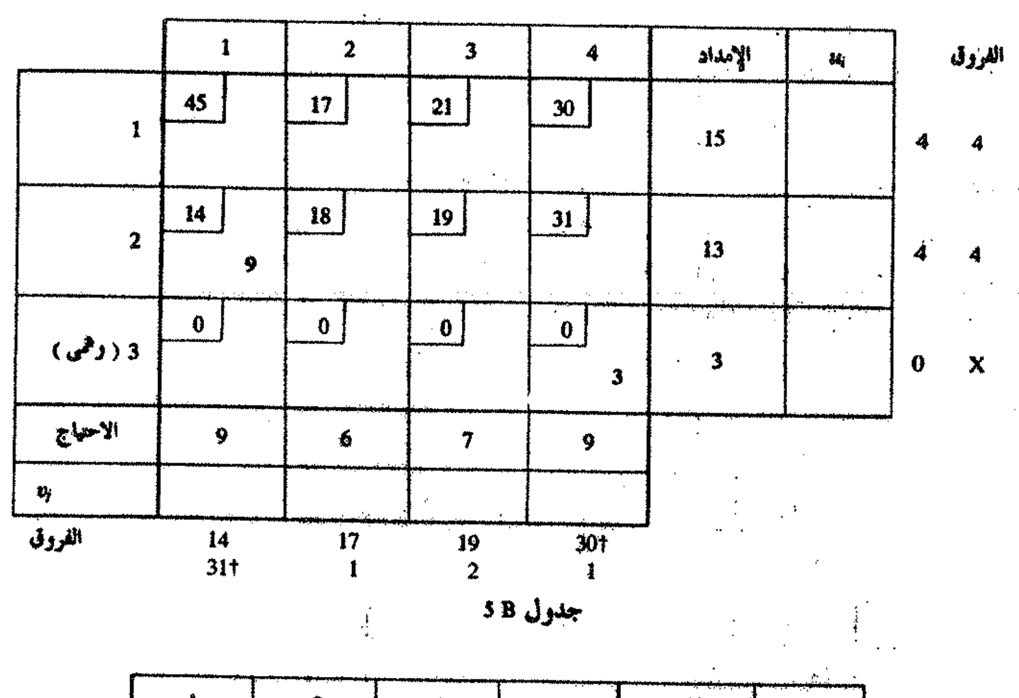
	1	2	3	4	الإمداد	u_i	الفروق
1	45	17	21	30	15		4
2	14	18	19	31	13		4
3 (وهمى)	0	0	0	0 3	3		0
الاحتياج	9	6	7	9			
v_j							
الفروق	14	17	19	30†			

جدول 5 A

نحسب الآن الفروق لكل صف وعمود من جديد ، دون الرجوع إلى العناصر فى الصف الثالث . وتوضح النتائج بجانب الجدول 5 B ، حيث إن المدخل X للفرق الثانى فى الصف 3 يعنى ببساطة أن هذا الصف قد ألغى . ويظهر أكبر فرق فى العمود 1 ، والمتغير فى هذا العمود الذى له أصغر تكلفة هو x_{21} (حيث إن الصف 3 قد ألغى من أى اعتبار) . ونخصص $x_{21} = 9$ ، وذلك يفى باحتياج مكان الوصول 1 . وتبعاً لذلك ، فلن يكون العمود 1 ضمن الحسابات التالية .

بحذف الصف 3 والعمود 1 ، توضح الفروق الجديدة فى الجدول 5 C ، حيث ، مرة أخرى ، تدل X على أن الحسابات لم تكن مطلوبة . ويحدث أكبر فرق فى الصف 1 ، والمتغير فى هذا الصف ، والذى له أقل تكلفة نقل للوحدة هو x_{12}. ونلاحظ أنه حتى إذا كانت c_{11} أقل من 17 ، x_{11} لم تكن قد أختيرت ، حيث تقع فى عمود سبق حذفه ، فإننا نضع $x_{12} = 6$ ، وذلك لمواجهة احتياج مكان الوصول 2 ، وحذف العمود 2 من أى حسابات تالية .

بحذف الصف 3 ، والأعمدة 1 , 2 ، توضح الفروق الجديدة بجانب الجدول 5 D . يحدث أكبر فرق فى الصف 2 ، وأقل تكلفة فى هذا الصف وفى الأعمدة التى مازالت تحت الاعتبار هى 19 . وبالتالى ، نخصص $x_{23} = 4$ ، التى تستهلك مع التخصيص السابق $x_{21} = 9$ كل الإمداد من المصدر 2 ، ونستبعد الصف 2 من أى اعتبار تال . بحذف الصفوف 2 , 3 ، لا يمكن حساب الفروق للأعمدة المتبقية . وهذا يدل على أن التخصيصات المتبقية أحادية التحديد . وهنا يجب وضع $x_{13} = 3$ ، $x_{14} = 6$ إذا أردنا مواجهة كل الاحتياجات بدون زيادة الإمدادات . وتكون النتيجة كما فى التخصيص الموضح بالجدول 1 H ، والذى سبق تحديده بالمسألة ٨ — ٤ ليكون حلاً أمثل .



	1	2	3	4	الإمداد	u_i	الفروق
1	45	17	21	30	15		4 4
2	14 (9)	18	19	31	13		4 4
3 (وهمي)	0	0	0	0 (3)	3		0 X
الاحتياج	9	6	7	9			
v_j							
الفروق	14 31†	17 1	19 2	30† 1			

جدول 5 B

	1	2	3	4	الإمداد	u_i	الفروق
1	45	17 (6)	21	30	15		4 4 4†
2	14 (9)	18	19	31	13		4 4 1
3 (وهمي)	0	0	0	0 (3)	3		0 X X
الاحتياج D	9	6	7	9			
v_j							
الفروق	14 31† X	17 1 1	19 2 2	30† 1 1			

جدول 5 C

	1	2	3	4	الإمداد	u_i	الفروق
1	45	17 (6)	21	30	15		4 4 4† 9
2	14 (9)	18	19 (4)	31	13		4 4 1 12†
3 (وهمي)	0	0	0	0 (3)	3		0 X X X
الاحتياج	9	6	7	9			
v_j							
الفروق	14 31† X X	17 1 1 X	19 2 2 2	30† 1 1 1			

جدول 5 D

حيث يتساوى الإمداد الكلى بالاحتياج الكلى ، فلا حاجة لإيجاد مصادر أو أماكن وصول وهمية . ويصبح جدول النقل هو الجدول 6 A . بتطبيق طريقة فوجل واستخدام نفس الرموز كما فى المسألة ٨ ـــ ٥ ، نصل إلى الجدول 6 B بعد حساب مجموعة الفروق الثابتة . وهناك تساوٍ ذو اتجاهين لأكبر فرق . وكطريقة جيدة نفحص كل عنصر ، وهنا الصف 1 (بحذف العمود3) ، والعمود 1 ، لهذا المتغير وبأقل تكلفة نقل وحدة . ومرة أخرى يكون هناك تساوٍ ، فنختار x_{12} . وبوضع $x_{12} = 700$ نفى بكل احتياج مكان الوصول 2 ، ومع التخصيص السابق لـ x_{13} ، نستهلك كل الإمداد من المصدر 1 . وبحذف الأعمدة 2 ، 3والصف 1 ، يصبح التخصيص المتبقى $x_{21} = 1000$ أحادى التحديد . وتؤدى طريقة فوجل إلى الجدول 6 C ، ومع ذلك فهذا الحل غير كامل ، لأن ثلاثة فقط من العدد الضرورى 4=1-2+3 من المتغيرات الأساسية هم الذين تم تحديدهم . ونختار $x_{23} = 0$ كمتغير رابع أساسى ، وحيث إنه المتغير غير المخصص ، والذى له أقل تكلفة نقل وحدة ، وحيث أن إدخاله كمتغير أساسى لا يوجد حلقة مع المتغيرات الأساسية السابق تحديدها ، فتكون النتيجة هى الحل الأساسى ، وبالضرورة بنحرف ، ويعطى بالجدول 6 D .

	1	2	3	الإمداد	u_i
1	14	13	11	1200	
2	13	13	12	1000	
الاحتياج	1000	700	500		
v_j					

جدول 6A

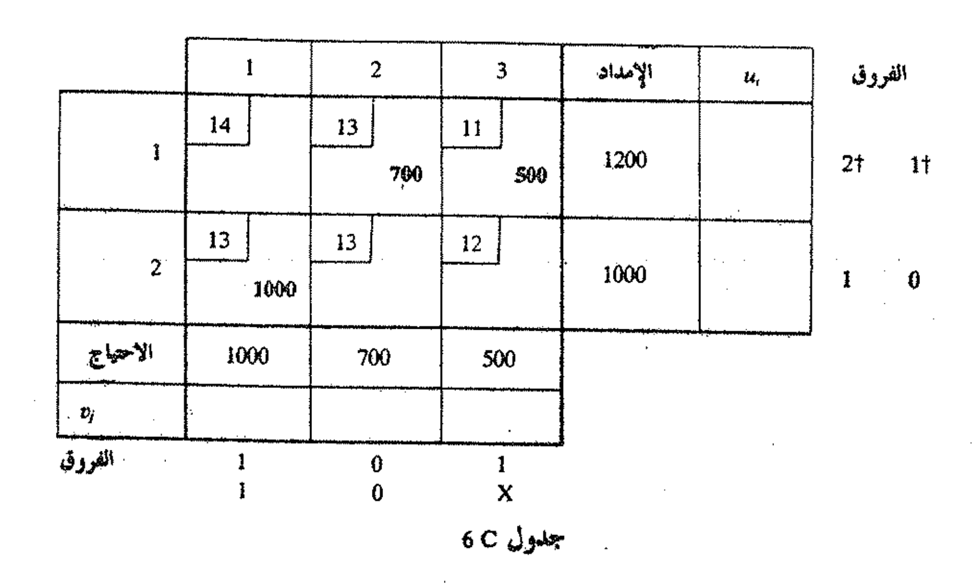
	1	2	3	الإمداد	u_i	الفروق	
1	14	13	11 500	1200		2†	1
2	13	13	12	1000		1	0
الاحتياج	1000	700	500				
v_j							
الفروق	1	0	1				
	1	0	X				

جدول 6 B

نختبر الآن أمثلية هذا الحل ، بالعمل مباشرة مع الجدول 6 D ، فإنه ليس أمثل . وبتحسينه نحصل على التخصيص الموضح بالجدول 6 E ، والذى يكون أمثل . $x^*_{11} = x^*_{22} = x^*_{23} = 0$ ، $x^*_{21} = 1000$ ، $x^*_{13} = 500$ ، $x^*_{12} = 700$ عند

$$z^* = 700(13) + 500(11) + 1000(13) = 27\,600¢ = \$276$$

لاحظ أن هذا التخصيص مشابه للتخصيص الأول ، مع تغير أماكن الوصول للمتغيرات الأساسية فقط .



	1	2	3	الإمداد	u_i	الفروق
1	14	13 — 700	11 — 500	1200		2† 1†
2	13 — 1000	13	12	1000		1 0
الاحتياج	1000	700	500			
v_j						
الفروق	1 1	0 0	1 X			

جدول 6 C

	1	2	3	الإمداد	u_i
1	14 — (2)	13 — 700	11 — 500	1200	0
2	13 — 1000	13 — (−1) +	12 — 0	1000	1
الاحتياج	1000	700	500		
v_j	12	13	11		

جدول 6D

	1	2	3	الإمداد	u_i
1	14 — (1)	13 — 700	11 — 500	1200	0
2	13 — 1000	13 — 0	12 — (1)	1000	0
الاحتياج	1000	700	500		
v_j	13	13	11		

جدول 6 E

٨ — ٧ أوجد الازدواج غير المتماثل للنموذج (٨ — ٢) بتجاهل شرط الأعداد الصحيحة .

يمكن كتابة القيود الأولية مثل النموذج $(m+n)\times mn$

$$\begin{array}{l} x_{11}+\cdots+x_{1n} = a_1 \\ x_{21}+\cdots+x_{2n} = a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+\cdots+x_{mn} = a_m \\ x_{11} + x_{21} + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{m2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{mn} = b_n \end{array} \quad (١)$$

من الملاحظ أن كل عمود من معاملات المصفوفة A يحتوى بالضبط على اثنين ؛ وبالأخص العمود $(i-1)n+j$ يحتوى على 1 فى الصف i ، و 1 فى الصف $m+j$. لذلك يحتوى قيد الازدواج رقم $[(i-1)n+j]$ ، كما هو معطى فى (٥ — ٤) على متغيرات الازدواج رقم i ، ورقم $(m+j)$ فقط . بالتعبير عن متغيرات الازدواج بـ $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$ فيكون هذا القيد ببساطة

$$u_i+v_j \le c_{(i-1)n+j} \quad (=c_{ij})$$

ويعبر عن برنامج الازدواج الكامل مثل :

تعظيم : $z=\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ (٢)

علماً بأن : $u_i+v_j \le c_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$

البرنامج(2) له صيغة المصفوفات (٥ — ٤) عند

$W=[U^T, V^T]^T$ ، $C=[c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn}]$ ، $B=[a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n]^T$

٨ — ٨ استخدم نتائج المسألة (٨ — ٧) لتحقيق اختبار الأمثلية لطريقة النقل .

دع $X=[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}]^T$ لتكون أى حل ممكن للبرنامج الأوّلى (٨ — ٢) ، و W لتكون أى حل ممكن لبرنامج الازدواج 2 فى المسألة ٨ — ٧ فى صيغه المصفوفات . ينتج من المسألة ٥ — ٩ أن :

$$C^T X \ge B^T W \qquad \text{or} \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \quad (١)$$

ومن السهل بيان (بالمقارنة بالمسألة ٥ — ٢٤) أنه إذا كانت (I) متساوية ، W ، X هما حلان أمثلان لبرامجها المناظرة .

والآن ، بافتراض أن طريقة النقل أنتجت جدولاً وفيه يمكن حساب الأعداد v_j^* و u_i^* ، ولهما الخصائص التالية : (أ) لكل خلية (i, j) تحتوى على متغير أساسى x_{ij}^* (موجب أو صفر) $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$. (ب) لكل خلية (i, j) تحتوى على متغير غير أساسى $x_{ij}^* = 0, \ u_i^* + v_j^* \le c_{ij}$ ، فإن $\mathbf{X}^*$ تكون حلًّا ممكناً للبرنامج الأوَّلىّ ، $\mathbf{W}^*$ تكون حلًّا ممكناً لبرنامج الازدواج . وأكثر من ذلك .. باستخدام معادلات القيود الأولية نحصل على

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i^* = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* \right) u_i^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i^* x_{ij}^* \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* \right) v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_j^* x_{ij}^*$$

وبالتالى :

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (u_i^* + v_j^*) x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^* \tag{٢}$$

وتنتج المتساوية الأخيرة من الخاصيتين (أ) و (ب) المذكورتين بأعلى ، ولكن 2 هى نفسها الكل من $\mathbf{W}^*$ و $\mathbf{X}^*$ فى حالة التساوى ، لذلك فإن $\mathbf{X}^*$ تكون حلًّا أمثل لمشكلة النقل (وتكون $\mathbf{W}^*$ حلًّا أمثل لبرنامج الازدواج) .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٨ — ٩ انشيء جدول نقل للمسألة (١ — ٢١) ، واستخدم طريقة النقل لتحديد جدول الإنتاج الأمثل .

٨ — ١٠ استخدم طريقة النقل فى حل المسألة ١ — ٢٣ .

٨ — ١١ يمكن لشركة طيران داخلية شراء الوقود النفاث من أحد ثلاثة متعهدين . وتحتاج شركة الطيران للشهر المقبل فى كل مطار من مطاراتها الثلاثة التى تخدم فيها إلى 100000 جالون فى المطار 1 ، و 180000 جالون فى المطار 2 ، و 350000 جالون فى المطار 3 . ويمكن لكل متعهد الإمداد بالوقود لكل مطار بالأسعار(سنت لكل جالون) الموضحة بالجدول التالى :

	المطار 1	المطار 2	المطار 3
المتعهد 1	92	89	90
المتعهد 2	91	91	95
المتعهد 3	87	90	92

، ومع ذلك يتحدد كل متعهد تبعاً للكمية التى يستطيع الإمداد بها خلال الشهر . والطاقات المتاحة لديهم هى 320000 جالون للمتعهد 1 ، و 270000 جالون للمتعهد 2 ، و 190000 جالون للمتعهد 3 . حدد سياسة الشراء التى منتفى باحتياجات شركة الطيران بأقل تكلفة كلية .

٨ – ١٢ تنتج شركة مخابز خبزاً مخصوصاً فى أى من أحد المصنعين كما يلى :

المصنع	الطاقة الإنتاجية رغيف	تكلفة الإنتاج سنت / رغيف
A	2500	23
B	2100	25

تريد أربعة رستورانات شراء هذا الخبز ، وتقدر احتياجاتهم والأسعار التى يريدون أن يدفعوها بما يلى :

رستوران	الاحتياج الكلى رغيف	السعر المقدم سنت / رغيف
1	1800	39
2	2300	37
3	550	40
4	1750	36

أسعار النقل للخبز من المصنع إلى الرستوران توضح فيما يلى :

	رستوران 1	رستوران 2	رستوران 3	رستوران 4
المصنع A	6	8	11	9
المصنع B	12	6	8	5

حدد جدول تسليم شركة المخابز لتعظيم الربح من الخبز المنتج .

٨ – ١٣ تحتوى مخازن شركتين للأدوية على 1.1 ، 0.9 مليون جرعة من مصل ضد الإنفلونزا ، ويبدو أن هناك تلوثاً من هذا المرض فى ثلاث مدن . ويجب تطعيم المواطنين من الطبقة العليا أولاً ، حيث إن هذا المرض خطير . وبعد ذلك يتم تطعيم المواطنين على أساس من يأتى أولاً يطعم أولاً طوال بقاء المصل . وتقدر كمية المصل التى تحتاجها كل مدينة (بالمليون جرعة) كما يلى :

	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3
الأكبر	0.325	0.260	0.195
الآخرون	0.750	0.800	0.650

تكلفة النقل (سنت / جرعة) بين شركات الأدوية والمدن هى :

	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3
الشركة 1	3	3	6
الشركة 2	1	4	7

حدد جدولاً أقل تكلفة نقل يمكن به إمداد المصل اللازم على الاقل لتطعيم المواطنين من الطبقة العالية (ملحوظة : قسم كل مدينة إلى مكانين للوصول ، ومواطنين من الطبقة العليا ، وآخرين . أوجد مصدراً وهمياً . اجعل تكلفة النقل من المصدر الوهمى إلى مكان الوصول للمواطنين من الطبقة العليا عالية ، تضمن بذلك عدم النقل خلال هذه القنوات) .

٨ - ١٤ اثبت أنه إذا كانت التكلفة فى أى صف أو أى عمود فى جدول النقل تنخفض بانتظام وبنفس العدد (سالب أو موجب) ، فإن المسألة الناتجة يكون لها نفس الحل الأمثل مثل المسألة الأصلية .

برمجة الأعداد الصحيحة : نماذج الجدولة

Integer Programming: Scheduling Models

مشاكل الإنتاج PRODUCTION PROBLEMS

تدور مشاكل الإنتاج حول مُنتج واحد يُصنع على فترات زمنية متتالية لمقابلة احتياجات مسبقة . وعند تصنيعه تُشحن وحدات المنتج أو تخزن ، وتكون تكاليف الإنتاج والتخزين معروفة ، بهدف تحديد جدول الإنتاج الذى يفى باحتياجات المستقبل بأقل تكلفة كلية (التى تتكون من تكلفة الإنتاج الكلية وتكلفة التخزين الكلية على افتراض أن تكلفة النقل الكلية تكون ثابتة) (انظر المسألة ٩ — ١) .

يمكن تحويل مشاكل الإنتاج إلى مشاكل نقل باعتبار الفترات الزمنية التى يحدث فيها الإنتاج كمصادر ، والفترات الزمنية التى ينقل فيها المنتج كأماكن وصول . وتؤخذ طاقات الإنتاج كإمدادات . لذلك تدل x_{ij} على عدد الوحدات المنتجة فى الفترة الزمنية i للنقل فى الفترة الزمنية j . c_{ij} تدل على تكلفة الإنتاج للوحدة فى الفترة الزمنية i ، مضافاً إليها تكلفة التخزين للوحدة من الفترة الزمنية i حتى الفترة الزمنية j . وحيث إن الوحدات لايمكن أن تنقل قبل أن تنتج ، فإن c_{ij} تكون كبيرة عند $j < i$ لجعل قيمة x_{ij} المناظرة مساويةً للصفر .

مشاكل النقل بالشحن TRANSSHIPMENT PROBLEMS

تشبه مشكلة النقل بالشحن مشكلة النقل ، حيث تحتوى على مصادر بها إمدادات ، وأماكن وصول لها احتياجات . وبالإضافة إلى ذلك .. فإنها تحتوى على « أماكن شحن » يتم من خلالها نقل البضائع . ويجب أن تميز أماكن الشحن هذه عن المصادر وأماكن الوصول ، أو أن المصدر وأماكن الوصول قد تعمل كمكان شحن . وتعطى تكلفة شحن الوحدة بين كل الأماكن الممكنة . ويكون الهدف هو تصميم جدول نقل يواجه كل الاحتياجات بأقل تكلفة ممكنة . (انظر المسألة ٩ — ٢ ، ٩ — ٣)

ويمكن أن تحول مشاكل النقل بالشحن إلى مشاكل نقل بجعل كل مكان شحن مصدراً ومكاناً للوصول . وكما فى طريقة النقل ، فإن الإمداد الكلى من المفروض أن يتساوى مع الاحتياج الكلى ، وإذا كان هذا ليس صحيحاً من حيث المبدأ ، فإنه يمكن إضافة مصدر أو مكان وصول وهمى . لذلك فإن العدد الكلى من الوحدات فى النظام يعطى إما بمجموع الإمدادات أو بمجموع الاحتياجات . ويخصص لكل مكان شحن إمداد يساوى الإمداد الأصلى (أو صفر ، إذا لم ينطبق مكان الشحن الأصلى مع المصدر) ، مضافاً إليه العدد الكلى من الوحدات فى النظام ، ويخصص له احتياج مساوٍ لاحتياجه الأصلى (أو صفر ، إذا لم ينطبق مكان الشحن الأصلى مع مكان الوصول) ، مضافاً إليه العدد الكلى من الوحدات فى النظام . وتسمح هذه التخصيصات بإمكانية أن تمر كل الوحدات بمكان الشحن . وتكون تكلفة وحدة واحدة من مكان شحن (باعتباره مصدراً) إلى نفس المكان (باعتباره مكان وصول) مساوية للصفر . أما الوحدات التى لا تمر من خلال مكان الشحن بالجدول الأمثل ، فإنها تظهر كتخصيصات من مكان الشحن لنفس المكان .

مشكلات التعيين ASSIGNMENT PROBLEMS

تتضمن مشاكل التعيين جدولة العاملين فى الأعمال فرداً فرداً (وبوجه عام .. فإنها تتضمن التبادليات بين مجموعة أهداف) . ومن المفروض أن يكون عدد العاملين مساوياً لعدد الأعمال — ويجب ضمان هذا الشرط بإيجاد عاملين وهميين أو أعمال وهمية طبقاً للاحتياج — ويكون الزمن c_{ij} اللازم للعامل رقم i لإكمال العمل رقم j (أو قيمة الهدف i فى المكان رقم j) معروفاً . ويكون الهدف هو جدولة كل العاملين

على الأعمال ، بحيث تكتمل كل الأعمال فى أقل وقت ممكن (أو إيجاد أفضل تبادلية ، والتى لها أكبر قيمة) . (انظر المسألة ٩ ــ ٤) يمكن تحويل مسائل التعيين إلى مسائل نقل باعتبار العاملين كمصادر ، والأعمال كأماكن وصول ، حيث يكون كل الإمداد والاحتياج مساوياً 1 . وتعتبر « الطريقة المجرية » طريقة حل أكفأ من طريقة النقل العامة ، والتى تستخدم مصفوفة التكلفة فقط ، الجدول ٩ ــ ١ كمدخلات ، وهناك ٤ خطوات :

		الأعمال		
العاملين	1	2	3 ⋯	n
1	c_{11}	c_{12}	c_{13} ⋯	c_{1n}
2	c_{21}	c_{22}	c_{23} ⋯	c_{2n}
3	c_{31}	c_{32}	c_{33} ⋯	c_{3n}
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3} ⋯	c_{nn}

جدول ٩ - ١

الخطوة 1 : فى كل صف من الجدول ٩ ــ ١ خصص أصغر عنصر ، وأطرحه من كل عناصر الصف . كرر هذه العملية لكل عمود (الحد الأدنى للعمود يحدد بعد طرح الصفوف) ستحتوى مصفوفة التكلفة المعدلة على صفر واحد على الأقل فى كل صف ، وعمود .

الخطوة 2 : حدد ما إذا وجد تخصيص ممكن يحتوى على تكلفة صفرية واحدة فى مصفوفة التكلفة المعدلة . وفى قول آخر .. حدد ما إذا احتوت المصفوفة المعدلة على أصفار عددها n لا يتواجد أى اثنين منها فى نفس الصف أو العمود .

الخطوة 3 : غطِّ كل الأصفار فى مصفوفة التكلفة المعدلة بخطوط قليلة رأسية وأفقية بقدر الإمكان . ويجب أن يمر الخط الأفقى خلال الصف كله ، وكذلك يجب أن يمر الخط الرأسى بالعمود كله ، ويكون هذا العدد الأدنى من الخطوط الكلية بهذه التغطية أقل من n . خصص أصغر عدد فى مصفوفة التكلفة غير المغطى بخط . اطرح هذا العدد من كل العناصر غير المغطاة بخطوط ، وأضف إليه كل عنصر مغطى بخطين .

الخطوة 4 : ارجع إلى الخطوة الثانية
انظر المسألة ٩ ــ ٥ طبقاً لإحدى النتائج الرئيسية فى نظرية الأشكال البيانية ، يكون عدد الخطوط المطلوب فى الخطوة الثالثة مساوياً بدقة لأكبر عدد من الأصفار فى المصفوفة المعدلة ، بحيث لا يوجد أى أثنين منها فى نفس الصف أو العمود .

مشكلة البحار المسافر THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM

تتضمن هذه المشكلة فرداً يجب أن يغادر قاعدة من مكان معين ، ويزور عدد $n - 1$ من الأماكن الأخرى (كل مكان مرة واحدة فقط) ، ثم يعود إلى القاعدة . وتقرر تكلفة السفر بين كل زوج من الأماكن c_{ij} ، وليس من الضرورى أن تساوى c_{ji} . والهدف هو جدولة خط الرحلة بأقل تكلفة ممكنة . وحيث إن المهم هو الدائرة المنفذة بواسطة البحار ، فإنه من الملائم تحديد أى من الأماكن n ، ويكون هو القاعدة .

ويمكن أن ترتبط مشكلة التعيين بمشكلة البحار المسافر كما يلى : ارمز إختيارياً إلى الأماكن المحتواة بمشكلة البحار المسافر بالأعداد الصحيحة $1, 2, \ldots, n$. اعتبر مجموعة n من العاملين ، ومجموعة من الأعمال n ، وتكون تكلفة التعيين c_{ij} هى تكلفة السفر مباشرة من المكان i إلى المكان j . ومن الواضح أن أى حل ممكن لمشكلة البحار المسافر تتصل بالحل الممكن للمشكلة المرتبطة بمشكلة التعيين . ومع ذلك ، فإن مشكلة التعيين لها حلول ممكنة (مرتبطة بتبادليات لا دائرية) لا تمثل حلولاً ممكنة لمشكلة البحار المسافر . ويستخدم الحل الأمثل للمشكلة المرتبطة بالتعيين كتقريب أول لحل مشكلة البحار المسافر . نطبق الطريقة المجرية على مصفوفة التكلفة لمشكلة التعيين (وهى نفسها مصفوفة مشكلة البحار) إذا تبعت النتائج خط رحلة ممكن ، فإن خط الرحلة يكون أمثل . وإذا لم يكن كذلك ، يمكن استخدام بديل بطريقة التفريع والتحديد (الفصل السادس) لإيجاد مشكلتى تعيين جديدتين يقع بينهما الحل الأمثل لمشكلة البحار المسافر .

يكون التفريع للعنصر c_{pq} ، حيث إن $p \to q$ هو أحد التعيينات فى التقريب الأول الحالى (الذى يفترض ألا يعكس خط رحلة ممكن) . ويمكن الحصول على مصفوفة تكلفة جديدة باستبدال c_{pq} بعدد كبير .

تعتبر طرق التفريع والتحديد غير عملية حسابياً ، وذلك بالنسبة للمشكلات الكبيرة التى تحتوى على مئات من الأماكن . وقد اقترحت عدة طرق قريبة إلى المثالية لهذه المواقف . (انظر المسألة ٩ ـــ ٧) والاعتراض على هذه الطرق القريبة إلى المثالية هو أنه بالرغم من أن هذه الطرق جيدة بوجه عام ، لكنها تنتج فى بعض الحالات الخاصة تقريبات ضعيفة جداً للحلول المثلى . (انظر المسألة ٩ ـــ ٩) .

مسائل محلولة

Solved Problems

٩ – ١ تخطط شركة صناعية لكل من المواسم الأربعة للعام التالى . وتحدد الطاقات الإنتاجية للشركة والاحتياجات المتوقعة (كلها بالوحدة) فيما يلى :

	الربيع	الصيف	الخريف	الشتاء
الاحتياج	250	100	400	500
الطاقه العادية	200	300	350	...
الطاقة الإضافية	100	50	100	150

تكلفة الإنتاج العادية للشركة هى 7.00 دولارات للوحدة . وتختلف تكلفة الوحدة الإضافية موسمياً ، فتكون 8.00 دولارات فى الربيع ، 9.00 دولارات فى الصيف ، و 10.00 دولارات فى الشتاء .

تمتلك الشركة فى مخازنها 200 وحدة فى أول يناير ، ولكنها تخطط لعدم الاستمرار فى الإنتاج فى نهاية العام ، وترغب فى عدم وجود أى مخزون فى موسم الشتاء . والوحدات المنتجة غير متاحة للنقل فى الورديات العادية خلال موسم الإنتاج . وبوجه عام .. فإنها تباع فى الموسم التالى . أما الوحدات غير المباعة فإنها تضاف إلى المخازن ، وتحمل بمصروفات تخزين 0.70 دولار للوحدة . وعلى النقيض .. فإن الوحدات المنتجة فى ورديات العمل الإضافى يجب أن تنقل فى نفس موسم الإنتاج . حدد جدول الإنتاج الذى يواجه كل الاحتياجات بأقل تكلفة كلية .

الفترات الزمنية التى يمكن الإنتاج خلالها هى : ورديات العمل الإضافى للمواسم الأربعة ، والورديات العادية فى المواسم الثلاثة الأولى . وتصبح كل فترة من هذه الفترات السبع مصدراً ، ويضاف إليها مصدر ثامن ، مخزن أولى ، حيث يمكن الإمداد منه . والإمداد الكلى هو 1450 وحدة . والفترات الزمنية التى سيطلب فيها الإنتاج هى الأربعة مواسم ، وتصبح هذه المواسم أماكن وصول بإحتياج كلى 1250 وحدة . وحيث إن الإمداد الكلى يزيد على الاحتياج الكلى ، نوجد مكان وصول وهمياً باحتياج يساوى الـ 200 وحدة الزائدة .

تمثل التخصيصات الموجبة من المصدر إلى مكان الوصول الوهمي الوحدات الممكن أن تنتج فى هذا المصدر ، ولكنها لا تنتج ، نظراً لعدم الاحتياج إليها . وحيث إن كل الوحدات بالمخزون الأولى قد تم إنتاجها مسبقاً ، لذلك يجب تجنب التخصيص من المخزون الأولى للمخزن الوهمي . ويمكن ذلك بتخصيص عدد كبير (10 000 دولار) مرتبطة بتكلفة الوحدة . وكل التكلفة الأخرى المرتبطة بمكان الوصول الوهمي تكون صفرية كالمعتاد .

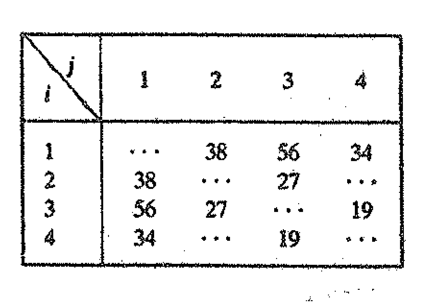
والتخصيصات الأخرى التى يجب أن نتجنبها تخصص لها تكلفة عالية . ويتضمن هذا النقل من الورديات العادية للموسم الحالى ، أو المواسم السابقة ، والنقل من الورديات الإضافية لأى موسم عدا الحالى . والتكلفة المرتبطة بالمخزون الأولى تعتبر تكلفة تخزين فقط ، حيث إن تكلفة الإنتاج ، وتكلفة التخزين السابقة قد حدثت فعلاً ولا يمكن تقليلها . والتكلفة الباقية هى ، ببساطة ، تكلفة الإنتاج مضافاً إليها تكلفة التخزين .

بتطبيق طريقة النقل على هذه المسألة ، نحصل على الجدول 1 ، كجدول أمثل . وينتج منه أن احتياج الربيع يستوفى باستخدام كل 200 وحدة من المخزون ٢ ، 50 وحدة من الإنتاج الإضافى فى الربيع . ويستوفى احتياج الصيف من وردية الربيع العادية . ويستوفى احتياج الخريف من 300 وحدة من إنتاج الصيف العادى ، بالإضافة إلى 100 وحدة من الإنتاج الإضافى للخريف . ويستوفى إحتياج الشتاء من 100 وحدة مصنوعة فى الربيع فى الورديات العادية ومخزنه ، بالإضافة إلى 350 وحدة من إنتاج الخريف العادى ، 50 وحدة منتجة فى الشتاء فى الورديات الإضافية .

	الربيع	الصيف	الخريف	الشتاء	الوهمي	الإمداد	u_i
العادى (ربيع)	10 000 (9993.60)	7.00 **100**	7.70 (0)	8.40 **100**	0 (1.60)	200	8.40
العادى (صيف)	10 000 (9994.30)	10 000 (9993.70)	7.00 **300**	7.70 **0**	0 (2.30)	300	7.70
العادى (خريف)	10 000 (9995)	10 000 (9994.40)	10 000 (9993.70)	7.00 **350**	0 (3)	350	7
مخزون أولى	0 **200**	0.70 (0.10)	1.40 (0 10)	2.10 (0.10)	10 000 (10 008)	200	2
إضافى (ربيع)	8.00 **50**	10 000 (9991.40)	10 000 (9990.70)	10 000 (9990)	0 **50**	100	10
إضافى (صيف)	10 000 (9992)	9.00 (0.40)	10 000 (9990.70)	10 000 (9990)	0 **50**	50	10
إضافى (خريف)	10 000 (9993.30)	10 000 (9992.70)	8.00 **100**	10 000 (9991.30)	0 (1.30)	100	8.70
إضافى (شتاء)	10 000 (9992)	10 000 (9991.40)	10 000 (9990.70)	10.00 **50**	0 **100**	150	10
الاحتياج	250	100	400	500	200		
v_j	−2	−1.40	−0.70	0	−10		

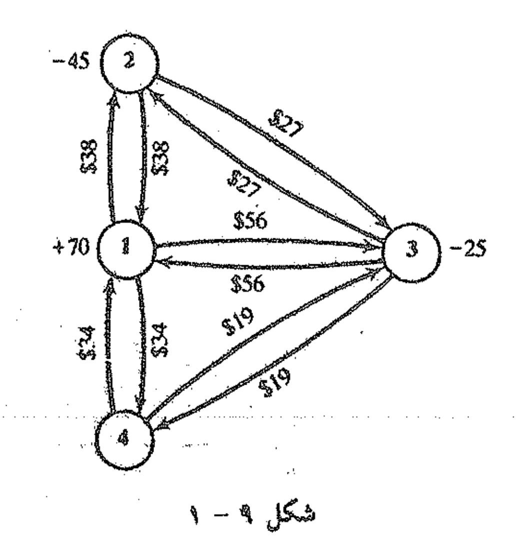
جدول 1

٩ - ٢ تقوم مؤسسة بنقل 70 وحدة من منتج معين من الموقع 1 إلى الموقعين 2 ، 3 بالكميات 45 ، 25 وحدة على التوالى . تكلفة النقل الجوى بين المواقع (بالدولار للوحدة) معطاه فى الجدول ٩ ـــ ١ ، حيث توضح الخطوط المنقطة أنه لا توجد خدمة . حدد جدول النقل الذى يخصص الأعداد المطلوبة من السلع لكل مكان وصول بأقل تكلفة نقل ممكنة . ويمكن النقل من خلال نقط وسيطة .



i \ j	1	2	3	4
1	···	38	56	34
2	38	···	27	···
3	56	27	···	19
4	34	···	19	···

جدول ٩ - ١



شكل ٩ - ١

توضح هذه المسألة خطياً بالشكل ٩ ـــ ١ ، حيث توضح الإمدادات بالأعداد الموجبة ، والاحتياجات بالأعداد السالبة ، مع ملاحظة أنه بالرغم من تماثل الجدول ٩ ـــ ١ ، فإن أجور الشحن لا تتناسب مع المسافات . والموقع 4 هو مكان شحن فقط . والموقعان 2 ، 3 يستخدمان كأماكن وصول وأماكن شحن (يمكن شحن البضائع من الموقع 1 إلى الموقع 3 من خلال الموقع 2 من 1 إلى 2 من خلال 3) ، بينما يستخدم الموقع 1 كمصدر ومكان شحن . وحيث إنه ليس من الممكن (ليكون الوضع مثالياً) شحن البضائع من الموقع 1 واستقبالها فى وقت لاحق ، لذا يجب أن تشحن مرة أخرى ، فإن المسألة يمكن أن تبسط بعدم السماح بالشحن إلى الموقع 1 وتقييده بأن يكون مصدراً فقط .

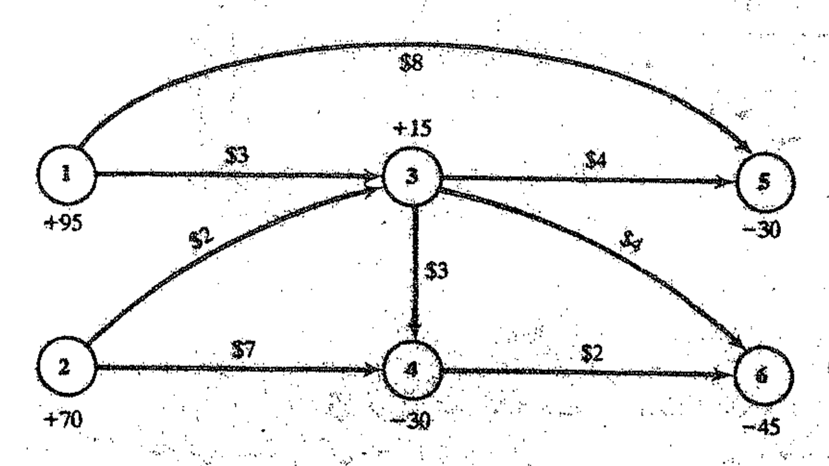
أماكن الوصول

المصادر	2	3	4	الإمداد	u_i
1	38 / 45	56 / (3)	34 / 25	70	0
2	0 / 70	27 / (12)	10 000 / (10 004)	70	−38
3	27 / (42)	0 / 70	19 / (38)	70	−53
4	10 000 / (9996)	19 / 25	0 / 45	70	−34
الاحتياج	115	95	70		
v_j	38	53	34		

جدول 2

لتطبيق طريقة النقل ، نزيد الإمداد والاحتياج لكل مكان شحن ـــ المواقع 2 ، 3 ، 4 ـــ بالعدد الكلى من الوحدات فى النظام ، 70 وحدة . وأيضاً نحدد 10 000 = دولار $c_{24} = c_{42} =$ لجعل الشحن على الطرق $2 \rightarrow 4$ ، $4 \rightarrow 2$ مساوياً للصفر ، وتحديد $c_{22} = c_{33} = c_{44} = 0$ تنتج طريقة النقل ، الجدول الأمثل 2 . لذلك فإن 45 وحدة تشحن من الموقع 1 مباشرة إلى الموقع 2 لتستوفى احتياجاته ، بينما الـ 25 وحدة الباقية تشحن من الموقع 1 إلى الموقع 4 ، ثم توجه إلى الموقع 3 . لاحظ أن : $x^*_{22} = x^*_{33} = 70$ يدل على أن (كل) 70 وحدة تتجنب المرور خلال هذه المواقع . وبالمثل $x^*_{44} = 45$ ، مؤكداً أن : 45 من 70 وحدة لا تشحن خلال الموقع 4 .

٩ ـ ٣ للبيانات فى شكل ٩ ـــ ٢ ، حدد جدول الشحن الذى يواجه كل الاحتياجات بأقل تكلفة كلية



شكل ٩ ـ ٢

المواقع 1 ، 2 هى مصادر ، بينما المواقع 5 ، 6 هي أماكن وصول . الموقع 3 هو مصدر ، ومكان شحن (نقطة اتصال) ، بينما الموقع 4 يخدم كمكان وصول ومكان شحن . ولأن الإمداد الكلى هو 180 وحدة ، بينما الاحتياج هو 105 وحدة فقط ، نوجد الموقع 7 كمكان وصول وهى باحتياج 75=180-105 وحدة . وحيث إن كل مكان شحن هو مصدر ومكان وصول ، بإضافة 180 وحدة إلى كل من الإمدادات والاحتياجات لهذا الموقع ، فسيحتوى جدول النقل على الصادر 1 ، 2 ، 3 ، 4 . وكذلك أماكن الوصول 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 . وبجانب التكلفة المعطاة فى شكل ٩ ـــ ٢ ، فعندنا التكلفة صفر من مكان الشحن (كمصدر) إلى نفس المكان (كمكان وصول) ، وتكلفة صفر من أى مصدر إلى الوهمى ، والتكلفة (10 000 دولار) على أى وصلة غير موجودة (مثلاً 6ـــ1) .

الجدول 3 هو جدول النقل الأمثل . يستقبل الموقع 3 ، 20 وحدة من الموقع 1 ، 70 وحدة من الموقع 2 ، بينما تعيد توزيع هذه الوحدات بإمدادها الأولى 15 وحدة إلى المواقع 4 ، 5 ، 6 . وبعد استيفاء كل الاحتياجات يبقى الموقع 1 وبه 75 وحدة موضحة بالجدول 3 بالتخصيص من الموقع 1 إلى الوهمى . والتخصيصات $x^*_{44} = 180$ ، $x^*_{33} = 90$ هى مدخلات دفترية تؤكد أعداد الوحدات التى لا تمر خلال أماكن الشحن 3 ، 4 على التوالى .

أماكن الوصول

المصادر	3	4	5	6	7 وهمي	الإمداد	u_i
1	3 / 20	10 000 / (9994)	8 / (1)	10 000 / (9993)	0 / 75	95	3
2	2 / 70	7 / (2)	10 000 / (9994)	10 000 / (9994)	0 / (1)	70	2
3	0 / 90	3 / 30	4 / 30	4 / 45	0 / (3)	195	0
4	10 000 / (10 003)	0 / 180	10 000 / (9999)	2 / (1)	0 / (6)	180	−3
الاحتياج	180	210	30	45	75		
v_j	0	3	4	4	−3		

جدول 3

٩ – ٤ حل المسألة ١ — ١٣ بالطريقة المجرية

يمتد الجدول ١ — ١ فى المسألة ١ — ١٣ لجعل عدد الأحداث مساوياً لعدد السباحين ، وتكون النتيجة ، الجدول 4 A . وكالمعتاد فإن التكلفة (الأزمنة) المرتبطه بالوهمية ، الأحداث 5 ، 6 تؤخذ صفرية . ويكون الترشيد هنا هو أن الأحداث 5 ، 6 لا توجد ، ولذلك فإنها تستكمل فى زمن صفر ، ويكون السباحون المخصصون لهذه الأحداث هم غير الداخلين فى سباق الرباعى .

تُبدأ الطريقة المجرية بطرح صفر من كل صف فى الجدول 4 A ، ثم طرح 65 ، 69 ، 63 ، 56 ، 0 ، 0 من الأعمدة 1 حتى 6 على التوالى ، وينتج عن ذلك ، الجدول 4 B ، نظراً لأن هذه المصفوفة لا تحتوي على حل التكلفة الصفرية الممكن ، فإننا نغطى الأصفار الموجودة بأقل عدد من الخطوط الأفقية أو الرأسية الممكنة ، وإحدى هذه التغطيات تُبين بالجدول 4 B ، والأخرى المتساوية معها فى الجودة ، نحصل عليها بإحلال الخط من خلال الصف 3 بخط من خلال العمود 4 . ويكون أصغر العناصر غير المغطاة هو 1 الذى يظهر فى الموقع (2,2) . وبطرح 1 من كل عنصر غير مغطى فى الجدول 4 B ، وإضافة 1 لكل عنصر مغطى بخطين — العناصر (1,5) ، (1,6) ، (3,5) ، (3,6) ، (5,5) ، (5,6) — نصل إلى الجدول 4 C .

لا يحتوى الجدول 4 C أيضاً على تعيين التكلفة الصفرية الممكنة . وبتكرار الخطوة 3 من الطريقة المجرية ، نحدد أن 1 هو ، مرة أخرى أصغر عنصر غير معطى . بطرحه من كل عنصر غير مغطى ، وإضافته إلى كل عنصر مغطى بخطين ، نحصل على الجدول 4 D ، الذى لا يحتوى على تعيين التكلفة الصفرية الممكنة ، كما هو موضح بالمدخلات ذات النجوم . لذلك فإن التخصيص الأمثل هو السباح 1 للحدث 1 (سباحة ظهر) ، والسباحان 4 ، 6 لا يدخلان السباق . الوقت الكلى الأدنى (بالثوانى) يحسب من الجدول 4 A كما يلى :

$$z^* = c_{11} + c_{23} + c_{34} + c_{52} = 65 + 65 + 55 + 69 = 254 \text{ s}$$

ومع ذلك فهذا الحل ، ليس هو الحل الأمثل الوحيد . ويمكن الحصول على تخصيص أمثل متساوٍ معه من الجدول 4 D : خصص السباح 1 للحدث 3 ، والسباح 2 للحدث 1 ، تاركاً التخصيصات الأخرى بدون تغير .

الأحداث

السباحون	1	2	3	4	5	6
1	65	73	63	57	0	0
2	67	70	65	58	0	0
3	68	72	69	55	0	0
4	67	75	70	59	0	0
5	71	69	75	57	0	0
6	69	71	66	59	0	0

جدول 4 A

	1	2	3	4	5	6
1	0	4	0	2	0	0
2	2	1	2	3	0	0
3	3	3	6	0	0	0
4	2	6	7	4	0	0
5	6	0	12	2	0	0
6	4	2	3	4	0	0

جدول 4 B

	1	2	3	4	5	6
1	0	4	0	2	1	1
2	1	0	1	2	0	0
3	3	3	6	0	1	1
4	1	5	6	3	0	0
5	6	0	12	2	1	1
6	3	1	2	3	0	0

جدول 4 C

	1	2	3	4	5	6
1	0*	5	0	2	2	2
2	0	0	0*	1	0	0
3	3	4	6	0*	2	2
4	0	5	5	2	0*	0
5	5	0*	11	1	1	1
6	2	1	1	2	0	0*

جدول 4 D

٩ — ٥ حقق الطريقة المجرية

كنتيجة للمسألة ٨ ــ ١٤ (تذكر أن مشكلة التعيين هى مشكلة نقل) ، لا تغير الخطوة الأولى للطريقة المجرية من الحلول المثلى للتعيين ، ولكن تعطى ببساطة مصفوفة تكلفة للمدخلات الأصغر ، وحيث إن كل عنصر فى مصفوفة التكلفة لا سلبى ، فإن تعيين تكلفة صفرية إذا أمكن ، يعطى حلاً أمثل . وبالتالى الخطوة الثانية من الطريقة . وإذا لم يوجد حل تكلفة صفرية ممكن ، فإن الأصفار فى مصفوفة التكلفة الحالية لا تكون موزعة جيداً .

والخطوة الثالثة هى طريقة لإعادة توزيع ، وربما ، إدخال أصفار إضافية . والعمليات المحتوية على c . الأصغر (موجب) تكلفة وغير المغطاة بخطوط فى المصفوفة الحالية ، تحل المصفوفة الحالية بمصفوفة لاسلبية جديدة ، مثل : (١) العنصر c نفسه يستبدل بصفر ، (٢) تبقى الأصفار القديمة المغطاة بخط مفرد ، (٣) تستبدل باقى الأصفار القديمة بـ c . ولما كانت هذه العمليات مكافئة لطرح $c/2$ من كل صف وكل عمود غير مغطى ، وإضافة $c/2$ لكل صف مغطى ، وعمود مغطى ، فإن المسألة ٨ ــ ١٤ تضمن مرة أخرى أن حل التعيين الأمثل لا يتغير .

٩ — ٦ تقدم شركة الخطوط الجوية الأهلية سكاناذو تخفيضاً بسعر يسمح للشخص تغطية كل الرحلة . والتذكرة الصالحة لأسبوعين من تاريخ الشراء لها القيود التالية : لا يسمح بإعادة زيارة أى مدينة على الرحلة ما عدا مدينة البداية ، والتى يمكن أن تكون الأخيرة فى الرحلة . ويرغب أحد السائحين الأجانب فى المدينة 1 (العاصمه) فى رؤية مدن أخرى بالمحافظات 2 ، 3 ، 4 قبل العودة إلى العاصمة ، وقرر أن يسافر على الخطوط الجوية . ويبين الجدول المعطى مواعيد الطيران بين المدن (بالدقيقة) ، حيث تدل النقط على أنه لا توجد خدمة بين المواقع المناظرة . حدد خط الرحلة الذى يقلل من زمن الرحلة إلى الحد الأدنى .

المدن	1	2	3	4
1	···	65	53	37
2	65	···	95	···
3	53	95	···	81
4	37	···	81	···

	1	2	3	4
1	10 000	65	53	37*
2	65	10 000	95*	10 000
3	53	95*	10 000	81
4	37*	10 000	81	10 000

جدول 6 A

نبدأ بإحلال كل مدخل منقط فى جدول التوقيتات برقم كبير جداً لهذه الوصلات فى خط رحلة أمثل . والنتيجة فى الجدول 6 A . وبتطبيق الطريقة المجرية على هذا الجدول ، نحصل على (من التطبيق الثانى للخطوة 2) ، التخصيص الموضح بالعناصر ذات النجوم ، وهى $2 \to 3$ ،$3 \to 2$ ،$1 \to 4$ ،$4 \to 1$. وهذا ليس خط رحلة صالح ، حيث تعيد السائح إلى المدينة 1 مباشرة بعد أول توقف فى المدينة 4 .

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	37*
2	65*	10 000	95	10 000
3	53	95*	10 000	10 000
4	10 000	10 000	81*	10 000

جدول 6 C

	1	2	3	4
1	10 000	65*	53	10 000
2	65	10 000	95*	10 000
3	53	95	10 000	81*
4	37*	10 000	81	10 000

جدول 6 B

نحدث تفريعاً من العنصر ذى النجمة $c_{14} = 37$ بالجدول 6 A . يتأثر التفريع الأول بإحلال c_{14} بعدد كبير كما فى الجدول 6 B . ويتأثر التفريع الثانى بإحلال c_{41} مقلوب العنصر كما فى كل العناصر ، فى الصف الرابع أو العمود الأول ، ماعدا c_{14} نفسه بعدد كبير . ويتم هذا فى الجدول 6 C .

بتطبيق الطريقة المجرية على كل من مصفوفتى التكلفة الجديدتين ، منفصلتين ، نحصل على الرحلة الصالحة لكل من : $1 \to 2$ ،$2 \to 3$ ،$3 \to 4$ ،$4 \to 1$ بتكلفة 278 دقيقة للجدول 6 B ، و $1 \to 4$ ،$4 \to 3$ ،$3 \to 2$ ،$2 \to 1$ بتكلفة 278 دقيقة للجدول 6 C ، وكلا الحلين أمثل . وفى الحقيقة .. حيثما تتشابه مصفوفة التكلفة ، تبقى الدائرة المثلى كحل أمثل ، إذا وصفت بالاتجاه العكسى .

٩ - ٧ صمم طريقة قريبة من المثالية لمشكلة البحار المسافر .

نصمم طريقة أقرب جار ، على أساس مبدأ اختيار أرخص وصلة متبقية على التوالى ، بحيث لا يكمل إدخالها دائرة كاملة مباشرة .

الخطوة 1 : خصص أصغر عنصر فى مصفوفة التكلفة ،(إلغ الروابط اختيارياً) حددها بحلقة ، وحدد الوصلة المرتبطة بها فى خط الرحلة .

الخطوة 2 : إذا كان العنصر الجديد داخل الحلقة هو c_{pq} ،استبدل كل العناصر فى الصف رقم p ،وكل العناصر فى العمود رقم q ، وكذلك مقلوب العنصر c_{qp} بأرقام كبيرة .

الخطوة 3 : خصص أصغر عنصر خارج الحلقة فى مصفوفة التكلفة الأخيرة . اوصلها مؤقتاً بخط الرحلة (غير الكامل)، فإذا كانت الرحلة الناتجة غير ممكنة ، حدد التكلفة بحلقة ، واذهب إلى الخطوة 5 .

الخطوة 4 : إذا كانت الرحلة الناتجة غير ممكنة ، إلغ الوصلة الأخيرة من خط الرحلة ، واستبدل تكلفتها المناظرة برقم كبير . اذهب إلى الخطوة 3 .

الخطوة 5 : حدد ما إذا كانت الرحلة كاملة ، فإذا كانت كذلك اقبلها كحل أقرب إلى الأمثل . وإذا لم تكن كذلك ، اذهب إلى الخطوة 2 .

تؤكد الخطوة 2 أن أى موقع ، إذا ترك ، فإنه لن يترك مرة أخرى ، وأن أى موقع إذا دُخل لن يُدخل مرة أخرى . وبالتالى خط الرحلة المؤقت فى الخطوة 3 يكون ممكناً ، إلا إذا احتوى على حلقات أقل من عدد n من الوصلات .

٩ — ٨ استخدم طريقة أقرب جار (المسألة ٩ — ٧) لإيجاد خط رحلة للبحار المسافر ، قريب إلى الأمثل ، إذا كانت مصفوفة التكلفة معطاة بالجدول

	1	2	3	4	5
1	1000	35	80	105	165
2	35	1000	45	20	80
3	80	45	1000	30	75
4	105	20	30	1000	60
5	165	80	75	60	1000

جدول 8 B

	1	2	3	4	5
1	···	35	80	105	165
2	35	···	45	20	80
3	80	45	···	30	75
4	105	20	30	···	60
5	165	80	75	60	···

جدول 8 A

نبدأ أولاً باستبدال المدخلات المنقطة فى مصفوفة التكلفة بأرقام كبيرة (1000) لنحصل على الجدول 8 B . وأصغر مدخل فى الجدول هو إما c_{24} أو c_{42} . نختار (اختيارياً) c_{24} ، ثم نضعها داخل دائرة ، فتدل على أننا قبلنا الوصلة 4←2 كجزء من خط الرحلة النهائى . نستبدل بعد ذلك كل العناصر الأخرى فى الصف الثانى ، وكل العناصر الأخرى فى العمود الرابع ، وكذلك مقلوب العنصر c_{42} بـ 1000 . وتكون النتيجة كما فى الجدول 8 C .

يكون أصغر عنصر خارج حلقة فى الجدول 8 C هو $c_{43} = 30$. وبتوصيله بالوصلة 3←4 بخط الرحلة الحالى غير الكامل ، نحصل على خط الرحلة (ما زال غير كامل) 3←4 4←2 وهو ليس ممكناً . وبالتالى نضع c_{43} داخل حلقة ، ونستبدل كل العناصر فى الصف الرابع ، وكل العناصر فى العمود الثالث فى الجدول 8 C ، وكذلك مقلوب العنصر c_{34} بـ 1000 . وتكون النتيجة فى الجدول 8 D .

	1	2	3	4	5
1	1000	35	1000	1000	165
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	80	45	1000	1000	75
4	1000	1000	(30)	1000	1000
5	165	80	1000	1000	1000

جدول 8 D

	1	2	3	4	5
1	1000	35	80	1000	165
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	80	45	1000	1000	75
4	105	1000	30	1000	60
5	165	80	75	1000	1000

جدول 8 C

أصغر عنصر خارج حلقة فى الجدول 8 D هو $c_{12} = 35$. بتوصيل الوصلة 2←1 بخط الرحلة غير الكامل ، نوجد خط الرحلة 3←4 4←2 2←1 وهو ليس ممكناً . وبالتالى نضع c_{12} داخل حلقة ، ونستبدل كل العناصر الأخرى فى الصف الأول وكل العناصر الأخرى فى العمود الثانى للجدول 8 D ، وكذلك مقلوب العنصر c_{21} بـ 1000 . تكون النتيجة كما فى الجدول 8 E .

باستمرارية الطريقة ، نجد على التوالى الجداول 8 F ، 8 G . وخط الرحلة الموضح بالعناصر داخل الحلقات فى الجدول 8 G ــ بالتحديد $1\to 2,\ 2\to 4\ \ 4\to 3,\ 3\to 5\ \ 5\to 1$ يكون كاملاً ، لذلك فيكون حلاً أقرب إلى الأمثل . تكلفته الكلية

$$z = 35 + 20 + 75 + 30 + 165 = 325$$

انظر المسألة ٩ ــ ١٧ أيضاً .

	1	2	3	4	5
1	1000	(35)	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	1000	1000	1000	1000	(75)
4	1000	1000	(30)	1000	1000
5	165	1000	1000	1000	1000

جدول 8 F

	1	2	3	4	5
1	1000	(35)	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	80	1000	1000	1000	75
4	1000	1000	(30)	1000	1000
5	165	1000	1000	1000	1000

جدول 8 E

	1	2	3	4	5
1	1000	(35)	1000	1000	1000
2	1000	1000	1000	(20)	1000
3	1000	1000	1000	1000	(75)
4	1000	1000	(30)	1000	1000
5	(165)	1000	1000	1000	1000

جدول 8 G

٩ ــ ٩ طبق طريقة أقرب جار على المسألة ٩ ــ ٦

أصغر مدخل فى الجدول 6 A ، والذى يمثل مصفوفة التكلفة الأولية للمسألة هو إما c_{14} ، أو c_{41} . ونحدد c_{14} اختيارياً داخل حلقة ، ونستبدل كل العناصر الأخرى فى الصف الأول ، كل العناصر الأخرى فى العمود الرابع ، c_{41} بعدد كبير . وتكون النتيجة الجدول 9 A .

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	10 000	10 000	95	10 000
3	(53)	10 000	10 000	10 000
4	10 000	10 000	81	10 000

جدول 9 B

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	65	10 000	95	10 000
3	53	95	10 000	10 000
4	10 000	10 000	81	10 000

جدول 9 A

بتطبيق طريقة أقرب جار على الجدول 9 A نحصل على الجدول 9 B بخط الرحلة المكتمل جزئياً $4\leftarrow 1\ \ 1\to 3$. وأصغر مدخل فى الجدول 9 B هو $c_{43} = 81$. بتوصيل الوصلة $3\to 4$ لخط الرحلة الحالى تؤول إلى $4\to 1\ \ 1\to 3\ \ 3\to 4$ ، وهو ليس ممكناً ، حيث إن هذه الدائرة تحذف المدينة 2 ، وبالتالى لا نقبل $3\to 4$ كجزء من خط الرحلة النهائى ، ونستبدل تكلفتها c_{43} بعدد كبير . وتكون النتيجة الجدول 9 C .

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	10 000	10 000	95	10 000
3	(53)	10 000	10 000	10 000
4	10 000	10 000	10 000	10 000

جدول 9 C

	1	2	3	4
1	10 000	10 000	10 000	(37)
2	10 000	10 000	(95)	10 000
3	(53)	10 000	10 000	10 000
4	10 000	(10 000)	10 000	10 000

جدول 9 D

باستمرارية الطريقة ، نحصل على الجدول 9 D بعد محاولتين . ويكون الحل الأقرب إلى الأمثل بعناصر التكلفة داخل الحلقات هو $1 \rightarrow 4 \quad 4 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 1$ عند $z = 37 + 10\,000 + 95 + 53 = 10\,185$
وهذه القيمة للدالة الهدفية عالية جداً ، فى هذه الحالة فإن الحل الأقرب إلى الأمثل يكون فعلياً بعيداً عن الأمثل .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٩ — ١٠ تلقى صاحب مصنع طلباً من مدينة كبيرة بستة أتوبيسات ذات الدورين ، على أن يقوم بتسليم اثنين فى كل مرة خلال الثلاثة أشهر التالية . يوضح الجدول ٩ — ٢ بيانات الإنتاج بالمصنع

	الشهر 1	2	3
الطاقة الإنتاجية العادية بالوحدة	1	2	3
الطاقة الإنتاجية الإضافية بالوحدة	2	2	2
تكلفة الإنتاج العادية ١٠٠٠ دولار للوحدة	35	43	40
تكلفة الإنتاج الإضافية ١٠٠٠ دولار للوحدة	39	47	45

جدول ٩ — ٢

يمكن تسليم الأتوبيسات للمدينة فى نهاية نفس شهر التجميع ، أو تخزن لدى الصانع ، بتكلفة ٣٠٠٠ دولار فى الشهر لكل أتوبيس لنقلها خلال الشهر التالى . لا يوجد مخزون حال لدى الصانع من هذه الأتوبيسات ، ولا يرغب فى وجود مخزون بعد استكمال هذا العقد . حدد جدول الإنتاج الذى يواجه احتياج المدينة بأقل تكلفة للصانع .

٩ — ١١ تقدر إحدى شركات الأدوية الاحتياج (بالمليون جرعة) من أحد الأمصال كما يلى : أكتوبر 7.1 ، نوفمبر 13.2 ، ديسمبر 12.8 ، يناير 7.7 ، وفبراير 2.1 . ويوجد احتياج طفيف من المصل فى الأشهر الأخرى . وسياسة الشركة للإمداد بهذه

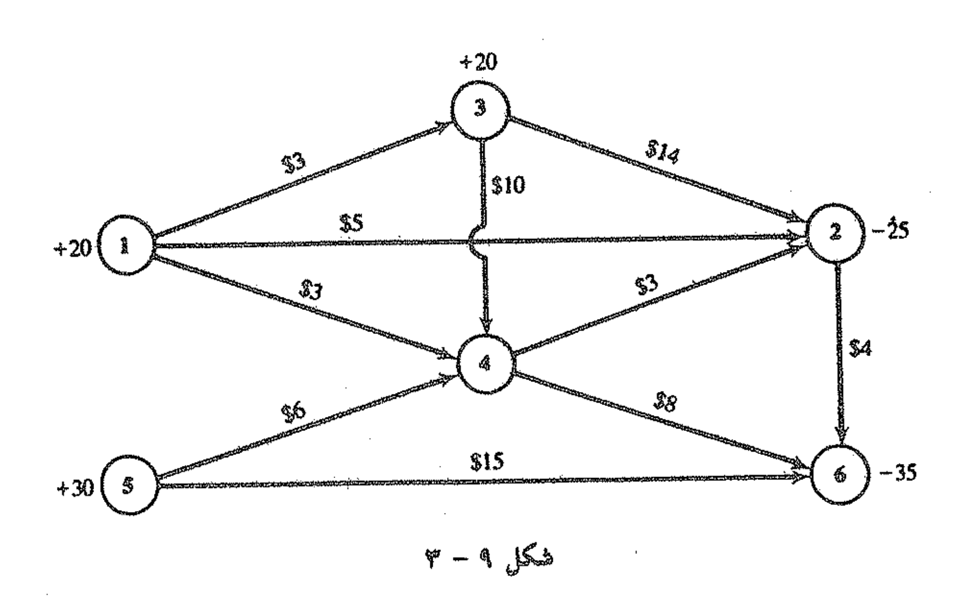
الاحتياجات هى امتلاك مليون جرعة بالمخزن فى نهاية شهر فبراير . يأخذ المصل أربعة أسابيع للإنتاج ، لذلك لا توجد أى كمية جاهزة للنقل خلال شهر الإنتاج . وعندما يكون المصل جاهزاً ، مع ذلك ، ينقل فوراً إلى المستهلكين ، أو يخزن بتكلفة ١٠ سنت لكل جرعة لكل شهر . وجرت العادة أن تنتج الشركة المصل فى المدة بين أغسطس وديسمبر . ويعدم أى مصل متبق من السنة السابقة فى ١ سبتمبر .

وتقدر الطاقات الإنتاجية للشركة (بالمليون جرعة) ، وتكلفة الإنتاج المتوقعة (سنت لكل جرعة) لكل شهر من دورة الإنتاج المقبلة كما يلى :

	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الطاقة	12.5	11.0	9.5	8.1	5.5
التكلفة	63	68	75	52	48

حدد جدول الإنتاج الذى يفى بكل الاحتياجات بأقل تكلفة كلية

٩ – ١٢ حدد جدول النقل بحد أدنى للتكلفة لمسألة النقل بالشحن الموضحة فى الشكل ٩ – ٣ .



شكل ٩ – ٣

٩ – ١٣ عند أحد مصانع السيارات أوامر توريد من الموقع 5 ، 6 ، 7 بعدد 75 ، 60 ، 80 وحدة على التوالى من موديل معين . تتكون عملية الإنتاج من صنع الجسم إما فى الموقع 1 ، أو 2 ، وينقل الجسم إلى أحد المواقع 3 أو 4 ، حيث يجمع مع بقية السيارة ، ثم تنقل الوحدة إلى المستهلك المنتظر . تكلفة الإنتاج للجسم فى الموقع الأول هى 533 دولار ، و 550 دولار بالموقع الثانى . وتكلفة التجميع فى المواقع 3 ، 4 هى : 2256 دولار ، و 2239 دولار على التوالى . وتكلفة النقل (بالدولار) بين المواقع كما يلى .

الموقع	3	4
1	45	59
2	65	52

الموقع	5	6	7
3	72	65	79
4	81	74	63

الطاقة الإنتاجية فى المواقع 1 ، 2 هى : 150 ، 170 جسم على التوالى ، وتستطيع المواقع 3 ، 4 تجميع كل الأجسام المدفوعة إليها . حدد جدول الإنتاج والنقل اللذان يفيا بالاحتياجات بأقل تكلفة . (نقطة مساعدة ، تعامل معها كمحطة نقل بالشحن) .

٩ – ١٤ عند إحدى شركات تأجير السيارات نقص (فى عدد السيارات) فى بعض المدن ، وزيادة فى مدن أخرى . وبالأخص فإن المدن 1 ، 2 عندها زيادة 15 ، 20 سيارة على التوالى ، بينما المدن 3 ، 4 ، 5 تحتاج 7 ، 18 ، 9 سيارات إضافية على التوالى . يمكن نقل السيارات مباشرة بين المواقع ، أو نقلها من خلال مدن وسيطة ، حيث يكون للشركة وكلاء . فإذا كانت تكلفة النقل (بالدولار لكل عربة) كما هو معطى بالجدول 14 ، حدد جدول النقل بتكلفة أقل ما يمكن لشركة تأجير العربات .

المدن	1	2	3	4	5
1	...	7	12	25	65
2	7	...	22	25	75
3	12	22	...	17	28
4	25	25	17	...	15
5	65	75	28	15	...

جدول 14

٩ – ١٥ ترغب إحدى شركات الوجبات السريعة فى بناء أربعة مخازن بمنطقة شيكاغو . وقد تعاملت الشركة فى الماضى مع ست شركات إنشاءات مختلفة ، ولما كانت راضية عنهم جميعاً ، فقد دعتهم لتقديم عروض لكل عملية . وكانت العروض النهائية (بالألف دولار) كما هو بالجدول ٩ – ٣

جدول ٩ – ٣

	شركات الإنشاءات					
	1	2	3	4	5	6
المخزن 1	85.3	88	87.5	82.4	89.1	86.7
المخزن 2	78.9	77.4	77.4	76.5	79.3	78.3
المخزن 3	82	81.3	82.4	80.6	83.5	81.7
المخزن 4	84.3	84.6	86.2	83.3	84.4	85.5

ولما كانت شركة الوجبات السريعة ترغب فى إنهاء هذه المخازن بأسرع وقت ممكن ، فإنها ستعطى كل شركة عملية واحدة على الأكثر . ماهو التخصيص الذى ينتج عنه أقل تكلفة كلية لشركة الوجبات السريعة .

٩ – ١٦ حل المسألة ١ – ٢٣

٩ – ١٧ اوجد الحل الصحيح للمسألة ٩ – ٨ ، وقارن بخط الرحلة الأقرب إلى الأمثل فى نفس المسألة .

٩ – ١٨ يبين الجدول التالى مصفوفة التكلفة (غير المتماثلة) للسفر بين عدة مواقع . حدد خط رحلة للبحار المسافر بأقل تكلفة .

المدن	1	2	3	4	5
1	...	1	8	3	4
2	1	...	8	2	3
3	1	3	...	5	1
4	2	5	6	...	5
5	5	3	7	6	...

٩ – ١٩ استخدم طريقة أقرب جار لإيجاد حل أقرب إلى الأمثل للمسألة ٩ – ١٨ .

٩ – ٢٠ بين أن طريقة التفريع لمسألة البحار المسافر توجد مسألتين جديدتين ، فى أحدهما الوصلة $p \to q$ يجب أن تؤخذ ، وفى الأخرى الوصلة $p \to q$ يجب ألا تؤخذ .

٩ – ٢١ بين بأحد الأمثلة أن خط الرحلة الأمثل لمسألة البحار المسافر لا يبقى أمثل ، بإهمال شرط ، أن كل موقع يزار مرة واحدة .

الفصل العاشر

البرمجة غير الخطية : أمثلية المتغير المفرد

Nonlinear Programming: Single-Variable Optimization

المشكلة THE PROBLEM

البرنامج غير الخطى ، غير المقيد ، للمتغير المفرد يأخذ الصيغة

$$z = f(x) \quad : \text{أمثلية} \qquad (١ - ١٠)$$

حيث إن $f(x)$ تكون دالة (غير خطية) فى المتغير المفرد x ، ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تصغير) فى الفترة غير المحددة $(-\infty, \infty)$. وإذا كان البحث مقيداً فى فترة محددة أقل $[a, b]$ ، فإن المسألة تصبح

$$z = f(x) \quad : \text{أمثلية}$$

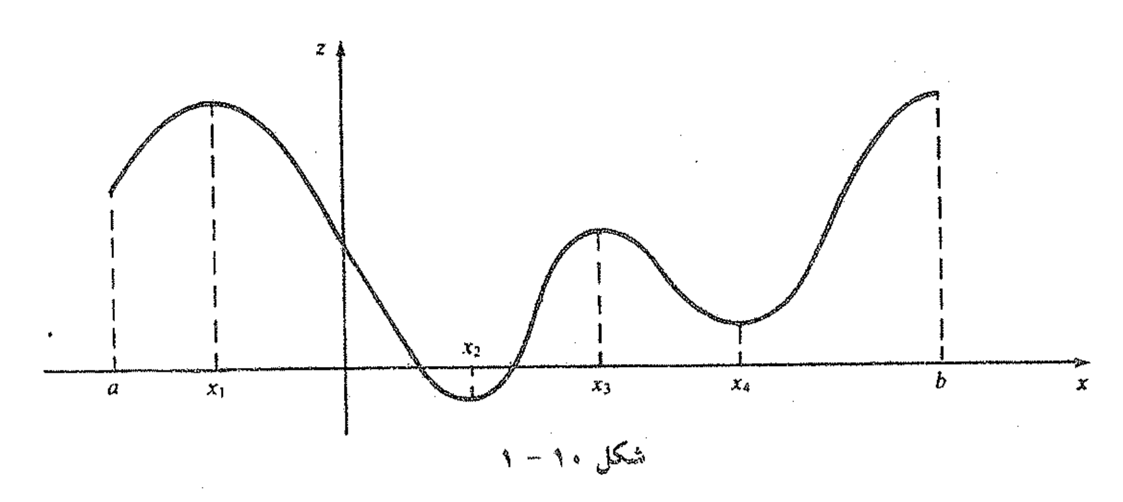
$$a \le x \le b \quad : \text{علماً بأن} \qquad (٢ - ١٠)$$

الذى يعتبر برنامجاً مقيداً لمتغير واحد .

الأمثلية المحلية والشاملة LOCAL AND GLOBAL OPTIMA

للدالة الهدفية $f(x)$ حد أدنى محلى (أو نسبى) عند x_0 إذا وجدت فترة (صغيرة) ذات مركز عند x_0 ، بحيث إن $f(x) \ge f(x_0)$ لكل قيم x فى هذه الفترة التى تحدد فيها الدالة . إذا كانت $f(x) \ge f(x_0)$ لكل قيم x التى تحدد فيها الدالة ، فيكون الحد الأدنى عند x_0 (بجانب كونه محلياً) حداً أدنى شاملاً (أو مطلقاً) . تعرف الحدود الأعلى المحلية والشاملة بالتماثل بمعرفة المتباينات المعكوسة .

مثال ١٠ - ١ : الدالة المرسومة فى الشكل ١٠ - ١ تحدد على $[a, b]$ فقط . ولها حد أدنى نسبى عند a ، x_2 ، x_4 ؛ وحد أعلى نسبى عند x_1 ، x_3 ، b ، وحد أدنى شامل عند x_2 ؛ وحد أعلى شامل عند x_1 ، b .



شكل ١٠ - ١

يبحث البرنامج (١٠ - ١) عن أمثلية شاملة ؛ وكذلك البرنامج (١٠ - ٢) أيضا ؛ إلى الحد الذى يبحث فيه عن أفضل أمثلية محلية فى الفترة $[a, b]$. ومن الممكن أن تفرض الدالة الهدفية قيماً أفضل خارج $[a, b]$ ، ولكن هذا خارج الاهتمام .

النتائج من التفاضل والتكامل RESULTS FROM CALCULUS

النظرية ١٠ - ١ : إذا كانت $f(x)$ مستمرة فى الفترة المقفلة والمحددة $[a, b]$ ، فإن $f(x)$ يكون لها أمثلية شاملة (كلاً من التعظيم والتصغير) على هذه الفترة .

النظرية ١٠ - ٢ : إذا كانت $f(x)$ أمثلية محلية عند x_0 ، إذا كانت $f(x)$ قابلة للتفاضل فى جزء الفتره ذات المركز عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.

النظرية ١٠ - ٣ : إذا كانت $f(x)$ يمكن تفاضلها مرتين فى جزء الفترة ذات المركز عند x_0 ، وإذا كانت $f'(x_0) = 0$ ، $f''(x_0) > 0$ فيكون لـ $f(x)$ حداً أدنى محلى عند x_0 . وإذا كان بدلاً من $f'(x_0) = 0$ ، $f''(x_0) < 0$ ، فإن $f(x)$ يكون لها حداً أعلى محلى عند x_0 .

ويتبع من النظريتين الأوليتين أنه إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، فإن الأمثلية المحلية والشاملة للبرنامج (١٠ - ٢) تحدث بين النقط التى لا تتواجد فيها $f'(x)$ ، أو بين النقط حيث $f'(x) = 0$ (وغالباً ما تسمى بالنقط الساكنة أو الحرجة) ، أو بين النقط النهائية $x = b$ ، $x = a$ (انظر المسائل ١٠ - ١ ، حتى ١٠ - ٣) .

وحيث إن البرنامج (١٠ - ١) غير مقيد بفترة مغلقة ومحددة ، فإنه لا توجد نقط نهائية للأخذ فى الاعتبار . وبدلاً من ذلك ، فإن قيم الدالة الهدفية عند النقط الساكنة وعند النقط التى لا توجد فيها $f'(x)$ تقارن بالقيم النهائية لـ $f(x)$ عندما $x \to \pm\infty$. وقد يحدث ألا توجد أى نهاية منهما (اعتبر $f(x) = \sin x$) ، ولكن إذا وجدت أى من النهايتين ــ وقبلنا $\pm\infty$ « كنهاية » ــ وأدت إلى أفضل قيمة لـ $f(x)$ (الأكبر لبرنامج تعظيم ، والأصغر لبرنامج تصغير) ، فإن الأمثلية الشاملة لـ $f(x)$ لا توجد . وإذا حدثت أفضل قيمة عند إحدى النقط المحددة ، فإن أفضل قيمة هذه تكون أمثلية شاملة . (انظر المسألة ١٠ - ٤) .

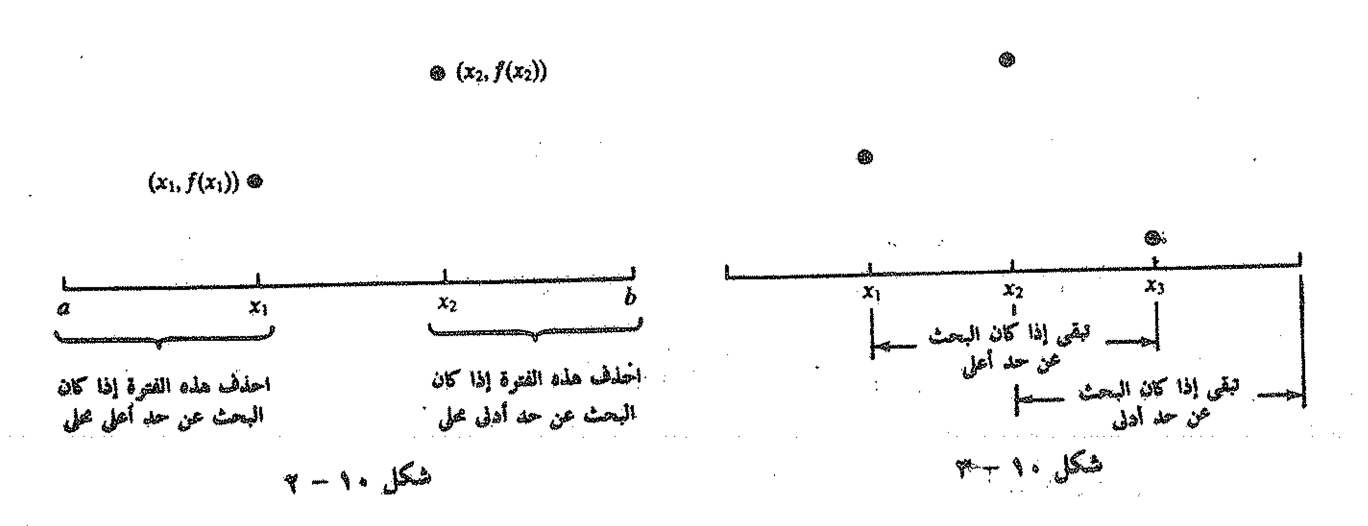
أساليب البحث التتابعى (التسلسلى) SEQUENTIAL-SEARCH TECHNIQUES

من الناحية العملية .. فإن تحديد الأمثلية بالتفاضل والتكامل يكون غير مثمر : إما لأن الدالة الهدفية تكون غير معروفة حسابياً ، فيكون التفاضل مستحيلاً ، أو أن النقط الساكنة لا يمكن الحصول عليها جبرياً . (انظر المسألة ١٠ - ٥) . فى هذه الحالات تستخدم الطرق العددية لتقريب مكان الأمثلية المحلية فى حدود تفاوتات مقبولة .

تبدأ أساليب البحث التتابعى بفترة محددة يفترض أن تكون فيها الدالة الهدفية ذات نموذج أحادى ، بمعنى أن هذه الفترة يفترض أن تحتوى على نقطة واحدة فقط عندها $f(x)$ يكون لها حد أدنى ، أو حد أعلى محلى ، ثم تقلل هذه الأساليب بانتظام الفترة حول القيمة المثلى المحلية ، حتى تضيق القيمة المثلى داخل حدود مقبولة ؛ وهذا التقليص يتأثر بالتقييم المتتابع للدالة الهدفية عند نقط مختارة ، ثم استخدام خاصية النموذج الأحادى لحذف أجزاء من الفترة الحالية .

مثال ١٠ - ٢ : يعرض الشكل ١٠ - ٢ قيم الدالة الهدفية عند النقط x_1 ، x_2 . إذا عرف حد أدنى محلى ليكون الطرف الوحيد فى الفترة $[a, b]$ ، فإن هذا الحد الأدنى يجب أن يكون الى اليسار من x_2 ؛ لذلك فإن $f(x)$ تبدأ فى الزيادة حول هذه النقطة ، وبخاصية النموذج الأحادى ، يجب أن تستمر فى الزيادة لجهة اليمين منها . ومن ثم جزء الفترة $(x_2, b]$ يمكن حذفه .

وإذا كان الحد الأعلى المحلى هو الطرف الوحيد فى الفترة $[a, b]$ ، فإنه يجب أن يكون على اليمين من x_1 ، ويمكن حذف جزء الفترة $[a, x_1)$.



شكل ١٠ - ٢

شكل ١٠ - ٣

يمكن اعتبار البحوث التتابعية النوعية فى الأجزاء الثلاثة الآتية :

بحث فترة الثلاث نقط THREE-POINT INTERVAL SEARCH

تقسم الفترة تحت الاعتبار إلى أرباع ، وتقيم الدالة الهدفية عند الثلاث نقط الداخلية على مسافات متساوية ، وتحدد النقطة الداخلية التى تؤدى إلى أفضل قيمة للهدف (فى حالة الاشتراك اختر إحدى النقط) ، ويحل جزء الفترة التى مركزها عند هذه النقطة ، والمتكونة من ربعين من الفترة الحالية يحل محل الفترة الحالية . وتوجد ١٠ أنماط ممكنة من العينات بما فيها المشتركة ، يمثل أحدها فى الشكل ١٠ - ٣ . انظر المسائل ١٠ - ٦ ، ١٠ - ٧ .

وبحث فترة الثلاث نقط هو أكفأ طريقة بحث على مسافات متساوية بالنسبة للوصول إلى تفاوت محدد مسبقاً بأقل عدد من تقييمات الدوال . وهو أيضاً أحد أسهل البحوث التتابعية لاستخدام الحاسبات .

بحث فيبوناكس FIBONACCI SEARCH

يمثل تتابع فيبوناكس $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}$ أساس أحد أكفأ أساليب البحث التتابعى ، ويتم الحصول على كل عدد فى التتابع بإضافة العددين السابقين ، باستثناء العددين الأولين ، F_1 ، F_0 الذين يكونان 1 .

ينشأ بحث فيبوناكس بتحديد أصغر عدد فيبوناكسى يحقق $F_N\epsilon \geq b - a$ ، حيث إن ϵ هى تفاوت محدد مسبقاً ، و $[a, b]$ الفترة الأصلية . كون $\epsilon' \equiv (b - a)/F_N$. تقع النقطتان الأولتان فى البحث الى الداخل عدد $F_{N-1}\epsilon'$ وحدة من نقط النهاية $[a, b]$ ، حيث إن F_{N-1} هو عدد فيبوناكس الذى يسبق F_N . ويمكن أخذ النقط الأخرى فى الاعتبار واحدة بواحدة ، وتوضع إلى الداخل عدد $F_j\epsilon'$ $(j = N - 2, N - 3, \ldots, 2)$ وحدة من أجدد نقطة نهاية للفترة الحالية . (انظر المسألة ١٠ - ٨) . لاحظ أنه بطريقة فيبوناكس يمكن مقدماً تحديد عدد تقييمات الدوال المطلوبه لتحقيق دقة معينة ، وأكثر من ذلك ، هذا العدد لايعتمد على الدالة الخاصة الأحادية النموذج .

بحث المتوسط الذهبى GOLDEN-MEAN SEARCH

يُبنى بحث فيبوناكس القريب من الكفاءة على $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.6180\cdots$ الذى يُعرف ، بالمتوسط الذهبى . وتقع النقطتان الأولتان للبحث على مسافة $(0.6180)(b-a)$ وحدة إلى الداخل ، من النقط النهائية للفترة الأولية $[a, b]$. وتؤخذ النقط المثالية التالية فى الاعتبار ، واحدة بعد الأخرى ، وتوضع إلى الداخل $0.6180 L_i$ وحدة ، من أجدد نقطة نهائية للفترة الحالية ، حيث L_i تدل على طول هذه الفترة . انظر المسألة (١٠ — ٩) .

الدوال المقعرة CONVEX FUNCTIONS

تضمن طرق البحث تقريب القيم المثلى الشاملة فى فترة البحث فقط ، عندما تكون الدالة الهدفية أحادية النموذج . وعملياً .. لا نعرف ما إذا كانت الدالة الهدفية أحادية النموذج فى فترة محددة . وعند تطبيق طريقة البحث فى هذه الحالة ، فإنه ليس من المؤكد أنها ستكشف القيمة المثلى الشاملة المطلوبة . (انظر المسألة ١٠ — ١١) ، ويستثنى من ذلك البرامج التى تحتوى على دوال هدفية محدبة أو مقعرة .

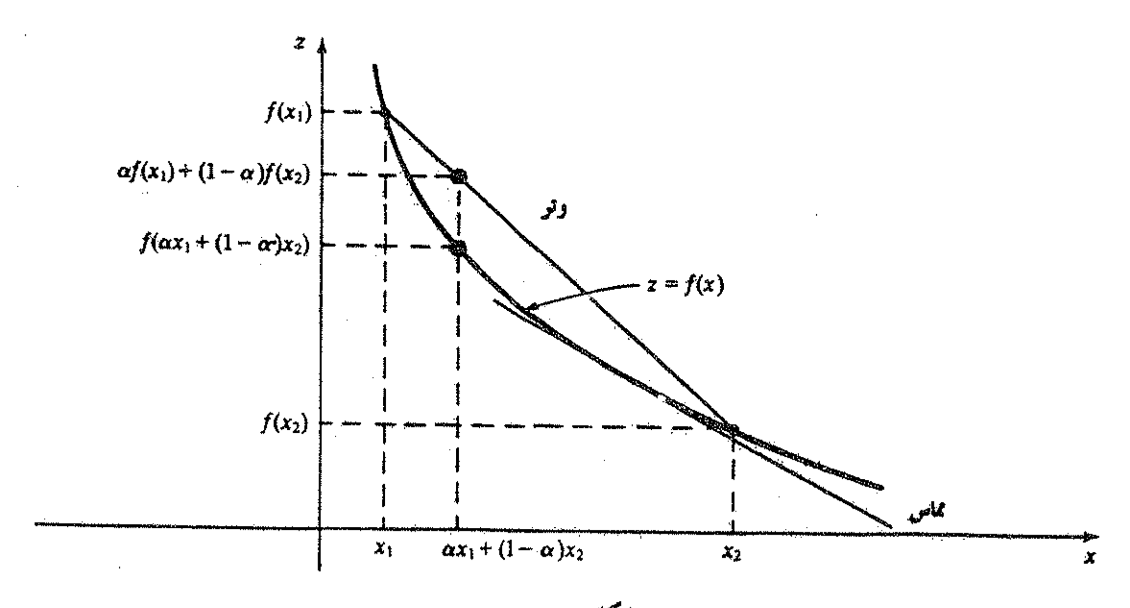
تكون الدالة $f(x)$ مقعرة فى الفترة $\mathscr{I}$ (محددة أو غير محددة) ، إذا كانت النقطتان x_2 ، x_1 فى $\mathscr{I}$ ولكل $0 \le \alpha \le 1$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \qquad (١٠ - ٣)$$

إذا كانت (١٠ — ٣) تحقق بمعكوس المتباينة ، فإن $f(x)$ تكون محدبة ، لذلك فالقيمة السالبة للدالة المقعرة تكون محدبة ، والعكس صحيح . يبين شكل ١٠ — ٤ رسم الدالة المقعرة ، وبتحديد الخصائص الهندسية للرسم ، فإن المنحنى يقع على أو فوق أحد مماساته . والدوال المحدبه أو المقعرة تكون أحادية النموذج .

نظرية ١٠ — ٤ : إذا كانت $f(x)$ تفاضل مرتين فى $\mathscr{I}$ ، فإن $f(x)$ تكون مقعرة فى $\mathscr{I}$ إذا كانت فقط $f''(x) \ge 0$ لكل قيم x فى $\mathscr{I}$ ، وتكون محدبة إذا كانت فقط $f''(x) \le 0$ لكل قيم x فى $\mathscr{I}$

نظرية ١٠ — ٥ : إذا كانت $f(x)$ مقعرة فى $\mathscr{I}$ ، فإن أى حد أدنى محلى فى $\mathscr{I}$ يكون حداً أدنى شاملاً فى $\mathscr{I}$. وإذا كانت $f(x)$ محدبة فى $\mathscr{I}$ ، فإن أى حد أدنى محلى فى $\mathscr{I}$ يكون حداً أعلى فى $\mathscr{I}$.



شكل ١٠ — ٤

إذا كانت (١٠ ـــ ٣) تتحقق بمتباينة محددة ماعدا عند $\alpha = 1$ ، $\alpha = 0$ ، فتكون الدالة مقعرة بالتحديد . مثل هذه الدالة تكون لها مشتقة ثانية موجبة محددة ، وأى حد أدنى محلى (وبالتالى شامل) يكون أحادياً . وتتحقق النتائج المناظرة للدوال المحدبة المحددة .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٠ - ١ تعظيم $z = x(5\pi - x)$ on $[0, 20]$

هنا $f(x) = x(5\pi - x)$ متصلة و $f'(x) = 5\pi - 2x$. وبتعريف المشتقة لأى مكان ، يحدث الحد الأعلى الشامل فى $[0, 20]$ عند النقطة النهائية $x = 0$ or $x = 20$ أو عند نقطة ساكنة ، حيث $f'(x) = 0$. نجد أن $x = 5\pi/2$ هى النقطة الساكنة الوحيدة فى $[0, 20]$. بتقييم الدالة الهدفية عند كل من هذه النقط نحصل على الجدول :

x	0	$5\pi/2$	20
$f(x)$	0	61.69	−85.84

ومنه نستنتج أن $x^* = 5\pi/2$ ، $z^* = 61.69$.

١٠ - ٢ تعظيم $z = |x^2 - 8|$ on $[-4, 4]$

هنا

$$f(x) = |x^2 - 8| = \begin{cases} x^2 - 8 & x \le -\sqrt{8} \\ 8 - x^2 & -\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8} \\ x^2 - 8 & \sqrt{8} \le x \end{cases}$$

دالة متصلة عند

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < -\sqrt{8} \\ -2x & -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \\ 2x & \sqrt{8} < x \end{cases}$$

لاتوجد المشتقة عند $x = \pm\sqrt{8}$ وتكون صفرية عند $x = 0$ ، وتكون كل الثلاث نقط فى $[-4, 4]$. وبتقييم الدالة الهدفية عند كل من هذه النقط ، وعند نقطة النهاية $x = \pm 4$ تكون الجدول

x	−4	$-\sqrt{8}$	0	$\sqrt{8}$	4
$f(x)$	8	0	8	0	8

ومنه نستنتج أن الحد الأعلى الشامل فى $[-4, 4]$ هو $z^* = 8$ ، والمفترض أن يكون عند الثلاث نقط $x^* = \pm 4$ و $x^* = 0$

١٠ - ٣ تصغير $z = f(x)$ فى $[0, 1]$ ، حيث

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

لاتنطبق النظرية ١٠ ـــ ١ إذا كانت الدالة غير متصلة فى الفترة المذكورة ، كما فى هذه الحالة . وفى الحقيقة لايوجد أى حد أدنى على أو شامل لهذه المسألة ، حيث تفترض الدالة اختيارياً قيماً صغيرة موجبة ، وليست قيماً صفرية .

١٠ - ٤ تعظيم $z = xe^{-x^2}$

هنا

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2)$$

وتعرف لكل قيم x ، وتختفى فقط عند $x = \pm 1/\sqrt{2}$. وحيث إن x غير محددة ، فتكون قيم الدالة الهدفية عند النقطة الساكنة

$$f(\pm 1/\sqrt{2}) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \pm 0.429$$

يجب أن تقارن بالقيم النهائية لـ $f(x)$ مثل $x \to \pm\infty$ ، التى تكون صفراً فى كلتا الحالتين . وبتسجيل هذه النتائج

x	$x \to -\infty$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$x \to \infty$
$f(x)$	0	−0.429	0.429	0

نرى أن الحد الأعلى الشامل يوجد عند $x^* = 1/\sqrt{2}$ ، ويكون $z^* = 0.429$.

١٠ - ٥ تصغير $z = x \sin 4x$ on $[0, 3]$

هنا $f'(x) = \sin 4x + 4x \cos 4x$ حيث تعرف فى أى مكان . ومعادلة النقط الساكنة

$$\sin 4x + 4x \cos 4x = 0$$

لايمكن أن تحل جبرياً ، ولذلك فلا يمكن تعريف النقط الساكنة بدقة فى $[0, 3]$. ومع ذلك ، فى حالة الدوال البسيطة كهذه الدالة ، فإن جزءًا كبيراً ممكن أن تعلمه من الرسم فى شكل (١٠ ـــ ٥) . من المشاهد أن النقط الساكنة تتبادل مع الأصفار فى $f(x)$ (نظرية رول) ، والتى تكون أصفاراً فى $\sin 4x$. الحد الأدنى الشامل لـ $f(x)$ يجب أن يبقى فى الفترة الأصغر $[7\pi/8, 3]$ ، بمعنى

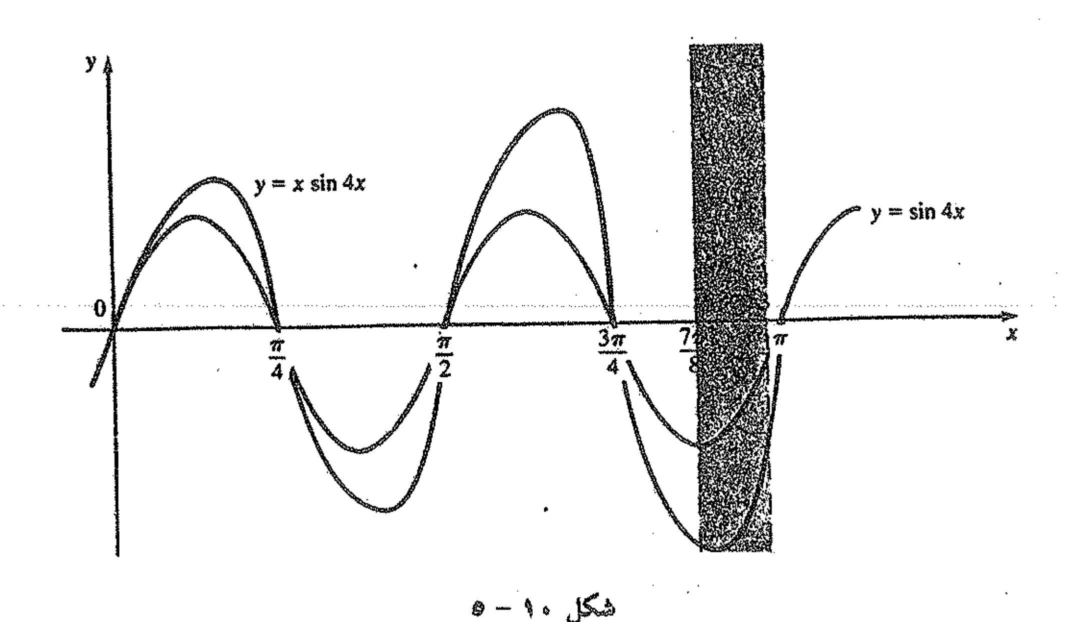
$$2.75 \leq x^* \leq 3$$

لأن هذه هى المنطقة التى تضرب فيها القيم السالبة لـ $\sin 4x$ بأكبر قيمة موجبة لـ x . وبعمل التقييم

$$f(7\pi/8) = \frac{7\pi}{8}(-1) = -2.75$$

$$f(3) = 3\sin 12 = -1.61$$

نستنتج أن الحد الأدنى الشامل يحدث عند الحد الأدنى المحلى الثانى فى $f(x)$ ، وبالقرب من $x = 7\pi/8$ ، وليس عند النقطة النهائية $x = 3$.



شكل ١٠ - ٥

١٠ - ٦ استخدم بحث فترة الثلاث نقاط لتقريب موقع الحد الأدنى الشامل لـ $f(x) = x\sin 4x$ فى $[0, 3]$ داخل $\epsilon = 0.01$.

كنتيجة للتحليل بالرسم فى المسألة ١٠ - ٥ ، نحدد الانتباه إلى الفترة الأصغر $[7\pi/8, 3]$ ، فيحدث الحد الأدنى الشامل فى هذه الفترة الأصغر ، وتكون الدالة هنا أحادية النموذج .

المحاولة الأولى : بقسمة $[7\pi/8, 3]$ إلى أرباع ، نأخذ $x_1 = 2.8117$ $x_2 = 2.8744$ ، $x_3 = 2.9372$ كثلاث نقط داخلية ونحسب :

$$f(x_1) = x_1 \sin 4x_1 = 2.8117 \sin 4(2.8117) = -2.7234$$
$$f(x_2) = x_2 \sin 4x_2 = 2.8744 \sin 4(2.8744) = -2.5197$$
$$f(x_3) = x_3 \sin 4x_3 = 2.9372 \sin 4(2.9372) = -2.1426$$

وهنا x_1 هى النقطة الداخلية التى تؤدى إلى أصغر قيمة $f(x)$ ؛ لذلك نأخذ جزء الفترة ذات المركز فى x_1 ، وبالتحديد $[7\pi/8, 2.8744]$ ، كفترة جديدة مرغوب فيها .

المحاولة الثانية : بقسمة $[7\pi/8, 2.8744]$ إلى أرباع نحصل على $x_4 = 2.7803,\ x_1 = 2.8117,\ x_5 = 2.8430$ كثلاث نقط داخلية لهذه الفترة . لذلك

$$f(x_4) = x_4 \sin 4x_4 = 2.7803 \sin 4(2.7803) = -2.7584$$
$$f(x_1) = -2.7234 \quad \text{(as before)}$$
$$f(x_5) = x_5 \sin 4x_5 = 2.8430 \sin 4(2.8430) = -2.6439$$

من هذه النقط الداخلية x_4 تؤدى إلى أصغر قيمة $f(x)$ ، لذلك نأخذ الفئة الأصغر المركزة فيها $[7\pi/8, 2.8117]$ كفترة جديدة .

المحاولة الثالثة : نقسم $[7\pi/8, 2.8117]$ إلى أرباع عند $x_7 = 2.7960$ $x_4 = 2.7803$ $x_6 = 2.7646.$ كثلاث نقط داخلية ، ولذلك

$$f(x_6) = x_6 \sin 4x_6 = 2.7646 \sin 4(2.7646) = -2.7591$$
$$f(x_4) = -2.7584 \quad \text{(as before)}$$
$$f(x_7) = x_7 \sin 4x_7 = 2.7960 \sin 4(2.7960) = -2.7465$$

وهنا x_6 هى النقطة الداخلية التى تؤدى إلى أصغر قيمة للدالة الهدفية ؛ فتكون الفترة الجديدة المرغوبة هى الموجودة بمركزها ، بالتحديد $[7\pi/8, 2.7803]$

المحاولة الرابعة : نقسم $[7\pi/8, 2.7803]$ إلى أرباع عند $x_9 = 2.7724$ ، $x_6 = 2.7646$ ، $x_8 = 2.7567$ كثلاث نقط داخلية جديدة ، والآن

$$f(x_8) = x_8 \sin 4x_8 = 2.7567 \sin 4(2.7567) = -2.7554$$
$$f(x_6) = -2.7591 \quad \text{(as before)}$$
$$f(x_9) = x_9 \sin 4x_9 = 2.7724 \sin 4(2.7724) = -2.7602$$

وحيث إن x_9 هى النقطة الداخلية التى تعطى أصغر قيمة $f(x)$ ، نأخذ الفترة الجزئية ذات المركز عند x_9 ، بالتحديد $[2.7646, 2.7803]$ كفترة جديدة ، ونقطة المنتصف لهذه الفترة ، مع ذلك ، تقع داخل التفاوت المحدد مسبقاً $\epsilon = 0.01$ لكل النقط الأخرى فى الفترة ، ولذلك فإننا نقبلها كموضع للحد الأدنى ، أى أن : $x^* = x_9 = 2.7724$ عند $z^* = f(x_9) = -2.7602$.

١٠ - ٧ استخدم بحث فترة الثلاث نقاط لتقريب الحد الأعلى فى $f(x) = x(5\pi - x)$ فى الفترة $[0, 20]$ داخل $\epsilon = 1$.

حيث $f''(x) = -2 < 0$ فى أى مكان يتبع من النظرية ١٠ - ٤ أن $f(x)$ تكون محدبة ، وبالتالى أحادية النموذج فى $[0, 20]$. لذلك يؤكد بحث فترة الثلاث نقط الاقتراب من الحد الأعلى الشامل .

المحاولة الأولى : بقسمة $[0, 20]$ إلى أرباع نحصل على $x_3 = 15$ ، $x_2 = 10$ ، $x_1 = 5$ كثلاث نقط داخلية . لذلك

$$f(x_1) = x_1(5\pi - x_1) = 5(5\pi - 5) = 53.54$$
$$f(x_2) = x_2(5\pi - x_2) = 10(5\pi - 10) = 57.08$$
$$f(x_3) = x_3(5\pi - x_3) = 15(5\pi - 15) = 10.62$$

حيث x_2 هى النقطة الداخلية التى تعطى أكبر قيمة للدالة الهدفية ، نأخذ الفترة $[5, 15]$ التى مركزها عند x_2 كفترة جديدة .

المحاولة الثانية : نقسم [5, 15] إلى أرباع عند $x_5 = 12.5$ ، $x_2 = 10$ $x_4 = 7.5$ كنقط داخلية . لذلك

$$f(x_4) = x_4(5\pi - x_4) = (7.5)(5\pi - 7.5) = 61.56$$
$$f(x_2) = 57.08 \quad \text{(as before)}$$
$$f(x_5) = x_5(5\pi - x_5) = (12.5)(5\pi - 12.5) = 40.10$$

وحيث x_4 هي النقطة الداخلية المؤدية إلى أكبر قيمة $f(x)$ ، نأخذ الفترة [5, 10] التي مركزها x_4 كفترة جديدة .

المحاولة الثالثة : نقسم [5, 10] إلى أرباع عند $x_7 = 8.75$ ، $x_4 = 7.5$ $x_6 = 6.25$ كفترة جديدة . لذلك

$$f(x_6) = (6.25)(5\pi - 6.25) = 59.11$$
$$f(x_4) = 61.56 \quad \text{(as before)}$$
$$f(x_7) = (8.75)(5\pi - 8.75) = 60.88$$

حيث تؤدى x_4 إلى أكبر قيمة لـ $f(x)$ ، نأخذ الفترة [6.25, 8.75] ، التي مركزها عند x_4 ، كفترة جديدة .

المحاولة الرابعة : بقسمة [6.25, 8.75] إلى أرباع ، نوجد $x_9 = 8.125$ ، $x_4 = 7.5$ $x_8 = 6.875$ كنقط داخلية جديدة . لذلك

$$f(x_8) = (6.875)(5\pi - 6.875) = 60.73$$
$$f(x_4) = 61.56 \quad \text{(as before)}$$
$$f(x_9) = (8.125)(5\pi - 8.125) = 61.61$$

والآن x_9 هي النقطة الداخلية التي تعطى أكبر قيمة للدالة الهدفية ، نأخذ الفترة الأصغر عند المركز x_9 ، وبالتحديد [7.5, 8.75] كفترة جديدة للاعتبار ، ومع ذلك تقع نقطة المنتصف لهذه الفترة داخل التفاوت المحدد مسبقاً $\epsilon = 1$ من كل النقط الأخرى في الفترة ، ومن ثم نأخذ

$$x^* = x_9 = 8.125$$

عند $z^* = f(x_9) = 61.61$

۱۰ – ۸ حل المسألة ۱۰ ـــ ۷ مرة أخرى باستخدام بحث فيبوناكس

النقط الأولية . عدد فيبوناكس الأول ، بحيث إن $F_N(1) \geq 20 - 0$ هو $F_7 = 21$ نضع $N = 7$ ،

$$\epsilon' = \frac{b - a}{F_N} = \frac{20 - 0}{21} = 0.9524$$

موقع النقطتين الأوليين فى البحث

$$F_6\epsilon' = 13(0.9524) = 12.38 \text{ units}$$

إلى الداخل من كل نقطة نهائية . وبالتالى

$$x_1 = 0 + 12.38 = 12.38 \qquad x_2 = 20 - 12.38 = 7.62$$
$$f(x_1) = (12.38)(5\pi - 12.38) = 41.20$$
$$f(x_2) = (7.62)(5\pi - 7.62) = 61.63$$

والتى ترسم فى الشكل ١٠ - ٦ (أ) . باستخدام خاصية النموذج الأحادى ، فإننا نستنتج أن الحد الأعلى يحدث إلى اليسار من 12.38 ، ونختصر الفترة الى [0, 12.38] .

المحاولة الأولى : عدد فيبوناكس الأصغر التالى (F_6 كانت آخر قيمة مستخدمة) هو $F_5 = 8$ ؛ وبالتالى توقع النقطة التالية فى البحث

$$F_5\epsilon' = 8(0.9524) = 7.619 \text{ وحدة}$$

إلى الداخل من أجدد نقطة نهائية 12.38 لذلك

$$x_3 = 12.38 - 7.619 = 4.761$$
$$f(x_3) = (4.761)(5\pi - 4.761) = 52.12$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود فى الشكل ١٠ ـــ ٦ (أ) نوجد شكل ١٠ ـــ ٦ (ب) ، ومنه نستنتج أن الحد الأقصى يجب أن يحدث فى الفترة الجديدة [4.761, 12.38] .

المحاولة الثانية : عدد فيبوناكس الأصغر التالى الآن هو $F_4 = 5$. لذلك

$$x_4 = 4.761 + F_4\epsilon' = 4.761 + 5(0.9524) = 9.523$$
$$f(x_4) = (9.523)(5\pi - 9.523) = 58.90$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود فى الشكل ١٠ ـــ ٦ (ب) ، نحصل على الشكل ٦ ـــ ١٠ (جـ) ، ومنه نستنتج أن الفترة الجديدة هى [4.761, 9.523]

المحاولة الثالثة : عدد فيبوناكس الأصغر التالى هو $F_3 = 3$. ومن ثم

$$x_5 = 9.523 - 3(0.9524) = 6.666$$
$$f(x_5) = (6.666)(5\pi - 6.666) = 60.27$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود فى الشكل ١٠ ـــ ٦ (جـ) نحصل على الشكل ١٠ ـــ ٦ (د) ، وينتج من خاصية النموذج الأحادى أن الفترة الجديدة هى [6.666, 9.523] .

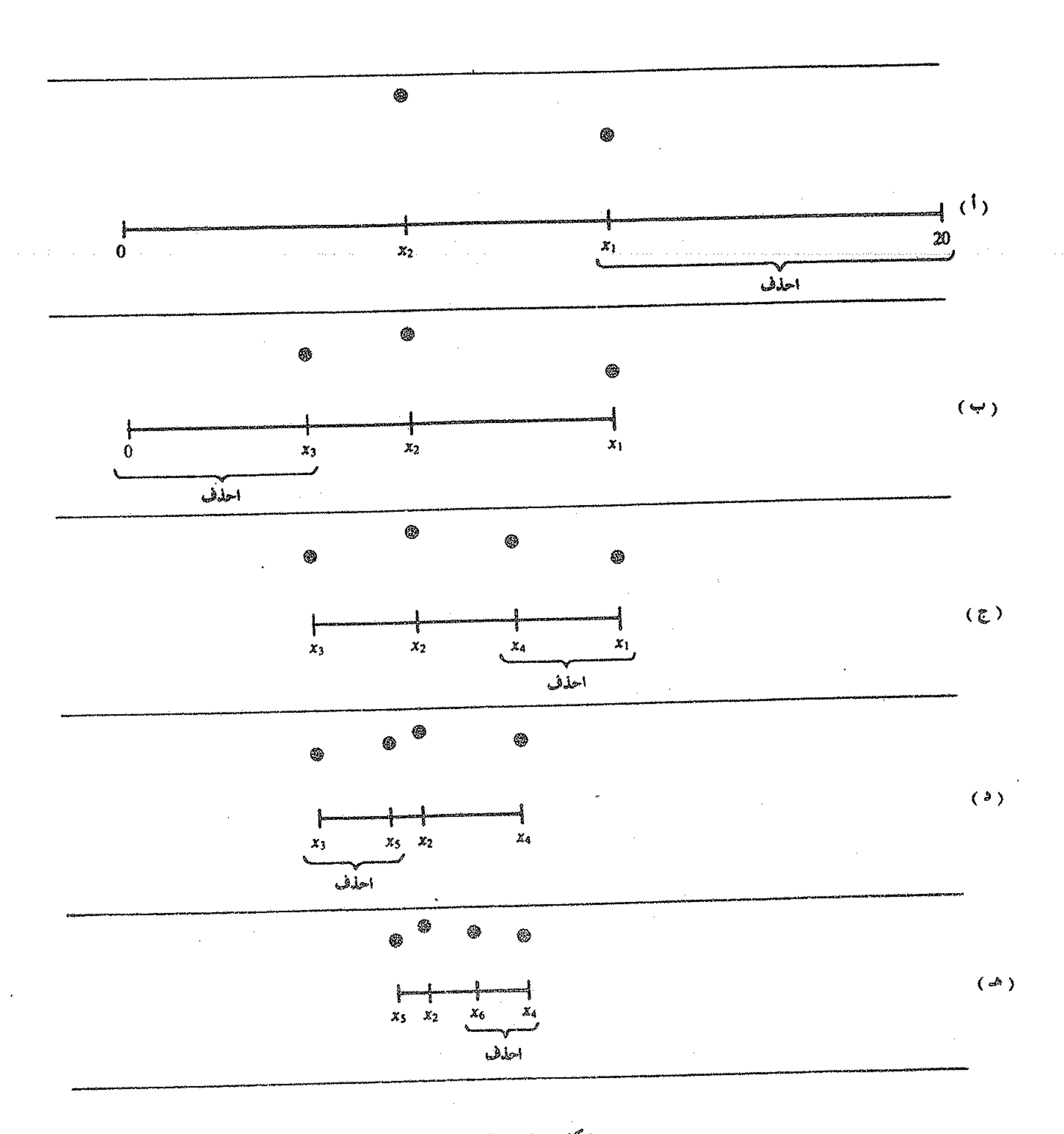
المحاولة الرابعة : عدد فيبوناكس الأصغر التالى الآن هو $F_2 = 2$. ومن ثم

$$x_6 = 6.666 + 2(0.9524) = 8.571$$
$$f(x_6) = (8.571)(5\pi - 8.571) = 61.17$$

بإضافة هذه النقطة إلى الجزء الموجود فى الشكل ١٠ ــ ٦ (د) نحصل على الشكل ١٠ ــ ٦ (هـ) ، ومنه نستنتج أن [6.666, 8.571] هى الفترة الجديدة . ومع ذلك منتصف هذه النقطة يقع داخل $\epsilon = 1$ (فى الحقيقة داخل $\epsilon' = 0.9524$) من كل نقطة أخرى فى الفترة . (نظرياً يجب أن تنطبق نقطة المنتصف مع x_2 ؛ والاختلاف البسيط الواضح ينتج من التقريب) ، ولذلك نقبل x_2 كموقع الحد الأقصى ، بمعنى

$$x^* = x_2 = 7.62$$

عند $z^* = f(x_2) = 61.63$



شكل ١٠ - ٦

١٠ - ٩ حل المسألة ١٠ - ٧ مرة أخرى باستخدام بحث المتوسط الذهبى .

النقط الأولية . طول الفترة الأولية هو $L_1 = 20$ ، لذلك توقع النقطتين الأوليين فى البحث

$(0.6180)(20) = 12.36$ وحدة

للداخل من كل نقطة نهائية . لذلك

$$x_1 = 0 + 12.36 = 12.36 \qquad x_2 = 20 - 12.36 = 7.64$$
$$f(x_1) = (12.36)(5\pi - 12.36) = 41.38$$
$$f(x_2) = (7.64)(5\pi - 7.64) = 61.64$$

والنقط $(x_2, f(x_2))$ ، $(x_1, f(x_1))$ قريبة جداً من النقط المبينة فى الشكل ١٠ - ٦ (أ) . ونتتج من خاصية النموذج الأحادى أن الحد الأعلى يجب أن يحدث إلى اليسار من 12.36 ، ومن ثم تبقى $[0, 12.36]$ هى الفترة الجديدة .

المحاولة الأولى : الفترة الجديدة طولها $L_2 = 12.36$ ، ولذلك فإن النقطة التالية فى البحث تقع $0.6180L_2$ وحدة إلى الداخل من أجدد نقطة نهائية . لذلك .

$$x_3 = 12.36 - (0.6180)(12.36) = 4.722$$
$$f(x_3) = (4.722)(5\pi - 4.722) = 51.88$$

وبإضافة هذه النقطة الجديدة يستعمل الشكل ١٠ - ٦ (ب) ، ونحصل على $[4.722, 12.36]$ كفترة جديدة .

المحاولة الثانية : $L_3 = 12.36 - 4.722 = 7.638$ لذلك

$$x_4 = 4.722 + (0.6180)(7.638) = 9.442$$
$$f(x_4) = (9.442)(5\pi - 9.442) = 59.16$$

ويصبح الشكل كما فى ١٠ - ٦ (جـ) ، ومنه نستنتج أن $[4.722, 9.442]$ هى الفترة الجديدة .

المحاولة الثالثة : $L_4 = 9.442 - 4.722 = 4.720$ لذلك

$$x_5 = 9.442 - (0.6180)(4.720) = 6.525$$
$$f(x_5) = (6.525)(5\pi - 6.525) = 59.92$$

ويصبح الشكل هو ١٠ - ٦ (د) ، ومنه نستنتج أن $[6.525, 9.442]$ هى الفترة الجديدة .

المحاولة الرابعة : $L_5 = 9.442 - 6.525 = 2.917$ ، ومن ثم

$$x_6 = 6.525 + (0.6180)(2.917) = 8.328$$
$$f(x_6) = (8.328)(5\pi - 8.328) = 61.46$$

بهذه النقطة الجديدة نصل إلى الشكل ١٠ - ٦ (هـ) ، ونجد أن $[6.525, 8.328]$ هى الفترة الجديدة .

لاحظ أن طول هذه الفترة الجديدة يقل عن $2\epsilon = 2$ ، ولكن النقطة العينة المحتواة x_2 لاتقع داخل ϵ لكل النقط الأخرى فى الفترة . لذلك فإن محاولة أخرى تكون مطلوبة .

المحاولة الخامسة : $L_6 = 8.328 - 6.525 = 1.803$. لذلك

$$x_7 = 8.328 - (0.6180)(1.803) = 7.214$$
$$f(x_7) = (7.214)(5\pi - 7.214) = 61.28$$

هذه النقطة الجديدة تحدد $[x_7, x_6] = [7.214, 8.328]$ كفترة جديدة . ومع ذلك فالنقطة الداخلية $x_2 = 7.64$ تكون داخل $\epsilon = 1$ لكل النقط الأخرى فى الفترة . لذلك نأخذها كموقع الحد الأقصى ، بمعنى

$$x^* = x_2 = 7.64$$

عند $z^* = f(x_2) = 61.64$

١٠ - ١٠ قارن كفاءة طرق البحث الثلاث فى تحديد الحد الأقصى $x(5\pi - x)$ فى $[0, 20]$.

نجحت كل طريقة فى تقريب موقع الحد الأقصى $x^* = 5\pi/2 = 7.854$ إلى داخل $\epsilon = 1$ كما هو المطلوب . وكان بحث فيبوناكس هو الأكفأ (انظر المسألة ١٠ - ٨) وتحقيق الدقة المطلوبة بستة تقييمات للدوال . ويتطلب بحث فترة الثلاث نقط (انظر المسألة ١٠ - ٧) وبحث المتوسط الذهبى (انظر المسألة ١٠ - ٩) تسعة وسبعة تقييمات للدوال على التوالى .

١٠ - ١١ حل المسألة ١٠ - ٦ مرة أخرى بدون تقييد الفترة $[0, 3]$ من البداية بفترة أصغر تكون الدالة فيها أحادية النموذج . ناقش النتيجة .

بتطبيق بحث الفترة ذات الثلاث نقاط على $f(x) = x \sin 4x$ فى $[0, 3]$ مباشرة ، نوجد بالتتابع مدخلات الجدول ١٠ - ١ . ويتبع ذلك أن

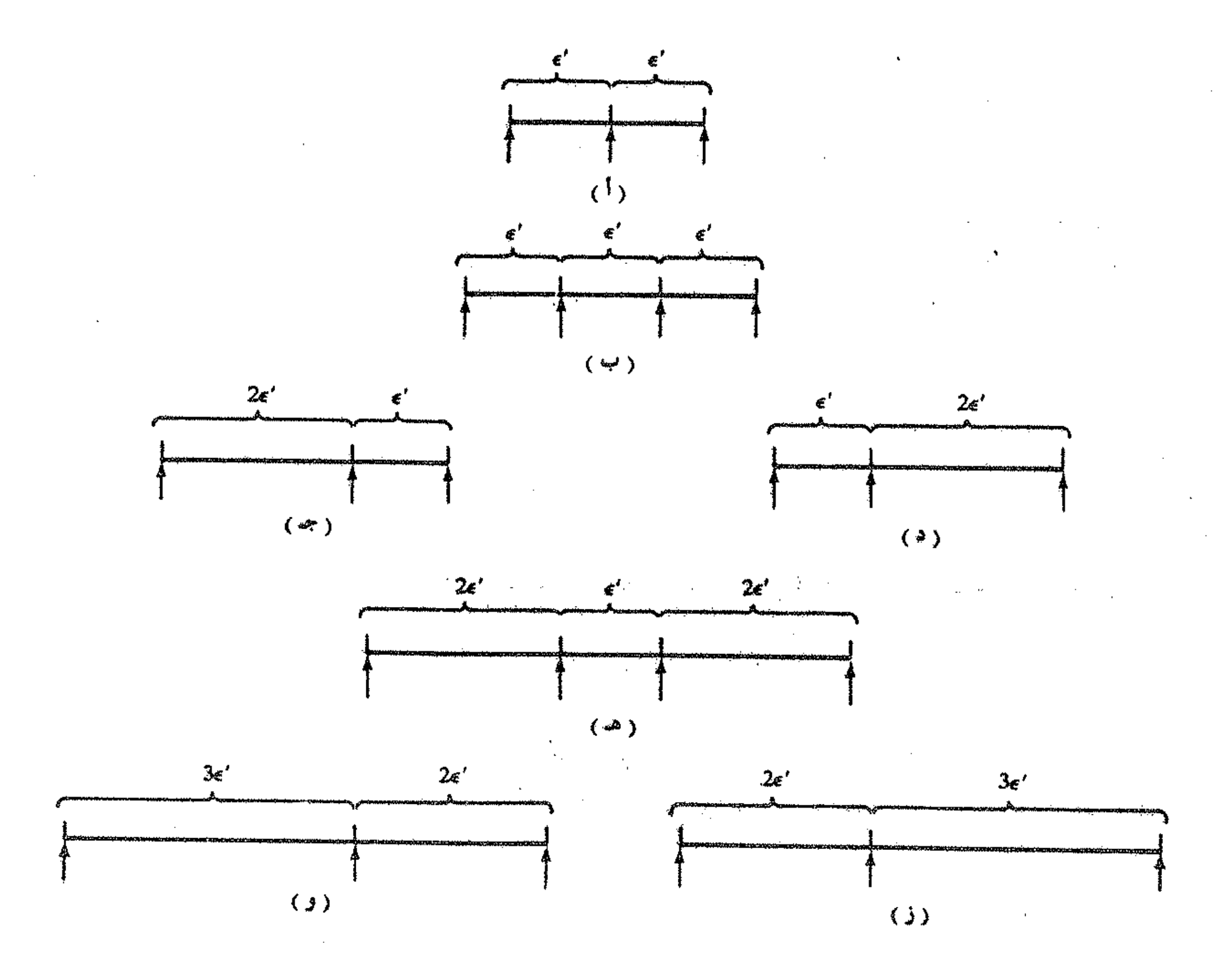
$$x^* \approx 1.231$$

عند $z^* = f(x^*) = -1.20354$

واضح من شكل ١٠ - ٥ أن طريقة البحث قد اقتربت من الحد الأدنى المحلى بقرب $3\pi/8$ ، وليس للحد الأدنى الشامل فى $[0, 3]$ الذى وجد فى المسألة ١٠ - ٦ . وكانت ستحدث نفس النتيجة إذا طبق بحث فيبوناكس ، أو بحث المتوسط الذهبى للفترة الكلية $[0, 3]$.

جدول ١٠ – ١

الفتره الحاليه	النقط الداخلية			$f(x) = x \sin 4x$		
	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$
[0, 3]	0.75	1.5	2.25	0.1058	−0.4191	0.9273
[0.75, 2.25]	1.125	1.5	1.875	−1.100	−0.4191	1.759
[0.75, 1.5]	0.9375	1.125	1.313	−0.5358	−1.100	−1.126
[1.125, 1.5]	1.219	1.313	1.406	−1.203	−1.126	−0.8611
[1.125, 1.313]	1.172	1.219	1.266	−1.172	−1.203	−1.189
[1.172, 1.266]	1.196	1.219	1.243	−1.193	−1.203	−1.201
[1.196, 1.243]	1.208	1.219	1.231	−1.199	−1.20272	−1.20354
[1.219, 1.243]	1.225	1.231	1.237	−1.20350	−1.20354	−1.2028
[1.225, 1.237]						



شكل ١٠ – ٧

١٠ - ١٢ استنتج طريقة بحث فيبوناكس

$\mathcal{I}_{N-3}$	$\mathcal{I}_{N-2}$	$\mathcal{I}_{N-3}$
٣	٢	١

إذا كانت آخر فترة تحت الاعتبار $\mathcal{I}_{N-1}$ أكبر مايمكن ، فإنها تحتوى على تقريب إلى الأمثلية المحلية المناسبة داخل ϵ' ، ويجب أن توقع نقط البحث التى أوجدت هذه الفترة كما هو مبين بالأسهم فى الشكل ١٠ - ٧ (أ) . ونقطة المنتصف لهذه الفترة هى التقريب النهائى . والآن $\mathcal{I}_{N-1}$ نفسها يمكن الحصول عليها من الفترة الأكبر $\mathcal{I}_{N-2}$ بحذف الجزء من الفترة الأكبر بناءً على خاصية أحادى النموذج ، ويتضمن الشكل ١٠ - ٧ (أ) دالة أحادية النموذج اختيارية ، $\mathcal{I}_{N-2}$ يجب أن يكون لها الشكل المتماثل كما فى شكل ١٠ - ٧ (ب) ، حيث تدل الأسهم ، مرة أخرى على مواقع نقط البحث أو النقط النهائية للفترة الأصلية . وبحذف إما ثلث الطرف الأيمن أو ثلث الطرف الأيسر من الشكل ١٠ - ٧ (ب) ليؤول إلى الشكل ١٠ - ٧ (أ) . ومع ذلك .. فإن الشكل ١٠ - ٧ (ب) هو نفسه نتيجة إضافة نقطة بحث واحدة . وقبل إضافة هذه النقطة $\mathcal{I}_{N-2}$ يجب أن تكون من صورة الشكل ١٠ - ٧ (جـ) ، أو كما فى الشكل ١٠ - ٧ (د) .

يمكن الحصول على $\mathcal{I}_{N-2}$ من الفترة الأكبر $\mathcal{I}_{N-3}$ بحذف جزء من الفترة الأكبر بناءًا على خاصية النموذج الأحادى . وليتضمن الشكل ١٠ - ٧ (جـ) أو ١٠ - ٧ (د) (١) يجب أن تأخذ الشكل ١٠ - ٧ (هـ) . ويجب حذف أى من الطرف الأيسر من الفترة الأصغر ، أو الطرف الأيمن من الفترة الأصغر من الشكل ١٠ - ٧ (هـ) لتوليد (٢) ومع ذلك فإن ١٠ - ٧ (هـ) هو نتيجة إضافة نقطة بحث . وقبل إضافة هذه النقطة (٣) يجب أن تكون قد أخذت الشكل ١٠ - ٧ (و) أو الشكل ١٠ - ٧ (ز) .

بالاستمرار فى هذه الطريقة ، وبالتعبير عن طول $\mathcal{I}_j$ بـ L_j نجد أن $L_{N-1} = 2\epsilon'$ $L_{N-2} = 3\epsilon'$ $L_{N-3} = 5\epsilon$ $L_{N-4} = 8\epsilon'$ $L_{N-5} = 13\epsilon'$ وهكذا . وحيث إن المعاملات جزء من تتابع فيبوناكس نحصل على

$$L_1 = F_N\epsilon' \qquad L_2 = F_{N-1}\epsilon' \qquad \cdots \qquad L_{N-2} = F_3\epsilon' \qquad L_{N-1} = F_2\epsilon' \tag{1}$$

ولكن N تختار ، بحيث إن $F_N\epsilon' = b - a$. لذلك L_1 هى الفترة الأولية ، ونكون قد وصلنا إلى خطوات بحث فيبوناكس (بطريقة معكوسة) .

١٠ - ١٣ استنتج طريقة بحث المتوسط الذهبى

من (١) فى المسألة ١٠ - ١٢ . $L_2 = F_{N-1}\epsilon'$ $L_1 = F_N\epsilon'$ وإذا كانت N كبيرة تعطى المسألة ١٠ - ٢٦

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{F_{N-1}}{F_N} \approx \lim_{N\to\infty} \frac{F_{N-1}}{F_N} = 0.6180\cdots$$

إذن $L_2 = 0.6180 L_1$ وبتشابه الأسباب ، وحيث إن N كبيرة ، فإن نفس التقريب يتحقق لأى فترتين متتاليتين فى بحث فيبوناكس ، بمعنى أن $L_i = 0.6180 L_{i-1}$ ، وهى المعادلة التعريفية لبحث المتوسط الذهبى .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

١٠ - ١٤ أوجد الأمثلية المحلية والشاملة لـ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ فى $(a)\ [0, 3],\ (b)\ [1, 4],\ (c)\ [-1, 5].$

١٠ - ١٥ أوجد كل الأمثلية المحلية والشاملة لـ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ فى (أ) $[0, 3]$ ، (ب) $[0, 2]$ ، (جـ) $[0, \infty)$.

١٠ - ١٦ أوجد كل الأمثلية المحلية والشاملة لـ $f(x) = x + x^{-1}$ فى (أ) $(0, \infty)$ ، (ب) $(-\infty, 0)$ ، (جـ) $[5, 10]$ (ملحوظة : فى الأجزاء (أ) ، (ب) $x = 0$ تعامل كنقطة نهائية غير محددة) .

١٠ - ١٧ بين أن $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ هى محدبة بالتحديد فى $(-\infty, 2)$ ، ومقعرة بالتحديد فى $(2, \infty)$.

١٠ - ١٨ حدد الفترات التى تكون فيها $f(x) = x + 4x^{-1}$ محدبة أو مقعرة .

١٠ - ١٩ استخدم بحث الفترة ذات الثلاث نقط للتقريب الى داخل $\epsilon = 0.1$ موقع الحد الأدنى الشامل فى $(0, 2]$ ، فى الدالة بالمسألة ١٠ - ١٨ (ملحوظة : استمر كما لو كانت الفترة $[0, 2]$) .

١٠ - ٢٠ قرب موقع الحد الأعلى الشامل فى $[0, \pi]$ لـ $f(x) = x^2 \sin x$ باستخدام بحث الثلاث نقط للفترة غير المحددة بخمسة تقييمات للدوال (بمعنى بحث الخمس نقط) . ماهى جودة هذا التقريب ؟

١٠ - ٢١ أعد حل المسألة ١٠ - ١٩ باستخدام بحث فيبوناكس

١٠ - ٢٢ أعد حل المسألة ١٠ - ٢٠ باستخدام بحث فيبوناكس (ملحوظة : مجموع بحث الخمس نقط يتطلب أن النقطتين الأوليين توضع $F_5\epsilon'$ للداخل من النقط النهائية للفترة الأصلية . لذلك $N = 6$ لتحديد ϵ') .

١٠ - ٢٣ أعد حل المسألة ١٠ - ١٩ ببحث المتوسط الذهبى .

١٠ - ٢٤ أعد حل المسألة ١٠ - ٢٠ ببحث المتوسط الذهبي .

١٠ - ٢٥ بين أن الحد رقم n في تتابع فيبوناكس هو

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

(ملحوظة : تحقق من أن الاصطلاح الرياضى المعطى يحقق العلاقة الرجعية والشروط الأولية)

١٠ - ٢٦ من المسألة ١٠ - ٢٥ اشتق

$$\lim_{N\to\infty}\frac{F_{N-1}}{F_N} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = 0.6180\cdots$$



البرمجة غير الخطية : أمثلية متعدد المتغيرات بدون قيود

Nonlinear Programming: Multivariable Optimization without Constraints

سيحتوى هذا الفصل كثيراً على تعميم نتائج الفصل العاشر للحالات ذات أكثر من متغير ، ولكن المناظرة فقط لـ (١٠ - ١) .

أمثلية $z = f(\mathbf{X})$ حيث إن $\mathbf{X} \equiv [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ (١١ - ١)

سوف يعامل وليس المناظر لـ (١٠ - ٢) . بالإضافة إلى ذلك .. سنفرض دائماً الأمثلية فى (١١ - ١) لتكون تعظيماً ، وتنطبق جميع النتائج على براج التصغير إذا استبدلت $f(\mathbf{X})$ بـ $-f(\mathbf{X})$ انظر المسألة ١١ - ٢ ، ١١ - ٣ .

الحدود العظمى المحلية والشاملة LOCAL AND GLOBAL MAXIMA

تعريف : الجوار $(\epsilon > 0)$ حول $\hat{\mathbf{X}}$ ، هو مجموعة كل المتجهات $\mathbf{X}$ ، بحيث إن

$$(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}) \equiv (x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + \cdots + (x_n - \hat{x}_n)^2 \leq \epsilon^2$$

بالتعبير بالهندسة التحليلية ، يكون الجوار ϵ حول $\hat{\mathbf{X}}$ هو المداخل والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها ϵ ومركزها $\hat{\mathbf{X}}$.

والدالة الهدفية $f(\mathbf{X})$ لها حد أعلى محلى عند $\hat{\mathbf{X}}$ إذا وجد جوار ϵ حول $\hat{\mathbf{X}}$ ، بحيث إن $f(\mathbf{X}) \leq f(\hat{\mathbf{X}})$ لكل قيم $\mathbf{X}$ فى هذا الجوار ϵ الذى تحدد فيه الدالة . وإذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة ϵ (ليس المهم القيمة نفسها) ، فإن $f(\mathbf{X})$ يكون لها حد أعلى شامل عند $\hat{\mathbf{X}}$.

المتجه المتدرج ومصفوفه هسى GRADIENT VECTOR AND HESSIAN MATRIX

المتجه المتدرج ∇f المرتبط بالدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ الذى تعرف له المشتقه الجزئية الأولى

$$\nabla f \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

والتعبير $\nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}}$ يحقق قيمة التدرج عند $\hat{\mathbf{X}}$ لأى إزاحة صغيرة من $\hat{\mathbf{X}}$ فى الاتجاهات المختلفة ، واتجاه أعلى زيادة فى $f(\mathbf{X})$ هو اتجاه المتجه $\nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}}$. انظر المسألة (١١ - ٧) .

مثال ١١ - ١ لـ $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2 - x_2^2x_3^3$ مع $\hat{X} = [1, 2, 3]^T$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 6x_1x_2 \\ 3x_1^2 - 2x_2x_3^3 \\ -3x_2^2x_3^2 \end{bmatrix}$$

حيث إن

$$\nabla f|_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} 6(1)(2) \\ 3(1)^2 - 2(2)(3)^3 \\ -3(2)^2(3)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -105 \\ -108 \end{bmatrix}$$

لذلك ، عند $[1, 2, 3]^T$ ، تزيد الدالة بسرعة في الاتجاه $[12, -105, -108]^T$.

ومصفوفة هسي المرتبطة بالدالة $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ التي لها مشتقة جزئية ثانية تكون

$$\mathbf{H}_f \equiv \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

والتعبير $\mathbf{H}_f|_{\hat{X}}$ يحقق قيمة المصفوفة هسي عند $\hat{X}$. وكإعداد للجدول ١١ - ٤ ، ١١ - ٥ بأسفل ، سنحتاج الآتي :

تعريف : المصفوفة المتماثلة $\mathbf{A}$ $n \times n$ (بحيث إن $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) تكون سالبة مؤكدة (سالبة نصف مؤكدة) إذا كانت $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ سالبة (غير موجبة) لكل متجه ذى أبعاد n $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.

نظرية ١١ - ١ دع $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ لتكون مصفوفة متماثلة $n \times n$. وحدد المحددات

$$A_1 \equiv |a_{11}| \qquad A_2 \equiv -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad A_3 \equiv +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \cdots \qquad A_n \equiv (-1)^{n-1} \det \mathbf{A}$$

فتكون $\mathbf{A}$ سالبة مؤكدة إذا كانت فقط $A_1\ A_2 \ldots A_n$ كلها سالبة ، وتكون $\mathbf{A}$ سالبة نصف مؤكدة إذا كانت فقط ، $(r < n)$ $A_1\ A_2 \ldots, A_r$ كلها سالبة ، وعناصر A الباقية تكون صفراً .

مثال ١١ - ٢ لدالة المثال ١١ - ١

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} 6x_2 & 6x_1 & 0 \\ 6x_1 & -2x_3^3 & -6x_2x_3^2 \\ 0 & -6x_2x_3^2 & -6x_2^2x_3 \end{bmatrix}$$

حيث

$$\mathbf{H}_f|_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & -54 & -108 \\ 0 & -108 & -72 \end{bmatrix}$$

لـ $\mathbf{H}_f|_{\hat{X}}$, $A_1 = 12 > 0$ بحيث إن $\mathbf{H}_f$ لا تكون سالبة مؤكدة أو حتى سالبة نصف مؤكدة عند $\hat{X}$.

النتائج من التفاضل والتكامل RESULTS FROM CALCULUS

نظرية ١١ — ٢ إذا كانت $f(X)$ متصلة فى منطقة محددة مغلقة ، فإن $f(X)$ يكون لها حد أعلى شامل (وحد أدنى شامل أيضاً) فى هذه المنطقة .

نظرية ١١ — ٣ إذا كانت $f(X)$ لها حد أعلى محلى (أو حد أدنى محلى) عند X^* ، وإذا كانت ∇f توجد فى بعض الجوار ϵ حول X^* ، فإن $\nabla f|_{X^*} = 0$.

نظرية ١١ — ٤ إذا كانت $f(X)$ لها مشتقة جزئية ثانية فى الجوار ϵ حول X^* ، وإذا كانت $\nabla f|_{X^*} = 0$ ، $H_f|_{X^*}$ سالبة مؤكدة ، فإن $f(X)$ يكون لها حد أعلى محلى عند X^* .

يتبع من النظريات ١١ — ٢ ، ١١ — ٣ أن $f(X)$ متصلة ، ويفرض الحد الأعلى الشامل لها بين هذه النقط التى لا توجد عندها ∇f ، أو التى عندها $\nabla f = 0$ (النقط الساكنة) ، إلا إذا فرضت الدالة قيماً أكبر مثل $X^T X \to \infty$. فى الحالة الأخيرة ، لايوجد حد أعلى شامل . (انظر المسألة ١١ — ١)

والحلول التحليلية المبنية على التفاضل والتكامل من الصعب الحصول عليها للبرامج المتعددة المتغيرات ، عنها فى حالة البرامج المفردة المتغيرات ، لذلك ، مرة أخرى ، تستخدم الطرق العددية لتقريب الحدود العليا (المحلية) فى حدود تفاوت مُوصف .

طريقة أقصى ميل صعود THE METHOD OF STEEPEST ASCENT

اختر متجهاً أولياً X_0 ، واستفد من أى معلومة سابقة لمعرفة أين يجب أن يوجد الحد الأعلى الشامل المطلوب ، ثم حدد المتجهات $X_1\ X_2\ X_3 \ldots$ بالعلاقة التكرارية .

$$X_{k+1} = X_k + \lambda_k^* \nabla f|_{X_k} \qquad (١١ - ٢)$$

وهنا λ_k^* تكون كمية قياسية موجبة تعظم $f(X_k + \lambda \nabla f|_{X_k})$ ؛ ويحل هذا البرنامج ذو المتغير المفرد بطرق الفصل العاشر ، ويكون الأفضل إذا مثلت λ_k^* حداً أعلى شاملاً ؛ ومع ذلك ؛ فإن الحد الأعلى المحلى يقوم بذلك . وتنتهى عملية التكرار حينما يكون الفرق بين قيم الدالة الهدفية عند متجهين X متتاليين أصغر من تفاوت مُوصف ، ويصبح آخر متجه محسوب لـ X هو التقريب النهائى لـ X^* (انظر المسائل ١١ — ٤ ، ١١ — ٥) .

طريقة نيوتن — رافسون THE NEWTON-RAPHSON METHOD

اختر متجهاً ابتدائياً X_0 كما فى طريقة أقصى ميل صعود . تحدد المتجهات $X_1\ X_2\ X_3 \ldots$ بالتكرار بواسطة

$$X_{k+1} = X_k - (H_f|_{X_k})^{-1} \nabla f|_{X_k} \qquad (١١ - ٣)$$

وقاعدة الإيقاف هى نفسها كما فى طريقة أقصى ميل صعود . (انظر المسائل ١١ — ٨ ، ١١ — ٩) .

وتقرب طريقة نيوتن — رافسون إلى الحد الأعلى المحلى إذا كانت H_f سالبة مؤكدة فى بعض الجوار ϵ حول الحد الأعلى . وإذا كانت X_0 تقع فى هذا الجوار ϵ .

ملاحظة ١ : إذا كانت H_f سالبة مؤكدة ، H_f^{-1} توجد وسالبة مؤكدة ، إذا لم تختر X_0 صحيحة ، فإن الطريقة يمكن أن تقرب إلى حد أدنى محلى (انظر المسأله ١١ — ١٠) ، أو قد لا تقرب على الإطلاق (انظر المسألة ١٠ — ٩) . وفى أى حالة تنتهى العملية التكرارية وتبدأ من جديد بتقريب أولى أفضل .

طريقة فلتشر — بويل THE FLETCHER-POWELL METHOD

هذه الطريقة ، ذات ثمانية خطوات ، تبدأ باختيار متجه أولى $\hat{\mathbf{X}}$ ، وتحديد التفاوت ϵ ، وإنشاء $n \times n$ مصفوفه $\mathbf{G}$ مساوية للمصفوفة الأحادية . فإن كلًا من $\mathbf{G}$ $\hat{\mathbf{X}}$ تعدل باستمرار حتى يكون الاختلاف بين قيمتين للدالة الهدفية أقل من ϵ ، حيث تؤخذ القيمة الأخيرة من $\hat{\mathbf{X}}$ كـ $\mathbf{X}^*$

الخطوة ١ : قيم $\alpha = f(\hat{\mathbf{X}})$ ، $\mathbf{B} = \nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}}$

الخطوة ٢ : حدد λ^* بحيث إن $f(\hat{\mathbf{X}} + \lambda \mathbf{GB})$ تكون حداً أعلى ، حيث $\lambda = \lambda^*$ انشىء $\mathbf{D} = \lambda^* \mathbf{GB}$.

الخطوة ٣ : اجعل $\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{D}$ كقيمة معدلة من $\hat{\mathbf{X}}$

الخطوة ٤ : احسب $\beta = f(\hat{\mathbf{X}})$ للقيمة المعدلة من $\hat{\mathbf{X}}$. إذا كانت $\beta - \alpha < \epsilon$ ، فاذهب إلى الخطوة ٥ ؛ وإذا لم تكن كذلك ، فاذهب إلى الخطوة ٦ .

الخطوة ٥ : انشىء ، $\mathbf{X}^* = \hat{\mathbf{X}}$ ، $f(\mathbf{X}^*) = \beta$ ، ثم توقف .

الخطوة ٦ : قيم $\mathbf{C} = \nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}}$ للمتجه المعدل $\hat{\mathbf{X}}$ وانشىء $\mathbf{Y} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$.

الخطوة ٧ : احسب المصفوفات $n \times n$

$$\mathbf{L} = \left(\frac{1}{\mathbf{D}^T\mathbf{Y}}\right)\mathbf{D}\mathbf{D}^T \qquad \text{و} \qquad \mathbf{M} = \left(\frac{-1}{\mathbf{Y}^T\mathbf{G}\mathbf{Y}}\right)\mathbf{G}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{G}$$

الخطوة ٨ : اجعل $\mathbf{G} + \mathbf{L} + \mathbf{M}$ كقيمة معدلة فى $\mathbf{G}$ ، وانشىء α مساوية القيمة الحالية من $\mathbf{B}$ ، β مساويه القيمة الحالية من $\mathbf{C}$ ، وارجع إلى الخطوة ٢ .

بحث نمط هوك — جيف HOOKE-JEEVES' PATTERN SEARCH

هذه الطريقة هى طريقة بحث مباشرة ، تستخدم التحركات الاستكشافية ، والتى تحدد اتجاهاً مناسباً ، وكذلك تحركات نمط ، والتى تعجل البحث . تبدأ الطريقة باختيار متجه أولى $\mathbf{B} \equiv [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T$ ، وخطوة حجمها h .

الخطوة ١ : تتم التحركات الاستكشافية حول $\mathbf{B}$ بالتشويش على عناصر $\mathbf{B}$ ، وبالتالى بواسطة $\pm h$ وحدة ، إذا أدى هذا التشويش إلى تحسين (زيادة) قيمة الدالة الهدفية بعد القيمة الحالية ، فإن القيمة الإبتدائية $f(\mathbf{B})$ ، وهى القيمة المشوشة لهذا العنصر تبقى كاهى ؛ وإلا تحفظ القيمة الأصلية للعنصر ، وبعد اختبار كل عنصر فإن المتجه الناتج يسمى $\mathbf{C}$ ، إذا كان $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ ، فاذهب إلى الخطوة ٢ ؛ وإلا فاذهب إلى الخطوة ٣ .

الخطوة ٢ : $\mathbf{B}$ هو موقع الحد الأعلى إلى داخل التفاوت h إذا اختصرت h وأعيدت الخطوة ١ ، أو انتهى البحث عند $\mathbf{X}^* = \mathbf{B}$.

الخطوة ٣ : اصنع حركة نمط للمتجه الوقتى $\mathbf{T} = 2\mathbf{C} - \mathbf{B}$ (نصل إلى $\mathbf{T}$ بالتحرك من $\mathbf{B}$ إلى $\mathbf{C}$ والاستمرار حتى مسافة مساوية فى نفس الاتجاه) .

الخطوة ٤ : اصنع تحركات استكشافية حول $\mathbf{T}$ مماثلة للتحركات حول $\mathbf{B}$ الموضحة فى الخطوة ١ . سَمِّ المتجه الناتج $\mathbf{S}$. إذا كانت $\mathbf{S} = \mathbf{T}$ ، فاذهب إلى الخطوة ٥ ؛ وإلا فاذهب إلى الخطوة ٦ .

الخطوة ٥ : انشىء $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ، وارجع إلى الخطوة ١ .

الخطوة ٦ : انشىء $\mathbf{C} = \mathbf{S}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ، وارجع إلى الخطوة ٣ .

بحث النمط المعدل A MODIFIED PATTERN SEARCH

ينتهى بحث هوك — جيف عندما لايؤدى أى تشويش لعناصر **B** إلى تحسين فى الدالة الهدفية ، وفى بعض الحالات تحدث هذه النهاية قبل وقتها ، ذلك أن هذه التشويشات لإثنين أو أكثر من العناصر فى وقت واحد قد تؤدى إلى تحسين فى الدالة الهدفية . ويمكن أن تتضمن الطريقة تشويشات آنية بتعديل الخطوة ٢ كما يلى :

الخطوة ٢ : نفذ بحثاً موسعاً على سطح المكعب الزائد ذى المركز **B** باعتبار كل التشويشات الممكنة لعناصر **B** بواسطة kh وحدة ، حيث إن $k = -1\ 0\ 1$ لمتجه ذى عناصر n ، يوجد $3^n - 1$ تشويشاً للاعتبار . وبمجرد تحقيق التحسن ، إنهِ البحث الموسع ، وانشىء المتجه المحسن مساوياً **B** ، وارجع إلى الخطوة ١ . وإذا لم يتحقق أى تحسن ، فتكون **B** هى موقع الحد الأعلى فى داخل التفاوت h . إما تختصر h وتكرر الخطوة ١ ، أو ينتهى البحث عند $\mathbf{X}^* = \mathbf{B}$

اختيار التقريب الأولى CHOICE OF AN INITIAL APPROXIMATION

تبدأ كل طريقة عددية بتقريب أول إلى الحد الأعلى المطلوب ، ويكون هذا التقريب فى بعض الأحيان ظاهراً من النواحى الطبيعية أو الهندسية للمسألة (انظر المسألة ١١ — ١٢) . وفى حالات أخرى .. يستخدم أحد مولدى الأرقام العشوائية لإيجاد قيم مختلفة لـ **X** ، ثم تحسب $f(\mathbf{X})$ لكل قيمة مختارة عشوائياً لـ **X** ، وتؤخذ قيمة **X** التى تعطى أفضل قيمة للدالة الهدفية كتقريب أولى . وحتى طريقة العينات العشوائية هذه تتضمن تخميناً أولياً لموقع الحد الأعلى ، وعلى ذلك .. فإن الأعداد العشوائية يجب أن تراجع بحيث تقع فى فترة ثابتة . (انظر المسألة ١١ — ٤)

الدوال المحدبة CONCAVE FUNCTIONS

إن أى طريقة عددية لا يوجد ضمان بأنها ستكشف عن حد أعلى شامل ، فقد تقترب من الحد الأعلى المحلى ، أو ، أسوأ من ذلك ، قد لا تقترب بالمرة وتستثنى من ذلك البرامج التى لها دوال هدفية محدبة .

تكون الدالة $f(\mathbf{X})$ مقعرة فى منطقة مقعرة $\mathcal{R}$ (انظر الفصل الثالث) إذا كان للمتجهين $\mathbf{X}_2$ $\mathbf{X}_1$ فى $\mathcal{R}$ ، ولكل قيم $0 \le \alpha \le 1$

$$f(\alpha \mathbf{X}_1 + (1-\alpha)\mathbf{X}_2) \le \alpha f(\mathbf{X}_1) + (1-\alpha) f(\mathbf{X}_2) \qquad (١١ - ٤)$$

[قارن (١٠ — ٣)] وتكون الدالة محدبة فى $\mathcal{R}$ إذا كانت فقط قيمتها السلبية مقعرة فى $\mathcal{R}$ قد تكون المنطقة المقعرة $\mathcal{R}$ محدودة أو غير محدودة .

نظرية ١١ — ٥ : إذا كان للدالة $f(\mathbf{X})$ مشتقة جزئية ثانية فى $\mathcal{R}$ ، فإن $f(\mathbf{X})$ تكون محدبة فى $\mathcal{R}$ إذا كانت فقط مصفوفة هسى $\mathbf{H}_f$ سالبة نصف مؤكدة لكل **X** فى $\mathcal{R}$.

نظرية ١١ — ٦ : إذا كانت $f(\mathbf{X})$ محدبة فى $\mathcal{R}$ ، فإن أى حد محلى أعلى فى $\mathcal{R}$ هو حد أعلى شامل فى $\mathcal{R}$.

هاتان النظريتان تتضمنان أنه إذا كانت $\mathbf{H}_f$ سالبة نصف مؤكدة فى أى مكان ، فإن أى حد أعلى محلى يؤدى إلى حل للبرنامج (١١ — ١) . وإذا كانت $\mathbf{H}_f$ سالبه مؤكدة فى أى مكان ، فإن $f(\mathbf{X})$ تكون محدبة بدقة (فى كل مكان) ، ويكون حل البرنامج (١١ — ١) وحيداً (عديم النظير)

مسائل محلولة

Solved Problems

١١ - ١ تعظيم : $z = x_1(x_2-1) + x_3(x_3^2-3)$

هنا $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2-1) + x_3(x_3^2-3)$ والمتجه المتدرج $\nabla f = [x_2-1 \quad x_1 \quad 3x_3^2-3]^T$ يتواجد فى كل مكان ، ويكون صفرياً فقط عند

$$\mathbf{X}_1 = [0, 1, 1]^T \qquad \text{و} \qquad \mathbf{X}_2 = [0, 1, -1]^T$$

ولكن $f(\mathbf{X}_2) = 2$ ، $f(\mathbf{X}_1) = -2$. وتصبح $f(x_1, x_2, x_3)$ كبيرة اختيارياً عندما تزيد x_3 ، ومن ثم لايوجد حد أعلى شامل . ويكون المتجه $\mathbf{X}_2$ هو فقط موقع الحد الأعلى المحلى .

١١ - ٢ تصغير : $z = (x_1 - \sqrt{5})^2 + (x_2 - \pi)^2 + 10$

بضرب الدالة الهدفية فى 1 — نحصل على برنامج التعظيم المكافىء

$$\text{تعظيم} \quad z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$$

وفيه $\nabla z = -2[x_1 - \sqrt{5} \quad x_2 - \pi]^T$. لذلك توجد نقطة ساكنة مفردة $x_1 = \sqrt{5}$ $x_2 = \pi$ عند $z = -10$. والآن عندما $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$ تصبح z صغيرة اختيارياً ، وبالتبعية $z^* = -10$ تكون هى الحد الأعلى الشامل ، $z^* = +10$ الحد الأدنى الشامل لبرنامج التصغير الأصلى . ويفترض الحد الأدنى بالطبع عند $x_1^* = \sqrt{5} \approx 2.2361$ ،

$$x_2^* = \pi \approx 3.1416$$

١١ - ٣ تصغير : $z = \sin x_1 x_2 - \cos (x_1 - x_2)$

بضرب الدالة الهدفية فى 1 — نحصل على برنامج التعظيم المكافىء

$$\text{تصغير} \quad z = -\sin x_1 x_2 + \cos (x_1 - x_2)$$

هنا $f(x_1, x_2) = -\sin x_1 x_2 + \cos (x_1 - x_2)$ و

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -x_2 \cos x_1 x_2 - \sin (x_1 - x_2) \\ -x_1 \cos x_1 x_2 + \sin (x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

التى تتواجد فى كل مكان . وتحقق النقط الساكنة

$$\begin{aligned} -x_2 \cos x_1 x_2 - \sin (x_1 - x_2) &= 0 \\ -x_1 \cos x_1 x_2 + \sin (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

وبالرغم من أن الحل الكامل للنموذج (١) لا يمكن الحصول عليه جبرياً ، فإنه من الممكن إيجاد حل جزئى يكفى البرنامج الحالى . لاحظ قبل أى شيء أنه ، لكل من x_1 ، x_2 .

$$|f(x_1, x_2)| \leq |\sin x_1x_2| + |\cos (x_1 - x_2)| \leq 1 + 1 = 2$$

ومن ثم ، إذا أمكن إيجاد نقطة ساكنة عند $f(x_1\ x_2) = 2$ ، فتكون هذه النقطة بالضرورة حداً أعلى شاملاً . والآن .. من الواضح أن (١) تتحقق إذا تلاشت $\sin (x_1 - x_2)$ ، $\cos x_1x_2$ كل على حدة ، بمعنى أنه إذا كانت

$$x_1 - x_2 = n\pi \qquad \text{و} \qquad x_1x_2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$$

حيث إن n ، k أعداد صحيحة ، وبأخذ $n = 0$ ، $k = 1$ نجد أن :

$$f\left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} + \cos 0 = 2$$

وينتهى بذلك البحث . ويكون حل برنامج التصغير الأصلى $z^* = -2$ عند $x_1^* = x_2^* = \sqrt{3\pi/2}$ (وفى أى مكان آخر) .

٤ - ١١ استخدم طريقة أقصى ميل صعود فى

$$\text{تصغير :} \quad z = (x_1 - \sqrt{5})^2 + (x_2 - \pi)^2 + 10$$

وبمراجعة برنامج التعظيم :

$$z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10 \qquad (١)$$

نحتاج إلى حل تقريبى أولى نحصل عليه بالعينات العشوائية للدالة الهدفية فى المنطقة $-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$. ونقط العينة وقيم z المناظرة لها تبين فى الجدول الأسفل . وأكبر مدخل لـ z هو -36.58 يحدث عند $X_0 = [6.597\ \ 5.891]^T$ ، والتى نأخذها كتقريب أولى لـ X^* . وتدرج الدالة الهدفية للبرنامج (١) يكون

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2(x_1 - \sqrt{5}) \\ -2(x_2 - \pi) \end{bmatrix}$$

x_1	−8.537	−0.9198	9.201	9.250	6.597	8.411	8.202	−9.173	−9.337	−5.794
x_2	−1.099	−8.005	−2.524	7.546	5.891	−9.945	−5.709	−6.914	8.163	−0.0210
z	−144.0	−144.2	−90.61	−78.59	−36.58	−219.4	−123.9	−241.3	−169.2	−84.48

المحاولة الأولى

$$X_0+\lambda\,\nabla f|_{X_0}=\begin{bmatrix}6.597\\5.891\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-2(6.597-\sqrt{5})\\-2(5.891-\pi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.597-8.722\lambda\\5.891-5.499\lambda\end{bmatrix}$$
$$f(X_0+\lambda\nabla f|_{X_0})=-(6.597-8.722\lambda-\sqrt{5})^2-(5.891-5.499\lambda-\pi)^2-10$$
$$=-106.3\lambda^2+106.3\lambda-36.58$$

باستخدام الطرق التحليلية التى وصفت فى الفصل العاشر ، نحدد أن هذه الدالة فى λ تفترض حداً أعلى (شاملاً) عند $\lambda_0^*=0.5$ ، لذلك

$$X_1=X_0+\lambda_0^*\,\nabla f|_{X_0}=\begin{bmatrix}6.597-8.722(0.5)\\5.891-5.499(0.5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.236\\3.142\end{bmatrix}$$

عند $f(X_1)=-10.00$ ، وبما أن الفرق بين $f(X_0)=-36.58$ ، و $f(X_1)=-10.00$ هام ، فإننا نستمر فى المحاولات .

المحاولة الثانية

$$X_1+\lambda\,\nabla f|_{X_1}=\begin{bmatrix}2.236\\3.142\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-2(2.236-\sqrt{5})\\-2(3.142-\pi)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.236+0.0001\lambda\\3.142-0.0008\lambda\end{bmatrix}$$
$$f(X_1+\lambda\,\nabla f|_{X_1})=-(2.236+0.0001\lambda-\sqrt{5})^2-(3.142-0.0008\lambda-\pi)^2-10$$
$$=-(6.500\lambda^2-6.382\lambda+10^6)10^{-7}$$

باستخدام الطرق التحليلية التى وصفت فى الفصل العاشر ، نجد أن هذه الدالة فى λ لها حد أعلى (شامل) عند $\lambda_1^*=0.4909$. لذلك ،

$$X_2=X_1+\lambda_1^*\,\nabla f|_{X_1}=\begin{bmatrix}2.236+0.0001(0.4909)\\3.142-0.0008(0.4909)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.236\\3.142\end{bmatrix}$$

وحيث إن $X_1=X_2$ (إلى أربعة أرقام هامة) ، فإننا نقبل $X^*=[2.236,3.142]^T$ عند $z^*=-10.00$ كحل للبرنامج (١) . ويكون حل برنامج التصغير الأصلى هو $X^*=[2.236,3.142]^T$ عند $z^*=+10.00$. قارن هذا بنتائج المسألة ١١ — ٢ .

١١ — ٥ استخدم طريقة أقصى ميل صعود فى

تعظيم $z=-\sin x_1x_2+\cos(x_1-x_2)$

بتفاوت فى حدود 0.05 .

هنا

$$\nabla f=\begin{bmatrix}-x_2\cos x_1x_2-\sin(x_1-x_2)\\-x_1\cos x_1x_2+\sin(x_1-x_2)\end{bmatrix}$$

ببحث الأرقام العشوائية فى المنطقة $-1 \le x_1 \ x_2 \le 1$ نحصل على $X_0 = [-0.7548 \ 0.5303]^T$ عند $f(X_0) = 0.6715$

المحاولة الأولى

$$\nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -0.5303 \cos[(-0.7548)(0.5303)] - \sin(-0.7548 - 0.5303) \\ 0.7548 \cos[(-0.7548)(0.5303)] + \sin(-0.7548 - 0.5303) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix}$$

$$X_0 + \lambda \nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -0.7548 \\ 0.5303 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7548 + 0.4711\lambda \\ 0.5303 - 0.2643\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(X_0 + \lambda \nabla f|_{X_0}) &= -\sin[(-0.7548 + 0.4711\lambda)(0.5303 - 0.2643\lambda)] \\ &\quad + \cos[(-0.7548 + 0.4711\lambda) - (0.5303 - 0.2643\lambda)] \\ &= -\sin(-0.4003 + 0.4493\lambda - 0.1245\lambda^2) + \cos(-1.285 + 0.7354\lambda) \end{aligned}$$

باستخدام بحث المتوسط الذهبى على $[0, 8]$ نجد أن هذه الدالة λ لها حد أعلى عند $\lambda_0^* \approx 1.7$. لذلك

$$X_1 = X_0 + \lambda_0^* \nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -0.7548 + 0.4711(1.7) \\ 0.5303 - 0.2643(1.7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04607 \\ 0.08099 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_1) = 0.9957$ ، حيث إن

$$f(X_1) - f(X_0) = 0.9957 - 0.6715 = 0.3242 > 0.05$$

ونستمر فى المحاولة

المحاولة الثانية

$$\begin{aligned} \nabla f|_{X_1} &= \begin{bmatrix} -0.08099 \cos[(0.04607)(0.08099)] - \sin(0.04607 - 0.08099) \\ -0.04607 \cos[(0.04607)(0.08099)] + \sin(0.04607 - 0.08099) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.04608 \\ -0.08098 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X_1 + \lambda \nabla f|_{X_1} = \begin{bmatrix} 0.04607 - 0.04608\lambda \\ 0.08099 - 0.08098\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(X_1 + \lambda \nabla f|_{X_1}) &= -\sin[(0.04607 - 0.04608\lambda)(0.08099 - 0.08098\lambda)] \\ &\quad + \cos[(0.04607 - 0.04608\lambda) - (0.08099 - 0.08098\lambda)] \\ &= -\sin(0.003731 - 0.007463\lambda + 0.003732\lambda^2) + \cos(-0.03492 + 0.03490\lambda) \end{aligned}$$

باستخدام بحث المتوسط الذهبى على $[0, 8]$ نجد أن هذه الدالة λ لها حد أعلى عند $\lambda_1^* \approx 1$ ، لذلك

$$X_2 = X_1 + \lambda_1^* \nabla f|_{X_1} = \begin{bmatrix} 0.04607 - 0.04608(1) \\ 0.08099 - 0.08098(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_2) = 1.000$. وحيث إن

$$f(X_2) - f(X_1) = 1.000 - 0.9957 = 0.0043 < 0.05$$

نأخذ $X^* = X_2$ ، $z^* = 1.000$

١١ - ٦ هل الحد الأعلى الموجود بالمسألة ١١ - ٥ حد أعلى شامل ؟

للدالة الهدفية $f(x_1, x_2) = -\sin x_1x_2 + \cos(x_1 - x_2)$ المصفوفة هسى ليست سالبة نصف مؤكدة فى أى مكان ، وفى الحقيقة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = x_2^2 \sin x_1x_2 - \cos(x_1 - x_2)$$

ويكون الطرف الأيمن موجباً عند $x_1 = x_2 = \sqrt{\pi/2}$. لذلك $f(x_1, x_2)$ لا تكون محدبة فى أى مكان ، ويبقى السؤال مطروحاً . وبالرجوع إلى المسألة ١١ - ٣ نجد أن الحد الأعلى الشامل الفعلى هو $z^* = 2$ ، لذلك $z^* = 1.000$ يجب أن يكون حداً أعلى فقط .

١١ - ٧ استنتج طريقة أقصى ميل صعود .

لأى متجه ثابت $\hat{\mathbf{X}}$ وأى متجه أحادى $\mathbf{U}$ ، تعطى المشتقة التوجيهية

$$D_{\mathbf{U}}f(\hat{\mathbf{X}}) \equiv \nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}} \cdot \mathbf{U}$$

معدل التغير فى $f(\mathbf{X})$ عند $\hat{\mathbf{X}}$ فى الاتجاه $\mathbf{U}$. حيث إن

$$\nabla f \cdot \mathbf{U} = |\nabla f|\,|\mathbf{U}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta$$

تحدث أكبر زيادة فى $f(\mathbf{X})$ عندما $\theta = 0$ ، بمعنى عندما تكون $\mathbf{U}$ فى نفس اتجاه ∇f . لذلك ، أى حركة (صغيرة) من $\hat{\mathbf{X}}$ فى الاتجاه $\nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}}$ ستزيد من الدالة ، مبدئياً فى $f(\hat{\mathbf{X}})$ بأسرع ما يمكن . ويمثل المتجه $\lambda\,\nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}}$ إزاحة من هذا النوع . وتكون أحسن قيمة λ هى القيمة التى تجعل $f(\hat{\mathbf{X}} + \lambda\,\nabla f|_{\hat{\mathbf{X}}})$ أكبر ما يمكن ، وهى قيمة الدالة بعد الإزاحة .

١١ - ٨ استخدم طريقة نيوتن ـــ رافسون فى

تعظيم $z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$

إلى داخل التفاوت 0.05 .

من المسألة ١١ ـــ ٤ نأخذ التقريب الأول $\mathbf{X}_0 = [6.597, 5.891]^T$ عند $f(\mathbf{X}_0) = -36.58$ والمتجه المتدرج ، مصفوفة هسي ، ومقلوب مصفوفة هسى لهذه الدالة الهدفية على التوالى هى

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -2(x_1 - \sqrt{5}) \\ -2(x_2 - \pi) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_f^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

لكل قيم x_1 ، x_2 .

المحاولة الأولى

$$\nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -2(6.597 - \sqrt{5}) \\ -2(5.891 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.722 \\ -5.499 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 - (H_f|_{X_0})^{-1} \nabla f|_{X_0}$$

$$= \begin{bmatrix} 6.597 \\ 5.891 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.722 \\ -5.499 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_1) = -10.00$ ، حيث إن

$$f(X_1) - f(X_0) = -10.00 - (-36.58) = 26.58 > 0.05$$

نستمر فى المحاولة

المحاولة الثانية

$$\nabla f|_{X_1} = \begin{bmatrix} -2(2.236 - \sqrt{5}) \\ -2(3.142 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0008 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = X_1 - (H_f|_{X_1})^{-1} \nabla f|_{X_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0008 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 \\ 3.142 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_2) = -10.00$ وحيث إن $f(X_2) - f(X_1) = 0 < 0.05$ نأخذ $X^* = X_2 = [2.236, 3.142]^T$ عند $z^* = f(X_2) = -10.00$.

١١ – ٩ استخدم طريقة نيوتن — رافسون فى

تعظيم $z = -\sin x_1x_2 + \cos(x_1 - x_2)$

بتفاوت 0.05

المتجه المتدرج ومصفوفة هسى لهذه الدالة الهدفية هما

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -x_2 \cos x_1x_2 - \sin(x_1 - x_2) \\ -x_1 \cos x_1x_2 + \sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix} \quad (١)$$

$$H_f = \begin{bmatrix} x_2^2 \sin x_1x_2 - \cos(x_1 - x_2) & -\cos x_1x_2 + x_1x_2 \sin x_1x_2 + \cos(x_1 - x_2) \\ -\cos x_1x_2 + x_1x_2 \sin x_1x_2 + \cos(x_1 - x_2) & x_1^2 \sin x_1x_2 - \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix} \quad (٢)$$

من المسألة ١١ – ٥ نحدد التقريب الأولى $X_0 = [-0.7548, 0.5303]^T$.

المحاولة الأولى : بالتعويض بعناصر في (١)، (٢) نحصل على

$$\nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix} \qquad H_f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -0.3914 & -0.4832 \\ -0.4832 & -0.5038 \end{bmatrix} \qquad (H_f|_{X_0})^{-1} = \begin{bmatrix} 13.88 & -13.31 \\ -13.31 & 10.78 \end{bmatrix}$$

فإن

$$X_1 = X_0 - (H_f|_{X_0})^{-1}\nabla f|_{X_0}$$
$$= \begin{bmatrix} -0.7548 \\ 0.5303 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13.88 & -13.31 \\ -13.31 & 10.78 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4711 \\ -0.2643 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10.81 \\ 9.650 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن X_1 غير قريبة من X_0 ، والتي تفترض أن الأسلوب العددى لايتقارب . فى هذه الحالة .. تبين نظرية ١١ – ١ أن $H_f|_{X_0}$ ليست سالبة مؤكدة ، ومن ثم X_0 لم تختر قريبة بقدر كاف من الحد الأعلى الذى يضمن التقارب لطريقة نيوتن – رافسون . لذلك ؛ بدلا من الاستمرار فى المحاولات ، يكون من الحكمة بدء الطريقة من جديد بتقريب أفضل من الحد الأعلى .

ويمكن الحصول على تقريب أولى أفضل بطريقتين . الطريقة الأولى : وفيها يمكن استخدام مولدات الأعداد العشوائية لإعطاء قيم إضافية لـ X حتى إيجاد تقريب أفضل . وفى الطريقة الثانية : يمكن استخدام طريقة أقصى ميل صعود لمحاولة واحدة بقيمة X_0 الحالية ، ثم استخدام المتجة الناتج لبدء طريقة نيوتن – رافسون . وبتنفيذ المدخل الثانى نحصل من المسألة ١١ – ٥ على المتجه الابتدائى الأفضل .

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.04607 \\ 0.08099 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_0) = 0.9957$

المحاولة الأولى (الجديدة) : بالتعويض $x_1 = 0.04607$ ، $x_2 = 0.08099$ فى (١) ، (٢) نحصل على

$$\nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -0.04608 \\ -0.08098 \end{bmatrix} \qquad H_f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -0.9994 & -0.0005888 \\ -0.0005888 & -0.9994 \end{bmatrix} \qquad (H_f|_{X_0})^{-1} = \begin{bmatrix} -1.001 & 0.0005895 \\ 0.0005895 & -1.001 \end{bmatrix}$$

لذلك

$$X_1 = X_0 - (H_f|_{X_0})^{-1}\nabla f|_{X_0}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.04607 \\ 0.08099 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.001 & 0.0005895 \\ 0.0005895 & -1.001 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.04608 \\ -0.08098 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

عند $f(X_1) = 1$ حيث إن

$$f(X_1) - f(X_0) = 1.0000 - 0.9957 = 0.0043 < 0.05$$

نأخذ $X^* = X_1 = [0, 0]^T$ ، $z^* = f(X_1) = 1$.

١١ – ١٠ استخدم طريقة نيوتن ــ رافسون فى

$$z = -\sin x_1x_2 + \cos(x_1 - x_2)$$ تعظيم

بتفاوت 0.05 ، ابدأ بقيمة $X_0 = [4.8, 1.6]^T$.

المتجة المتدرج ، ومصفوفة هسى لهذه الدالة الهدفية هما (١) ، (٢) فى المسألة ١١ – ٩ .

المحاولة الأولى

$$\nabla f|_{X_0} = \begin{bmatrix} -1.6\cos[(4.8)(1.6)] - \sin(4.8 - 1.6) \\ -4.8\cos[(4.8)(1.6)] + \sin(4.8 - 1.6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2186 \\ -0.8893 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_f|_{X_0} = \begin{bmatrix} 3.520 & 6.393 \\ 6.393 & 23.69 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{H}_f|_{X_0})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5572 & -0.1504 \\ -0.1504 & 0.08279 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{aligned} X_1 &= X_0 - (\mathbf{H}_f|_{X_0})^{-1}\nabla f|_{X_0} \\ &= \begin{bmatrix} 4.8 \\ 1.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5572 & -0.1504 \\ -0.1504 & 0.08279 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.2186 \\ -0.8893 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.788 \\ 1.641 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

عند $f(X_1) = -2.000$ ، والآن $f(X_0) = -1.983$ ، بالرغم من أن X_1 قريبة من X_0 ، فإن

$$f(X_1) < f(X_0)$$

وتميل المحاولات نحو الحد الأدنى بدلًا من الأعلى . (لاحظ أن $\mathbf{H}_f|_{X_0}$ ليست سالبة مؤكدة ؛ ولكنها فى الحقيقة موجبة مؤكدة) . وتستخدم قيمة أخرى لـ X_0 ، مشابهة للقيمة المحددة فى المسألة ١١ ــ ٥ ، وذلك إذا أريد نجاح طريقة نيوتن ــ رافسون .

١١ – ١١ حل المسألة ١ ــ ١٤ حتى أقرب 0.25 كم بطريقة فلتشر ــ بويل .

المسألة ١ ــ ١٤ مكافئة لبرنامج التعظيم بالدالة الهدفية

$$f(X) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2} - \sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2} \qquad (١)$$

والمتجة المتدرج

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \dfrac{x_1 - 300}{\sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2}} - \dfrac{x_1 - 700}{\sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}} \\ -\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \dfrac{x_2 - 400}{\sqrt{(x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2}} - \dfrac{x_2 - 300}{\sqrt{(x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2}} \end{bmatrix} \qquad (٢)$$

لبدء طريقة فلتشر — بويل ننشىء $\epsilon = 0.25$ ، و

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ونختار $\hat{X} = [400, 200]^T$ الذى يظهر من الشكل ١ – ٤ أنه تقريب جيد للموقع الأمثل لمحطة التكرير .

الخطوة ١

$$\alpha = f(\hat{X}) = f(400, 200)$$
$$= -\sqrt{(400)^2 + (200)^2} - \sqrt{(100)^2 + (-200)^2} - \sqrt{(-300)^2 + (-100)^2} = -987.05$$

$$B = \nabla f|_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix}$$

الخطوة ٢

$$f(\hat{X} + \lambda GB) = f\left(\begin{bmatrix} 400 \\ 200 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 400 - 0.39296\lambda \\ 200 + 0.76344\lambda \end{bmatrix}\right)$$
$$= -\sqrt{(400 - 0.39296\lambda)^2 + (200 + 0.76344\lambda)^2}$$
$$- \sqrt{(100 - 0.39296\lambda)^2 + (-200 + 0.76344\lambda)^2}$$
$$- \sqrt{(-300 - 0.39296\lambda)^2 + (-100 + 0.76344\lambda)^2}$$

وبعمل بحث فترة الثلاث نقط فى $[0, 425]$ نحدد $\lambda^* = 212.5$ ، لذلك

الخطوة ٣

$$D = \lambda^* GB = (212.5)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -83.504 \\ 162.23 \end{bmatrix}$$

$$\hat{X} + D = \begin{bmatrix} 400 \\ 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -83.504 \\ 162.23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 316.50 \\ 362.23 \end{bmatrix}$$

التى يمكن أن نأخذها كقيمة معدلة

الخطوة ٤

$$\beta = f(\hat{X}) = f(316.50, 362.23) = -910.76$$
$$\beta - \alpha = -910.76 - (-987.05) = 76.29 > 0.25$$

الخطوة ٦

$$C = \nabla f|_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -0.071207 \\ 0.0031594 \end{bmatrix} \qquad Y = B - C = \begin{bmatrix} -0.39296 \\ 0.76344 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.071207 \\ 0.0031594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.32175 \\ 0.76028 \end{bmatrix}$$

الخطوة ٧

$$\mathbf{D}^T\mathbf{Y} = [-83.504, 162.23]\begin{bmatrix}-0.32175\\ 0.76028\end{bmatrix} = 150.21$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{150.21}\mathbf{D}\mathbf{D}^T = \frac{1}{150.21}\begin{bmatrix}-83.504\\ 162.23\end{bmatrix}[-83.504, 162.23]$$

$$= \frac{1}{150.21}\begin{bmatrix}6972.9 & -13\,547\\ -13\,547 & 26\,319\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}46.421 & -90.187\\ -90.187 & 175.21\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{G}\mathbf{Y} = [-0.32175, 0.76028]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.32175\\ 0.76028\end{bmatrix} = 0.68155$$

$$\mathbf{M} = \frac{-1}{0.68155}\mathbf{G}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\mathbf{G}$$

$$= \frac{-1}{0.68155}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.32175\\ 0.76028\end{bmatrix}[-0.32175, 0.76028]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{0.68155}\begin{bmatrix}0.10352 & -0.24462\\ -0.24462 & 0.57803\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.15189 & 0.35892\\ 0.35892 & -0.84811\end{bmatrix}$$

الخطوة ٨

$$\mathbf{G}+\mathbf{L}+\mathbf{M} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}46.421 & -90.187\\ -90.187 & 175.21\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-0.15189 & 0.35892\\ 0.35892 & -0.84811\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}47.269 & -89.828\\ -89.828 & 175.36\end{bmatrix}$$

. التى نأخذها كقيمة $\mathbf{G}$ المعدلة . ونعدل أيضاً $\alpha = -910.76$ ، و

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}-0.071207\\ 0.0031594\end{bmatrix}$$

الخطوة ٢

$$f(\hat{\mathbf{X}} + \lambda\mathbf{G}\mathbf{B}) = f\left(\begin{bmatrix}316.50\\ 362.23\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}47.269 & -89.828\\ -89.828 & 175.36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.071207\\ 0.0031594\end{bmatrix}\right)$$

$$= f\left(\begin{bmatrix}316.50 - 3.6497\lambda\\ 362.23 + 6.9504\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$= -\sqrt{(316.50-3.6497\lambda)^2 + (362.23+6.9504\lambda)^2}$$
$$-\sqrt{(16.50-3.6497\lambda)^2 + (-37.77+6.9504\lambda)^2}$$
$$-\sqrt{(-383.50-3.6497\lambda)^2 + (62.23+6.9504\lambda)^2}$$

وبعمل بحث فترة الثلاث نقط فى $[0, 10]$ نحدد $\lambda^* \approx 1.25$. لذلك

$$\mathbf{D} = \lambda^*\mathbf{G}\mathbf{B} = (1.25)\begin{bmatrix}47.269 & -89.828\\ -89.828 & 175.36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.071207\\ 0.0031594\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4.5621\\ 8.6880\end{bmatrix}$$

الخطوة ٣ :

$$\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{D} = \begin{bmatrix}316.50\\ 362.23\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4.5621\\ 8.6880\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}311.94\\ 370.92\end{bmatrix}$$

التى نأخذها كقيمة $\hat{\mathbf{X}}$ المعدلة

الخطوة ٤

$$\beta = f(\hat{\mathbf{X}}) = f(311.94, 370.92) = -910.58$$
$$\beta - \alpha = -910.58 - (-910.76) = 0.18 < 0.25$$

الخطوة ٥

$$\mathbf{X}^* = \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 311.94 \\ 370.92 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad f(\mathbf{X}^*) = \beta = -910.58$$

وتحل المسألة ١ — ١٤ بـ $x_2^* = 370.92$ km ، $x_1^* = 311.94$ km عند $z^* = +910.58$ km

١١ - ١٢ بين أن الحد الاعلى الموقع بطريقة فلتشر — بويل في المسألة ١١ - ١١ هو في الحقيقة الحد الأعلى الشامل المطلوب .

بالنظر إلى المسألة ١١ - ٦ يكتفى بيان أن $f(\mathbf{X})$ المعطاه بواسطة (١) في المسألة ١١ - ١١ تكون محدبة في كل مكان .
وفي الحقيقة .. نحتاج فقط لبيان أن الدالة

$$g(\mathbf{X}) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

محدبة في كل مكان ، حيث إن $f(\mathbf{X})$ هي مجموع الدوال الثلاث من هذا النوع ، ومجموع الدوال المحدبة هي دالة محدبة .
والآن ..

$$\mathbf{H}_g = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} -x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}$$

التي تكون من النظرية ١١ — ١ ، سالبة نصف مؤكدة في كل مكان . لذلك ، وطبقا لنظرية ١١ — ٥ ، $g(\mathbf{X})$ تكون محدبة في كل مكان .

١١ - ١٣ استنتج طريقة نيوتن — رافسون

افرض أن التقريب $\mathbf{X}_k$ في النقطة الساكنة قد تم تحديده ، ونرغب في إيجاد نقطة قريبة $\mathbf{X}_{k+1}$ التي تكون تقريباً أفضل
بامتداد المتجه ∇f في سلسلة تايلور حول $\mathbf{X}_k$ ، نحصل على

$$\nabla f|_{\mathbf{X}_{k+1}} = \nabla f|_{\mathbf{X}_k} + \mathbf{H}_f|_{\mathbf{X}_k}(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) + \cdots$$

يجب أن يتحقق القارىء من أن الصف رقم (I) في (١) هو سلسلة تايلور العادية متعددة المتغيرات في $\partial f/\partial x_i$.]

$$\mathbf{H}_f|_{\mathbf{X}_k}(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k) = -\nabla f|_{\mathbf{X}_k} \quad \text{أو} \quad \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = -(\mathbf{H}_f|_{\mathbf{X}_k})^{-1}\nabla f|_{\mathbf{X}_k}$$

١٩ - ١٤ استخدم بحث نمط هوك ـــ جيف ف

تعظيم $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 0.02(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 325)^2 - 0.02(x_1 x_2)^2$

نبدأ اختيارياً بـ $\mathbf{B} = [0, 0, 0]^T$ ، $h = 1$. فإن $f(\mathbf{B}) = -2112.5$

الخطوة ١

$f(0+1, 0, 0) = -2096.52$ (تحسين)
$f(1, 0+1, 0) = -2081.60$ (تحسين)
$f(1, 1, 0+1) = -2067.70$ (تحسين)

ضع $\mathbf{C} = [1, 1, 1]^T$ عند $f(\mathbf{C}) = -2067.70$

الخطوة ٣

$$\mathbf{T} = 2[1, 1, 1]^T - [0, 0, 0]^T = [2, 2, 2]^T$$

الخطوة ٤

$f(2+1, 2, 2) = -884.60$ (تحسين أكثر من -2067.70)
$f(3, 2+1, 2) = -416.80$ (تحسين)
$f(3, 3, 2+1) = -118.10$ (تحسين)

ضع $\mathbf{S} = [3, 3, 3]^T$

الخطوة ٦ ضع $\mathbf{C} = [3, 3, 3]^T$ ، $\mathbf{B} = [1, 1, 1]^T$ عند $f(\mathbf{C}) = -118.10$.

الخطوة ٣

$$\mathbf{T} = 2[3, 3, 3]^T - [1, 1, 1]^T = [5, 5, 5]^T$$

الخطوة ٤

$f(5+1, 5, 5) = -98\,641.8$ (ليس تحسيناً فوق -118.10)
$f(5-1, 5, 5) = -27\,876.2$ (ليس تحسيناً)
$f(5, 5+1, 5) = -98\,642.8$ (,, ,,)
$f(5, 5-1, 5) = -27\,875.2$ (,, ,,)
$f(5, 5, 5+1) = -98\,638.3$ (,, ,,)
$f(5, 5, 5-1) = -27\,867.7$ (,, ,,)

ضع $\mathbf{S} = [5, 5, 5]^T$

الخطوة ٥ ضع $\mathbf{B} = [3, 3, 3]^T$ عند $f(\mathbf{B}) = -118.10$.

الخطوة ١

$f(3+1, 3, 3) = -154.86$ (ليس تحسيناً)
$f(3-1, 3, 3) = -417.90$ (،، ،،)
$f(3, 3+1, 3) = -155.86$ (،، ،،)
$f(3, 3-1, 3) = -416.90$ (،، ،،)
$f(3, 3, 3+1) = -155.60$ (،، ،،)
$f(3, 3, 3-1) = -416.80$ (،، ،،)

ضع $\mathbf{C} = [3, 3, 3]^T$

الخطوة ٢ نقيم الهدف تتابعياً عند كل النقط التي نحصل عليها من $\mathbf{B}$ ، وذلك بعمل تشويش على واحد أو أكثر من العناصر في $\mathbf{B}$ بأى من ١ أو ١ - ، وهناك ٢٦ تشويشاً ممكناً باستثناء التشويش الصفرى . و ؟ !! تقييمات الدوال عندما تصل أحدها إلى أكبر من القيمة $f(\mathbf{B}) = -118.10$. كما هو موضح في الجدول ١١ - ١ يحدث هذا عند $[2, 2, 4]^T$، لذلك نعدل $\mathbf{B} = [2, 2, 4]^T$ عند $f(\mathbf{B}) = -13.70$

جدول ١١ - ١

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
2	2	2	−1522.90
2	2	3	−886.20
2	2	4	−13.70
2	3	2	
...	...	...	
4	4	3	
4	4	4	

ضع $\mathbf{C} = [3, 1, 4]^T$ عند $f(\mathbf{C}) = 11.44$

الخطوة ١

$f(2+1, 2, 4) = 0.60$ (تحسين)
$f(3, 2+1, 4) = -155.6$ (ليس تحسيناً)
$f(3, 2-1, 4) = 11.44$ (تحسين)
$f(3, 1, 4+1) = -2902.66$ (ليس تحسيناً)
$f(3, 1, 4-1) = -511.06$ (ليس تحسيناً)

الخطوة ٣

$$\mathbf{T} = 2[3, 1, 4]^T - [2, 2, 4]^T = [4, 0, 4]^T \cdot$$

الخطوة ٤

$f(4+1, 0, 4) = -6163.72$ (ليس تحسيناً فوق 11.44)
$f(4-1, 0, 4) = 10.12$ (ليس تحسيناً)
$f(4, 0+1, 4) = -689.32$ (ليس تحسيناً)
$f(4, 0-1, 4) = -693.20$ (ليس تحسيناً)
$f(4, 0, 4+1) = -6165.72$ (ليس تحسيناً)
$f(4, 0, 4-1) = 12.12$ (تحسين)

ضع $\mathbb{S} = [4, 0, 3]^T$.

الخطوة ٦ ضع $\mathbb{B} = [3, 1, 4]^T$ ، $\mathbb{C} = [4, 0, 3]^T$ عند $f(\mathbb{C}) = 12.12$

الخطوة ٣

$$\mathbb{T} = 2[4, 0, 3]^T - [3, 1, 4]^T = [5, -1, 2]^T$$

الخطوة ٤

$f(5+1, -1, 2) = -19\,505.6$ (ليس تحسيناً فوق 12.12)
$f(5-1, -1, 2) = -42.40$ (ليس تحسيناً)
$f(5, -1+1, 2) = -1980.12$ (ليس تحسيناً)
$f(5, -1-1, 2) = -2193.48$ (ليس تحسيناً)
$f(5, -1, 2+1) = -2902.98$ (ليس تحسيناً)
$f(5, -1, 2-1) = -1810.58$ (ليس تحسيناً)

ضع $\mathbb{S} = [5, -1, 2]^T$

الخطوة ٥ ضع $\mathbb{B} = [4, 0, 3]^T$ عند $f(\mathbb{B}) = 12.12$

الخطوة ١ تؤدى التحركات الاستكشافية حول $\mathbb{B}$ إلى $f(4, 1, 3) = 13.30$ تحسين .
ضع $\mathbb{C} = [4, 1, 3]^T$ عند $f(\mathbb{C}) = 13.30$
الخطوة ٣

$$\mathbb{T} = 2[4, 1, 3]^T - [4, 0, 3]^T = [4, 2, 3]^T$$

الخطوة ٤ لا تؤدى التحركات الاستكشافية حول $\mathbb{T}$ إلى أى تحسين .
ضع $\mathbb{S} = [4, 2, 3]^T$

الخطوة ٥ ضع $\mathbb{B} = [4, 1, 3]^T$ عند $f(\mathbb{B}) = 13.30$

جدول ١١ - ٢

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
3	0	2	−1028.68
3	0	3	−519.38
3	0	4	10.12
3	1	2	−1017.76
3	1	3	−511.06
3	1	4	11.44
3	2	2	−884.60
3	2	3	−416.90
3	2	4	0.60
4	0	2	−42.18
4	0	3	12.12
4	0	4	−683.38
4	1	2	−38.40
4	1	4	−689.20
4	2	2	−10.66
4	2	3	2.04
4	2	4	−805.46
5	0	2	−1980.12
5	0	3	−2885.22
5	0	4	−6163.72
5	1	2	−1991.28
5	1	3	−2898.98
5	1	4	−6184.48
5	2	2	−2185.48
5	2	3	−3132.18
5	2	4	−6522.68

الخطوة ١ لا تؤدى التحركات الاستكشافية حول **B** إلى أى تحسين .

ضع $\mathbf{C} = [4, 1, 3]^T$ عند $f(\mathbf{C}) = 13.30$

الخطوة ٢ كما هو موضح فى الجدول ١١ ـــ ٢ ، لا يؤدى أى من الـ ٢٦ تشويشاً لـ **B** إلى تحسين فى قيمة الدالة الهدفية الحالية ، $f(\mathbf{B}) = 13.30$. لذلك $\mathbf{B} = [4, 1, 3]^T$ هو حل الأعداد الصحيحة ، لأن $h = 1$ ، وبدأنا عند النقط الصحيحة $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) فى البرنامج المعطى .

لتحسين هذا التقريب، نختصر h تتابعياً إلى 0.1, 0.01 ، 0.001 ، مبتدئين الطريقة من جديد فى كل مرة بأقل قيمة **B** . وتعرض النتائج فى الجدول ١١ ـــ ٣ . نأخذ $x_3^* = 2.946$ $x_2^* = 2.447$ $x_1^* = 3.825$ عند $z^* = 17.56$ كحل أمثل

جدول ١١ - ٣

h	المتجه النهائى			z
	x_1	x_2	x_3	
1	4	1	3	13.30
0.1	3.9	1.4	3.1	16.88
0.01	3.89	2.40	2.82	17.54
0.001	3.825	2.447	2.946	17.56

مسائل مكملة

Supplementary Problems

حل المسائل ١١ – ٥ حتى ١١ – ٢٣ عددياً ، إما باستخدام مولدات الأعداد العشوائية ، أو بالتخمين المسبب لإعطاء تقريب أولى . وكلما أمكن ، حل حسابي (تحليلي) .

١١ – ١٥

تعظيم $z = -(2x_1 - 5)^2 - (x_2 - 3)^2 - (5x_3 - 2)^2$

١١ – ١٦

تصغير $z = |x_1| + \sqrt{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$

١١ – ١٧

تصغير $z = \dfrac{8x_1 + 4x_2 - x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

١١ – ١٨

تصغير $z = -\sin x_1 \sin x_2 \sin (x_1 + x_2)$

١١ – ١٩

تعظيم $z = (x_1^2 + 2x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)}$

١١ – ٢٠

تعظيم $z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0.02(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$

١١ – ٢١

تعظيم $z = -(x_1 - \sqrt{5})^2 - (x_2 - \pi)^2 - 10$

عند x_1 ، x_2 أعداد صحيحة

(ملحوظة : انظر المسألة ١١ – ١٢)

١١ – ٢٢ تصغير دالة روزينبروك ،

$$z = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

١١ – ٢٣ تبين أعداد السكان فى بلدة بمنتصف الغرب كما يلى

السنة	1930	1940	1950	1960	1970
السكان	4953	7389	11 023	16 445	24 532

اعتماداً على هذه البيانات ، المطلوب تقدير السكان فى عام ١٩٨٠ .

(١) افترض أن نمو السكان أسّياً ويتبع الصيغة $N = Ae^{mt}$ ، حيث إن N تدل على التعداد ،و t تدل على الزمن .

(٢) عند أى سنة تعداد t ، يكون هناك اختلاف بين القيمة الحقيقية لـ N المعطاة بالبيانات ، والقيمة النظرية $N = Ae^{mT}$. ارمز لهذا الخطأ e_T ، أى أن :

$$e_{1930} = 4953 - Ae^{m(1930)}$$

(٣) حدد الثوابت A ، m ، بحيث إن

$$e^2_{1930} + e^2_{1940} + e^2_{1950} + e^2_{1960} + e^2_{1970}$$

تكون حداً أدنى .

(٤) باستخدام هذه الثوابت ، قيم المنحنى الأسّى النظرى (الذى يسمى عادة منحنى المربعات الصغرى الأسّى) عند $t = 1980$ ، وخذ هذا العدد ليكون التعداد المقدر لعام ١٩٨٠

١١ – ٢٤ بين أن الدالة التربيعية

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

بمصفوفة معاملات متماثلة **A** تكون محدبة فقط إذا كانت **A** سالبة نصف مؤكدة .

البرمجة غير الخطية
أمثلية متعدد المتغيرات ذو قيود
Nonlinear Programming: Multivariable Optimization with Constraints

الصيغة القياسية STANDARD FORMS

بمعرفة $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$، تكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية ، والتى تحتوى على متساويات قيود فقط هى :

$$\begin{aligned} \text{تعظيم} \quad & z = f(\mathbf{X}) \\ \text{علماً بأن} \quad & g_1(\mathbf{X}) = 0 \\ & g_2(\mathbf{X}) = 0 \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & g_m(\mathbf{X}) = 0 \end{aligned} \qquad (١٢ - ١)$$

عند $m < n$ (عدد القيود أقل من عدد المتغيرات) .

وكما فى الفصل ١١ ، تتحول برامج التصغير إلى برامج تعظيم بضرب الدالة الهدفية فى - ١ ، وتكون الصيغة القياسية للبرامج غير الخطية والتى تحتوى على متباينات للقيود فقط هى :

$$\begin{aligned} \text{إما تعظيم} \quad & z = f(\mathbf{X}) \\ \text{علماً بأن} \quad & g_1(\mathbf{X}) \le 0 \\ & g_2(\mathbf{X}) \le 0 \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & g_p(\mathbf{X}) \le 0 \end{aligned} \qquad (١٢ - ٢)$$

أو

$$\begin{aligned} \text{تعظيم} \quad & z = f(\mathbf{X}) \\ \text{علماً بأن} \quad & g_1(\mathbf{X}) \le 0 \\ & g_2(\mathbf{X}) \le 0 \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & g_m(\mathbf{X}) \le 0 \\ \text{عند} \quad & \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (١٢ - ٣)$$

والصيغتان تكونان متكافئتين : عند $m = p$ فإن (١٢ - ٢) تصبح فى داخل (١٢ - ٣) ، بتعويض $\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{V},$ عند $\mathbf{U} \geq \mathbf{0}$ and $\mathbf{V} \geq \mathbf{0};$ وعلى الوجه الآخر تكون (١٢ - ٣) مثل (١٢ - ٢) تماماً فى الحالة الخاصة $p = m + n$ ، $g_{m+i}(\mathbf{X}) = -x_i$ حيث $(i = 1, 2, \ldots, n)$ الصيغة (١٢ - ٣) تكون مناسبة عندما لا تتطلب خطوات الحل أى متغيرات غير سالبة . فى (١٢ - ١) ، (١٢ - ٢) أو (١٢ - ٣) ، وتكون f دالة غير خطية ، ولكن بعض أو كل قيم g تكون خطية .

وتحل البرامج غير الخطية ، والتى ليست فى الصيغة القياسية إما بوضعها فى الصيغة (انظر المسائل ١٢ - ٧ ، ١٢ - ١٠ ، ١٢ - ١١) ، أو بتطوير طرق الحل المعطاة بأسفل للبرامج من الصيغة القياسية (انظر المسائل ١٢ - ٨ ، ١٢ - ٩ ، ١٢ - ١٢) .

مضروبات لاجرانج : LAGRANGE MULTIPLIERS

لحل البرنامج (١٢ - ١) ، نُكَوِّن أولاً دالة لاجرانج

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \equiv f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X}) \qquad (١٢ - ٤)$$

حيث إن $(i = 1, 2, \ldots, m)$ λ_i تكون ثوابت (مجهولة) تسمى مضروبات لاجرانج ، ثم نحل النموذج ذا $n + m$ معادلة .

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad (١٢ - ٥)$$

نظريه ١٢ - ١ إذا وجد حل للبرنامج (١٢ - ١) ، فإنه يكون ضمن حلول النموذج (١٢ - ٥) ، على أساس أن كُلًّا من $f(\mathbf{X})$ ، $g_i(\mathbf{X})$ عند $(i = 1, 2, \ldots, m)$ لها جميعاً مشتقات جزئية أولى متصلة ، ومصفوفة جاكوب $m \times n$

$$\mathbf{J} \equiv \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]$$

تكون من الرتبة m عند $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$

(انظر المسائل ١٢ - ١ حتى ١٢ - ٥) . طريقة مضروبات لاجرانج تكافىء استخدام معادلات القيود لحذف عدد معين من المتغيرات -x من الدالة الهدفية ، ثم حل مسألة التعظيم غير المقيدة فى المتغيرات -x المتبقية .

طريقة نيوتن ــ رافسون NEWTON-RAPHSON METHOD

حيث إن $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \equiv L(\mathbf{Z})$ غير خطية ، فإنه عادة يكون من غير الممكن حل (١٢ - ٥) حسابياً (تحليلياً) . ومع ذلك ، وحيث إن حلول (١٢ - ٥) هى النقط الساكنة فى $L(\mathbf{Z})$, وحيث تحدث النهايات العظمى والدنيا (نظرية ١١ - ٣) فى $L(\mathbf{Z})$ بين هذه النقط ، فإنه من الممكن استخدام طريقة نيوتن ــ رافسون (الفصل ١١) لتقريب النهاية اليمنى فى $L(\mathbf{Z});$ بمعنى النهاية التى تناظر الحل الأمثل فى (١٢ - ١) . وتطبق هنا الصيغة التكرارية

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{Z}_k - (\mathbf{H}_L|_{\mathbf{Z}_k})^{-1} \nabla L|_{\mathbf{Z}_k} \qquad (١٢ - ٦)$$

(انظر المسألة ١٢ – ٣)

وهذا المدخل له قيمة محدودة ، لأنه ، وكما فى الفصل ١١ ، من الصعب جداً تحديد قيمة مناسبه لـ Z_0 . ولأى قيمة غير صحيحة فإن طريقة نيوتن ـــ رافسون يمكن أن تشتت الحل أو تقترب من النهاية الخاطئة لـ $L(Z)$. ومن الممكن أيضاً (انظر المسألة ١٢ – ١ ، ١٢ – ٤) أن تتقارب الطريقة فى حالة عدم وجود حل أمثل .

الدوال الجزائية : PENALTY FUNCTIONS

كمدخل بديل لحل البرنامج (١٢ – ١) الذى يتضمن البرنامج غير المقيد

تعظيم
$$z = f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{m} p_i g_i^2(\mathbf{X}) \qquad (١٢ - ٧)$$

حيث $p_i > 0$ تكون ثوابت (يمكن أن نختارها) تسمى بالأوزان الجزائية . ويكون حل البرنامج (١٢ – ٧) هو نفسه حل البرنامج (١٢ – ١) عند كل قيمة $g_i(\mathbf{X}) = 0$. . وللقيم الكبيرة فى p_i، يكون حل (١٢ – ٧) كل قيمة فى $g_i(\mathbf{X})$ قريبة من الصفر لتجنب الآثار الجانبية على الدالة الهدفية من الحدود $p_i g_i^2(\mathbf{X})$; وعندما كل قيمة $p_i \to \infty$, وكل قيمة $g_i(\mathbf{X}) \to 0$. (انظر المسألة ١٢ – ٦) .

وعملياً .. لا يمكن تطبيق هذه الطريقة حسابياً إلا فى حالات نادرة . وبدلاً من ذلك يحل البرنامج (١٢ – ٧) بالتكرار بواسطة بحث النمط المعدل الموصوف فى الفصل ١١ ، وفى كل مرة إما بمجموعة جديدة من الأوزان الجزائية الزائدة ، أو بتخفيض حجم خطوة . ويكون كل بحث نمطى بمجموعة أوزان جزائية محددة ، وحجم خطوة معطى هو مرحلة من مراحل الحل . ويكون المتجه الأول للمرحلة المعينة هو المتجه النهائى للمرحلة السابقة لهذه المرحلة . وتختار الأوزان الجزائية للمرحلة الأولى صغيرة ، غالباً $1/50 = 0.02$ ؛ وغالباً ما يؤخذ حجم الخطوة بواحد .

ويتأثر التقريب فى هذه الطريقة بمعدلات الزيادة فى الأوزان الجزائية وتخفيض حجم الخطوة . والقرارات التى تحكم هذه المعدلات هى نوع من الفن أكثر منها علماً . (انظر المسألة ١٢ – ٧)

شروط كون ـــ توكر KUHN-TUCKER CONDITIONS

لحل البرنامج (١٢ – ٣) ، نكتب أولاً شروط اللاسلبية $-x_1 \le 0,\ -x_2 \le 0,\ \dots,\ -x_n \le 0$, بحيث تكون مجموعة القيود هى $m + n$ متباينة كل منها له علامة أقل من أو يساوى ، ثم نضيف المتغيرات المساعدة $x_{n+1}^2, x_{n+2}^2, \dots, x_{2n+m}^2$, على التوالى للأطراف اليسرى من القيود ، ثم نحول كل متباينة إلى متساوية . وهنا تضاف المتغيرات المساعدة كتربيعات الحدود لضمان عدم سلبيتها ، ثم نكون دالة لاجرانج

$$L = f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(\mathbf{X}) + x_{n+i}^2] - \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_i [-x_i + x_{n+i}^2] \qquad (١٢ - ٨)$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+n}$ تكون مضروبات لاجرانج . وأخيراً نحل النموذج .

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, 2n + m) \qquad (١٢ - ٩)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m + n) \qquad (١٢ - ١٠)$$

$$\lambda_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m + n) \qquad (١٢ - ١١)$$

ولكوّن (١٢ – ٩) حتى (١٢ – ١١) شروط كون ــ توكر للبرنامج (١٢ – ٢) أو (١٢ – ٣) . وتنتج المجموعتين (١٢ – ٩) ، (١٢ – ١٠) مباشرة من نظرية مضروبات لاجرانج ، وتعرف المجموعة (١٢ – ١١) باسم المؤهلات المقيدة . ومن بين حلول شروط كون ــ توكر يكون حل البرنامج (١٢ – ٣) إذا كانت $f(\mathbf{X})$ ، وكل قيمة $g_i(\mathbf{X})$ لها مشتقة أولى متصلة (انظر المسألة ١٢ – ١٠) .

طريقة الاتجاهات الممكنة METHOD OF FEASIBLE DIRECTIONS

هى طريقة ذات خمس خطوات لحل البرنامج (١٢ – ٢) . وتطبق هذه الطريقة عندما تكون المنطقة الممكنة لها قيم داخلية ، ثم تتقارب من الحد الأعلى الشامل فقط عندما يكون التقريب الأولى « قريباً » من الحل (انظر المسائل ١٢ – ٣ ، ١٢ – ٤) . ولا توجد قيم داخلية للمنطقة الممكنة إذا كان اثنان من متباينات القيود ناتجين من التقارب فى متساويات القيود (انظر المسألة ١٢ – ١١) .

الخطوة ١ : حدد تقريباً أولياً ممكناً للحل ، وعرفه بالحرف $\mathbf{B}$.

الخطوة ٢ : حل البرنامج الخطى التالى فى المتغيرات $d_1, d_2, \ldots, d_{n+1}$:

تعظيم
$$z = d_{n+1}$$

علماً بأن

$$-\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{B}} d_1 - \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{B}} d_2 - \cdots - \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{B}} d_n + d_{n+1} \le 0$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{B}} d_1 + \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{B}} d_2 + \cdots + \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{B}} d_n + k_1 d_{n+1} \le -g_1(\mathbf{B}) \qquad (١٢ - ١٢)$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{B}} d_1 + \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{B}} d_2 + \cdots + \left.\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{B}} d_n + k_2 d_{n+1} \le -g_2(\mathbf{B})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\frac{\partial g_p}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{B}} d_1 + \left.\frac{\partial g_p}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{B}} d_2 + \cdots + \left.\frac{\partial g_p}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{B}} d_n + k_p d_{n+1} \le -g_p(\mathbf{B})$$

عند
$$d_j \le 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n+1)$$

وهنا $k_i \ (i = 1, 2, \ldots, p)$ تكون صفراً إذا كانت $g_i(\mathbf{X})$ خطية ، وتكون واحداً إذا كانت $g_i(\mathbf{X})$ غير خطية .

الخطوة ٣ : إذا كانت $d_{n+1} = 0,$ ، فإن $\mathbf{X}^* = \mathbf{B};$ وإذا لم تكن كذلك ، فاذهب إلى الخطوة ٤ .

الخطوة ٤ : ضع $\mathbf{D} = [d_1, d_2, \ldots, d_n]^T.$ ، حدد قيمة غير سالبة لـ λ ، والتى تعظم $f(\mathbf{B} + \lambda \mathbf{D})$ ، بينما نحافظ على أن تكون $\mathbf{B} + \lambda \mathbf{D}$ ممكنة ؛ وأطلق على هذه القيمة λ^* .

الخطوة ٥ : عرّف $\mathbf{B} = \mathbf{B} + \lambda^* \mathbf{D}$ ، ثم عُد إلى الخطوة ٢ . (انظر المسائل ١٢ – ٣ حتى ١٢ – ١٥)

مسائل محلولة

Solved Problems

١٢ – ١ تعظيم $z = 2x_1 + x_1x_2 + 3x_2$

علماً بأن $x_1^2 + x_2 = 3$

من الواضح أنه لأى قيمة سالبة كبيرة x_1 توجد قيمة سالبة كبيرة x_2 ، بحيث تحقق معادلة القيود ، ولكن $z \approx x_1x_2 \to \infty$. ولا يوجد حد أعلى شامل .

١٢ – ٢ تصغير $z = x_1 + x_2 + x_3$

علماً بأن $x_1^2 + x_2 = 3$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7$

يكافىء هذا البرنامج التصغير غير المقيد لـ

$$z = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_1 + 4)$$

والذى يكون من الواضح أن له حلاً . ومن الممكن تطبيق طريقة مضروبات لاجرانج على البرنامج الأصلى القياسى :

تعظيم $z = -x_1 - x_2 - x_3$

علماً بأن $x_1^2 + x_2 - 3 = 0$ (١)

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$

وهنا $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - x_2 - x_3$ ، متغيرات ، $n = 3$ فيدان $m = 2$

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2 - 3 \qquad g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7$$

وتصبح دالة لاجرانج

$$L = (-x_1 - x_2 - x_3) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3) - \lambda_2(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7)$$

ويصبح النموذج (١٢ – ٥) هو

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 - 2x_1\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \quad (٢)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -1 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \quad (٣)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 - 2\lambda_2 = 0 \quad (٤)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1^2 + x_2 - 3) = 0 \quad (٥)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7) = 0 \quad (٦)$$

وبحل على التوالى (٤) فى λ_2 ، (٣) فى λ_1 ، (٢) فى x_1 ، (٥) فى x_2 ، (٦) فى x_3 ، نحصل على الحل الوحيد

$$\lambda_2 = -0.5,\ \lambda_1 = 0.5,\ x_1 = -0.5,\ x_2 = 2.75,\ \text{and}\ x_3 = -0.375,$$

عند

$$z = -x_1 - x_2 - x_3 = -(-0.5) - 2.75 - (-0.375) = -1.875$$

وحيث إن المشتقات الجزئية الأولى لـ $f(x_1, x_2, x_3), g_1(x_1, x_2, x_3), \text{and } g_2(x_1, x_2, x_3)$. كل متصلة ، وحيث إن

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

من الرتبة 2 فى أى مكان (العمودان الأخيران مستقلان خطياً فى كل مكان) ، فإن أى من $x_1 = -0.5$, $x_2 = 2.75$, $x_3 = -0.375$ تكون حَلًّا أمثل للبرنامج (1) ، أو لا يوجد حل أمثل . وبالتحقق من النقط الممكنة فى المنطقة حول $(-0.5, 2.75, -0.375)$, نجد أن هذه النقطة هى فى الحقيقة موقع الحد الأعلى (الشامل) للبرنامج (١) . لذلك ، فإنه يكون موقع الحد الأدنى الشامل للبرنامج الأصلى عند $z^* = -(-1.875) = 1.875$.

$$z^* = -(-1.875) = 1.875$$

١٢ – ٣

تعظيم : $z = \sin(x_1x_2 + x_3)$

علماً بأن : $-x_1x_2^3 + x_1^2x_3^2 = 5$

كما فى المسألة ١٢ – ٢ ، فإنه من الممكن التقرير مسبقاً أنه يوجد حل أمثل . وفى الحقيقة ، بالبحث ، فإن النقط $x_1 = 2\sqrt{5}/\pi,\ x_2 = 0,\ x_3 = \pi/2$ ، تحقق معادلة القيد ، وتجعل $z = 1$؛ لذلك فإنها تمثل حداً أعلى شاملاً .

دعنا نطبق طريقة مضروبات لاجرانج على هذه المسألة ، فتكون دالة لاجرانج هى :

$$L = \sin(x_1x_2 + x_3) - \lambda_1(x_1^2x_3^2 - x_1x_2^3 - 5)$$

لذلك فإن معادلات لاجرانج تكون

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2\cos(x_1x_2 + x_3) - 2\lambda_1x_1x_3^2 + \lambda_1x_2^3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1\cos(x_1x_2 + x_3) + 3\lambda_1x_1x_2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = \cos(x_1x_2 + x_3) - 2\lambda_1x_1^2x_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1^2x_3^2 - x_1x_2^3 - 5) = 0$$

وحيث إن هذه المعادلات لايمكن أن تُحل جبرياً ، فإننا نستخدم مدخل نيوتن ــ رافسون . ويكون المتجه المتدرج ومصفوفة هسى لدالة لاجرانج كالآتى :

$$\nabla L = \begin{bmatrix} x_2\cos(x_1x_2 + x_3) - 2\lambda_1x_1x_3^2 + \lambda_1x_2^3 \\ x_1\cos(x_1x_2 + x_3) + 3\lambda_1x_1x_2^2 \\ \cos(x_1x_2 + x_3) - 2\lambda_1x_1^2x_3 \\ -(x_1^2x_3^2 - x_1x_2^3 - 5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{H}_L = \begin{bmatrix} -x_2^2 \sin(x_1x_2+x_3) - 2\lambda_1 x_3^2 & & & \\ \cos(x_1x_2+x_3) - x_1x_2\sin(x_1x_2+x_3) + 3\lambda_1 x_2^2 & -x_1^2 \sin(x_1x_2+x_3) + 6\lambda_1 x_1 x_2 & & \\ -x_2 \sin(x_1x_2+x_3) - 4\lambda_1 x_1 x_3 & -x_1 \sin(x_1x_2+x_3) & -\sin(x_1x_2+x_3) - 2\lambda_1 x_1^2 & \\ -2x_1x_3^2 + x_2^3 & 3x_1x_2^2 & 2x_1^2 x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

(وقد حذفت الحدود الكبيرة فى القطر العلوى للمصفوفة المتماثلة لتوفير المساحة) . ونأخذ بالاختيار

$$\mathbb{Z}_0 = [-1, 1, 2.5, 1]^T$$

نحسب كما يلى (بتقريب جميع الحسابات إلى أربعة أرقام مؤكدة)

المحاولة الأولى

$$\nabla L|_{\mathbb{Z}_0} = \begin{bmatrix} 13.57 \\ -3.071 \\ -4.929 \\ -2.25 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{H}_L|_{\mathbb{Z}_0} = \begin{bmatrix} -13.50 & 4.068 & 9.003 & 13.5 \\ 4.068 & -6.997 & 0.9975 & -3 \\ 9.003 & 0.9975 & -2.998 & -5 \\ 13.5 & -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{H}_L|_{\mathbb{Z}_0})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05737 & 0.03845 & 0.1318 & 0.03194 \\ 0.03845 & -0.08206 & 0.1531 & -0.03889 \\ 0.1318 & 0.1531 & 0.2641 & -0.09044 \\ 0.03194 & -0.03889 & -0.09044 & 0.1040 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_0 - (\mathbb{H}_L|_{\mathbb{Z}_0})^{-1} \nabla L|_{\mathbb{Z}_0} = [-0.9388, 0.8931, 2.279, 0.2353]^T$$

المحاولة الثانية

$$\nabla L|_{\mathbb{Z}_1} = \begin{bmatrix} 2.579 \\ -0.6503 \\ -0.8158 \\ -0.2479 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{H}_L|_{\mathbb{Z}_1} = \begin{bmatrix} -3.236 & 1.524 & 1.128 & 10.47 \\ 1.524 & -2.058 & 0.9309 & -2.247 \\ 1.128 & 0.9309 & -1.406 & -4.018 \\ 10.47 & -2.247 & -4.018 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{H}_L|_{\mathbb{Z}_1})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8072 & 1.224 & 1.418 & 0.01391 \\ 1.224 & 1.574 & 2.309 & -0.09969 \\ 1.418 & 2.309 & 2.404 & -0.1569 \\ 0.01391 & -0.09969 & -0.1569 & 0.03573 \end{bmatrix}$$

ومن ثم

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_1 - (\mathbb{H}_L|_{\mathbb{Z}_1})^{-1} \nabla L|_{\mathbb{Z}_1} = [-1.064, 0.6190, 2.046, 0.01545]^T$$

وبالاستمرار فى هذه الطريقة نحصل تباعاً على :

$$\mathbb{Z}_3 = [-1.053, 0.5067, 2.099, 0.001369]^T$$
$$\mathbb{Z}_4 = [-1.053, 0.4982, 2.095, 0.000009]^T$$
$$\mathbb{Z}_5 = [-1.053, 0.4981, 2.095, 0]^T$$

وحيث إن عناصر $\mathbb{Z}$ استقرت لثلاثة أرقام مؤكدة ، فإننا نأخذ $x_2^* = 0.498$, $x_1^* = -1.05$, $x_3^* = 2.10$, and $\lambda_1 = 0$,

عند

$$z^* = \sin(x_1^* x_2^* + x_3^*) = 1.00$$

لاحظ أن طريقة نيوتن ــ رافسون قد اقتربت إلى حد أعلى شامل يختلف عن الحد الأعلى المحدد أصلاً .

١٢ - ٤ بدون النظر إلى المسألة ١٢ - ١ ، استخدم طريقة نيوتن ـــ رافسون فى

تعظيم $z = 2x_1 + x_1x_2 + 3x_2$

علماً بأن $x_1^2 + x_2 = 3$

هنا $L = (2x_1 + x_1x_2 + 3x_2) - \lambda_1(x_1^2 + x_2 - 3).$

لذلك

$$\nabla L = \begin{bmatrix} 2 + x_2 - 2\lambda_1 x_1 \\ x_1 + 3 - \lambda_1 \\ -x_1^2 - x_2 + 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} -2\lambda_1 & 1 & -2x_1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2x_1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نأخذ اختيارياً $\mathbf{Z}_0 = [1, 1, 1]^T$، ونحسب :

المحاولة الأولى

$$\nabla L|_{\mathbf{Z}_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_L|_{\mathbf{Z}_0} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{H}_L|_{\mathbf{Z}_0})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_0 - (\mathbf{H}_L|_{\mathbf{Z}_0})^{-1} \nabla L|_{\mathbf{Z}_0} = [1/3, 10/3, 10/3]^T$$

المحاولة الثانية

$$\nabla L|_{\mathbf{Z}_1} = \begin{bmatrix} 28/9 \\ 0 \\ -4/9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_L|_{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -20 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{H}_L|_{\mathbf{Z}_1})^{-1} = \frac{1}{72}\begin{bmatrix} -9 & 6 & -9 \\ 6 & -4 & -66 \\ -9 & -66 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1 - (\mathbf{H}_L|_{\mathbf{Z}_1})^{-1} \nabla L|_{\mathbf{Z}_1} = [2/3, 8/3, 11/3]^T$$

وبالاستمرار لمحاولتين تاليتين نحصل على

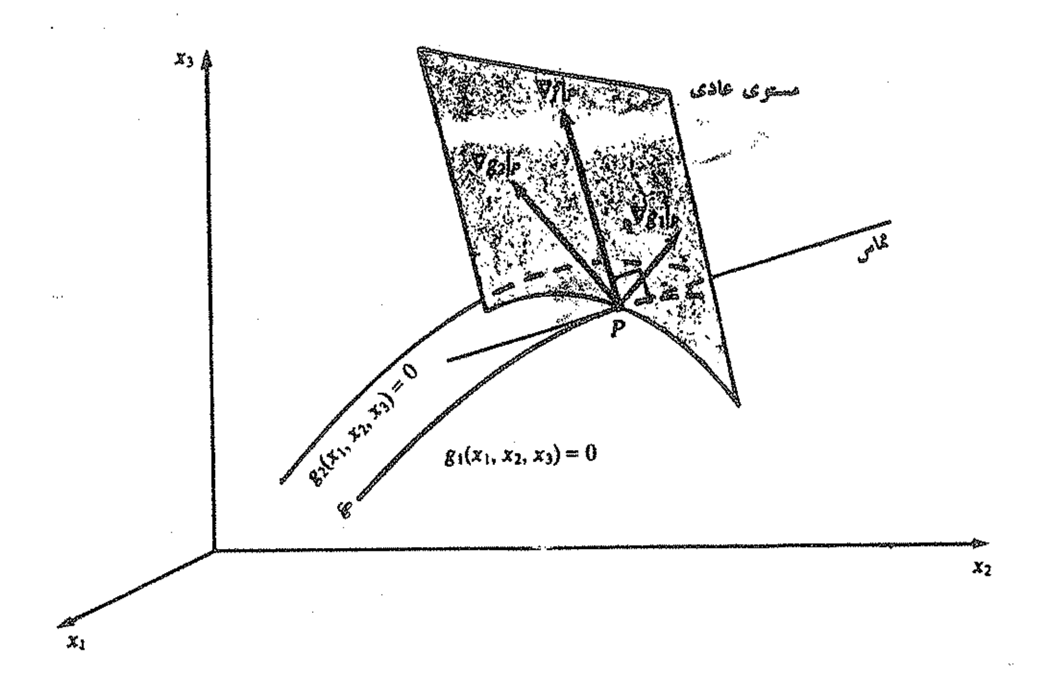
$$\mathbf{Z}_3 = [0.6333, 2.6, 3.633]^T$$
$$\mathbf{Z}_4 = [0.6330, 2.599, 3.633]^T$$

ولما كانت عناصر $\mathbf{Z}$ استقرت لثلاثة أرقام مؤكدة ، فإننا نأخذ $x_2^* = 2.60$, $x_1^* = 0.633$, $\lambda_1^* = 3.63$, عند

$$z^* = 2x_1^* + x_1^* x_2^* + 3x_2^* = 10.7$$

بالتعبير عن قيمة z كدالة (مكعبة) فى x_1 فقط ، فإنه من السهل معرفة أنه فى هذه الحالة الخاصة اقتربت طريقة نيوتن ـــ رافسون من الحد الأعلى المحلى .

١٢ - ٥ ناقش باستخدام الهندسة التحليلية ، طريقة مضروبات لاجرانج فى ثلاثة أبعاد



بالرجوع إلى شكل ١٢ - ١ تكون المسألة هى تعظيم الدالة $f(x_1, x_2, x_3)$ حول منحنى الفراغ $\mathscr{C}$ ، والذى فيه السطحان يتقاطعان .

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad \text{and} \qquad g_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

دع P لتكون النقطة فى $\mathscr{C}$ التى يحدث عنها الحد الأعلى . من المسألة ١١ - ٧ فإننا نعرف أن المتجه f يجب أن يكون له مسقط صفرى على المماس لـ $\mathscr{C}$ عند النقطة P ؛ وإلا فإن أى إزاحة صغيرة على المنحنى تنتج قيمة كبيرة للدالة . لذلك يجب أن تقع $\nabla f|_P$ على المستوى العادى للمنحنى عند P ، ولكن هذا المتجه يعبر عنه بالتكوين الخطى للسطحين العاديين عند $P, \nabla g_1|_P$ and $\nabla g_2|_P$ ، بمعنى

$$\nabla f|_P = \lambda_1 \nabla g_1|_P + \lambda_2 \nabla g_2|_P \qquad \text{or} \qquad \nabla L|_P = 0$$

حيث إن :

$$L \equiv f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2. \tag{١}$$

وتكون المعادلات القياسية المثلة فى (١) هى معادلات لاجرانج الثلاث الأولى (١٢ - ٥) ؛ وتحدد معادلتا لاجرانج الباقيتان متطلبات ، وهى أن P تقع فعلياً على $\mathscr{C}$.

١٢ - ٦ استخدم مدخل الدالة الجزائية فى

تعظيم $z = -4 - 3(1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2$

علماً بأن $3x_1 + x_2 = 5$

وهنا تصبح (١٢ - ٧) :

تعظيم

$$\hat{z} = -4 - 3(1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2 - p_1(3x_1 + x_2 - 5)^2$$

وبرنامج التعظيم هذا وغير المقيد فى المتغيرين x_1 and x_2 هو من البساطة بحيث يمكن حله حسابياً . بوضع $\nabla \hat{z} = 0$ نحصل على :

$$(1+3p_1)x_1 + \quad p_1x_2 = 1+5p_1$$
$$3p_1x_1 + (1+p_1)x_2 = 1+5p_1$$

بحل هذه المعادلات فى x_1 and x_2 بالنسبه لـ p_1 نحصل على

$$x_1 = x_2 = \frac{1+5p_1}{1+4p_1} = \frac{(1/p_1)+5}{(1/p_1)+4}$$

وحيث إن مصفوفة هسى هى

$$\mathbf{H}_{\hat{z}} = \begin{bmatrix} -6-18p_1 & -6p_1 \\ -6p_1 & -2-2p_1 \end{bmatrix}$$

تكون سالبة مؤكدة لكل القيم الموجبة لـ p_1 ، فتكون $\hat{z}$ دالة محدبة محددة ، وتكون النقطه الساكنة الوحيدة لها هى الحدّ الأعلى الشامل . لذلك إذا آلت $p_1 \to +\infty$ نحصل على الحل الأمثل للبرنامج الأصلى

$$x_1 \to \frac{5}{4} = x_1^* \qquad x_2 \to \frac{5}{4} = x_2^*$$

عند

$$z^* = -4 - 3(1-x_1^*)^2 - (1-x_2^*)^2 = -4.25.$$

١٢ - ٧ أستخدم مدخل الدالة الجزائية فى

تصغير : $z = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 1)^2 + 1$

علماً بأن : $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 16$

بوضع هذا البرنامج فى الصيغة القياسية ، يكون

تعظيم : $z = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1$ (١)

علماً بأن : $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16 = 0$

للبرنامج (١) يصبح (١٢ - ٧)

تعظيم : $\hat{z} = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - p_1(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$ (٢)

المرحلة الأولى : نضع $p_1 = 0.02$ فى (٢) ، ونعتبر البرنامج

تعظيم : $\hat{z} = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0.02(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$ (٣)

نأخذ بالاختيار $[0, 0, 0]^T$ كمتجه أولى ، ونضع $h = 1$ ، ونطبق بحث النمط (فصل ١١) على البرنامج (٣) ، فتكون النتيجة بعد 78 تقييم دوال هى $[1, 1, 1]^T$ عند

$$f(1, 1, 1) = -1 \qquad \text{و} \qquad g_1(1, 1, 1) = -13$$

المرحلة الثانية : حيث إن $g_1(1,1,1) = -13 \neq 0$ ، فإن القيد فى البرنامج (١) لا يتحقق . ولتحسين هذا الموقف ، نزيد قيمة p_1 فى (٢) إلى 0.2 ، ونعتبر البرنامج

تعظيم : $\hat{z} = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0.2(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$

بأخذ $[1,1,1]^T$ من المرحلة الأولى كتقريب أولى ، نطبق بحث النمط على (٤) ، ونحافظ على $h = 1$. تظل النتيجة $[1,1,1]^T$ ، مما يدل على أنه لا يمكن أن يتحقق القيد بالأعداد الصحيحة .

المرحلة الثالثة : حيث إن زيادة p_1 لا تُحسّن الحل الحالى ، نعود إلى البرنامج (٣) ، ونخفض h إلى 0.1 ، ونعمل بحث نمط جديد مرة أخرى باستخدام $[1,1,1]^T$ كتقريب أولى . وتكون النتيجة

عند $g_1(1.5, 1.5, 1) = 0.1875$ و $f(1.5, 1.5, 1) = -1$

جدول ١٢ - ١

المرحلة	p_1	h	المتجه النهائى X			$f(X)$	$g_1(X)$
			x_1	x_2	x_3		
1	0.02	1	1	1	1	−1	−13
2	0.2	1	1	1	1	−1	−13
3	0.02	0.1	1.5	1.5	1	−1	0.1875
4	0.2	0.1	1.5	1.5	1	−1	0.1875
5	0.02	0.01	1.49	1.5	1	−1.000	−0.0623
6	0.2	0.01	1.49	1.5	1.01	−1.000	−0.0113
7	0.2	0.001	1.496	1.496	1.002	−1.000	−0.0039
8	2	0.001	1.496	1.496	1.003	−1.000	0.0012
9	20	0.001	1.496	1.496	1.003	−1.000	0.0012

بالاستمرار فى هذه الطريقة نكمل الجدول ١٢ - ١ . وباستخدام نتائج المرحلة ٩ ، نستنتج أن $x_3^* = 1.003$, $x_1^* = 1.496$, $x_2^* = 1.496$, عند $z^* = +1.000$, ، وهذا يقرب الحل الأمثل إلى برنامج التصغير الأصلى .

وبالتفتيش يكون الحل الصحيح هو

$$x_1^* = x_2^* = \left(\frac{15}{2}\right)^{1/5} = 1.4963 \qquad x_3^* = 1$$

عند $z^* = 1$ ، وبهذا يؤدى مدخل الدالة الجزائية إلى أربعة أرقام مؤكدة ، وهذه نتيجة جيدة .

١٢ - ٨

تعظيم : $z = -x_1^6 x_2^2 - x_1^4 x_3^2 - 1$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4 = 0$

$x_1 x_3 - 19 = 0$

كل المتغيرات أعداد صحيحة

تطبق طريقة الدالة الجزائية على هذا البرنامج ، على أساس أن بحث النمط يبدأ من التقريب الأولى ذى الأعداد الصحيحة ، مثلاً $[0, 0, 0]^T$. وباستخدام $h = 1$ خلال البحث . ومنه نستنتج الجدول ١٢ - ٢ ، ونجد أن

$$z^* = -1091 \quad \text{عند} \quad x_1^* = 1, x_2^* = -27, x_3^* = 19,$$

جدول ١٢ - ٢

المرحلة	p_1	p_2	h	المتجه النهائى X x_1	x_2	x_3	$f(X)$	$g_1(X)$	$g_2(X)$
1	0.02	0.02	1	4	0	0	−1	0	−19
2	0.02	0.2	1	4	0	0	−1	0	19
3	0.02	2	1	1	−1	12	−146	31	−7
4	0.2	20	1	1	−11	17	−411	26	−2
5	2	200	1	1	−24	19	−938	6	0
6	20	200	1	1	−27	19	−1091	0	0

١٢ - ٩ اشرح كيف يمكن تعديل الدالة الجزائية لحل البرنامج (١٢ - ١) إذا أضيف شرط اللاسلبية .

احصل على التقريب الأولى بعناصر لا سلبية فقط ، ثم قيد التحركات الاستكشافية للمتجهات التي تحقق شرط اللاسلبية . وهذا يمكن تحقيقه ، وذلك بجعل الدالة الهدفية دالة جزائية عندما يحدث خرق لشروط اللاسلبية ، بمعنى أن $f(X)$ تُقيَّم بقيمة كبيرة سلبية ، ربما -1×10^{30} ، عندما يكون أى عنصر فى المتجه المشوش X سالباً .

١٢ - ١٠ حل البرنامج التالى باستخدام شروط كون ـ توكر :

تعظيم : $z = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 + 5x_3$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$

كل المتغيرات لا سلبية

نبدأ أولاً بالتحويل إلى النموذج (١٢ - ٣) ، ثم ندخل مربعات المتغيرات المساعدة ، فنحصل على

تصغير : $z = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3$

علماً بأن :

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 + x_4^2 = 0$$
$$-x_1 + x_5^2 = 0$$
$$-x_2 + x_6^2 = 0$$
$$-x_3 + x_7^2 = 0$$

لهذا البرنامج تكون دالة لاجرانج هى

$$L = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3$$
$$-\lambda_1(-x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 + x_4^2) - \lambda_2(-x_1 + x_5^2) - \lambda_3(-x_2 + x_6^2) - \lambda_4(-x_3 + x_7^2)$$

وبأخذ المشتقات الموضحة فى (١٢ - ٩) ، (١٢ - ١٠) نحصل على

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (١)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -10x_2 + 4x_1 + 12x_3 - 10 + 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \qquad (٢)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -20x_3 - 6x_1 + 12x_2 - 5 + \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \qquad (٣)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = -2\lambda_1 x_4 = 0 \qquad (٤)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_5} = -2\lambda_2 x_5 = 0 \qquad (٥)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_6} = -2\lambda_3 x_6 = 0 \qquad (٦)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_7} = -2\lambda_4 x_7 = 0 \qquad (٧)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4^2 - 4 = 0 \qquad (٨)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_5^2 = 0 \qquad (٩)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = x_2 - x_6^2 = 0 \qquad (١٠)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = x_3 - x_7^2 = 0 \qquad (١١)$$

يمكن تبسيط المعادلات . عيّن

$$s_1 \equiv x_4^2$$

المعادلات من (٤) إلى (٧) تتضمن على التوالى أن إما λ_1 or x_4، إما λ_2 or x_5، إما λ_3 or x_6، إما λ_4 or x_7، تساوى صفراً ، ولكن من (٩) حتى (١٢) x_4, x_5, x_6, x_7 تكون صفرية إذا كانت فقط s_1, x_1, x_2, x_3 صفرية على التوالى . لذلك فإن المعادلات من (٤) حتى (٧) ، من (٩) حتى (١٢) تكون مكافئة للنموذج

$$\begin{aligned} \lambda_1 s_1 &= 0 \\ \lambda_2 x_1 &= 0 \\ \lambda_3 x_2 &= 0 \\ \lambda_4 x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (١٣)$$

ويوجد ١٦ حلاً لهذا النموذج .

أحد هذه الحلول هو $s_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = x_3 = 0$. بالتعويض بهذه القيم فى (٨) ، (١) ، (٢) ، (٣) والتبسيط ، نحصل على النموذج الخطى

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + \lambda_1 \qquad &= -2 \\ 4x_1 - 10x_2 + 2\lambda_1 \qquad &= 10 \\ -6x_1 + 12x_2 + \lambda_1 + \lambda_4 &= 5 \end{aligned}$$

الذى له الحل الوحيد $x_1 = 2.941,\ x_2 = 0.5294,\ \lambda_1 = 1.764,\ \text{and}\ \lambda_4 = 14.53$. وهذه النتائج مسجلة فى الصف 10 من الجدول ١٢ – ٣ (الأرقام الثقيلة فى الجدول تناظر حلول (١٣) .

كحل آخر لـ (١٣) هو $s_1 = x_1 = x_2 = x_3 = 0.$ ، بالتعويض بهذه القيم فى (٨) ، (١) ، (٢) ، (٣) والتبسيط ، نحصل على النموذج الخطى

$$\begin{aligned} 0 &= 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \qquad &= -2 \\ 2\lambda_1 \qquad + \lambda_3 \qquad &= 10 \\ \lambda_1 \qquad\qquad + \lambda_4 &= 5 \end{aligned}$$

الذى ليس له أى حل ، كما هو مبين فى الصف 16 فى الجدول ١٢ – ٣ . والاحتمالات الأخرى تعامل بالمثل ، وتبين النتائج فى الجدول ١٢ – ٣ .

الصف الوحيد فى الجدول ١٢ – ٣ الذى فيه مدخلات لا سلبية لكل المتغيرات ، كما هو مطلوب لشرط كون ـــ توكر ، هو الصف 10 . والآن .. حيث إن $z = f(X)$ ، و $g_1(X) = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 4$

لها مشتقات أولى جزئية متصلة ، فإن أحد شروط كون ـــ توكر يجب أن تعكس الحل الأمثل لبرنامج التعظيم ، ولكن شروط كون ـــ توكر هنا لها حل وحيد ، وبالتالى $x_1^* = 2.941,\ x_2^* = 0.5294,\ x_3^* = 0$ تعطى $z^* = 3.235$ لبرنامج التصغير الأصلى .

جدول (١٢ – ٣)

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	x_1	x_2	x_3	s_1
0	0	0	0	11.5	−3	−5.5	−4
0	0	0	11	−5	−3	0	−15
0	0	6	0	17.5	0	−5.5	−4
0	0	6	11	1	0	0	−3
0	−1.643	0	0	0	−4.643	−3.036	−16.32
0	2	0	17	0	−1	0	−2
0	−3.5	13	0	0	0	−0.25	−4.25
0	−2	10	5	0	0	0	−4
0.3809	0	0	0	14.36	−2.238	−5.881	0
1.764	0	0	14.53	2.941	0.5294	0	0
−3.2	0	18.8	0	6.3	0	−2.3	0
6	0	−8	11	4	0	0	0
6.623	−8.738	0	0	0	1.507	0.9855	0
15	−25	0	−34	0	2	0	0
85	−63	−208	0	0	0	4	0
...	...	...	...	0	0	0	0

١٢ - ١١ حول البرنامج التالى إلى النموذج (١٢ - ٣) :

تصغير :

$$z = 12x_1^2 + 2.8x_2^2 + 55.2x_3^2 - 5.6x_1x_2$$
$$-5.6x_2x_1 + 23x_1x_3 + 23x_3x_1 - 12x_2x_3 - 12x_3x_2 \quad (١)$$

علماً بأن :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10\,000$$
$$9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \geq 80\,000 \quad (٢)$$

كل المتغيرات لا سلبية

بضرب الدالة الهدفية فى ‎-1‎ ، نحصل على

تعظيم :

$$z = -12x_1^2 - 2.8x_2^2 - 55.2x_3^2 + 5.6x_1x_2$$
$$+5.6x_2x_1 - 23x_1x_3 - 23x_3x_1 + 12x_2x_3 + 12x_3x_2 \quad (٣)$$

وتكون متباينة القيد مكافئة للمتساويتين

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -10\,000 \qquad \text{و} \qquad x_1 + x_2 + x_3 \leq 10\,000$$

ومن ثم فإن مجموعة القيود يمكن أن تعطى فى

$$x_1 + x_2 + x_3 - 10\,000 \leq 0$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + 10\,000 \leq 0 \quad (٤)$$
$$-9x_1 - 7x_2 - 10x_3 + 80\,000 \leq 0$$

الاصطلاحات الرياضية (٣) ، (٤) بإضافة شروط اللاسلبية على المتغيرات تمثل الصيغة القياسية لهذه المسألة .

ويمكن الآن حل المسألة باستخدام شروط كون ـــ توكر (انظر المسألة ١٢ - ٣٣) . وهناك حل آخر يُعطى فى المسألة (١٢ - ١٢) .

١٢ - ١٢ كيف يمكن استخدام مدخل الدالة الجزائية فى حل المسألة ١٢ - ١١ ؟

يمكن أن يتحول القيد الثانى (٢) فى المسألة (١٢ - ١١) إلى مساوية بطرح المتغير الزائد x_4 من الطرف الأيسر . ويمكن بعد ذلك حل النموذج المتكون من (٣) ، (١) ، (٢) بمدخل الدالة الجزائية المعدل ، كما فى المسألة (١٢ - ٩) .

١٢ - ١٣ استخدام طريقة الاتجاهات الممكنة فى

تعظيم : $z = x_1 + x_2$

علماً بأن :

$$x_2x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

كل المتغيرات لا سلبية

ضع (١٢ - ٢) فى الصيغة القياسية ، ويكون البرنامج هو

تعظيم : $z = x_1 + x_2$

علماً بأن :

$$x_2x_1 - 2x_2 - 3 \leq 0$$
$$3x_1 + 2x_2 - 24 \leq 0 \quad (١)$$
$$-x_1 \leq 0$$
$$-x_2 \leq 0$$

وهنا $f(X) = x_1 + x_2,\ g_1(X) = x_2x_1 - 2x_2 - 3,\ g_2(X) = 3x_1 + 2x_2 - 24,\ g_3(X) = -x_1,$ and $g_4(X) = -x_2;$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1} = x_2 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = x_1 - 2$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 3 \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 2$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial x_1} = -1 \qquad \frac{\partial g_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial g_4}{\partial x_2} = -1$$

وأكثر من ذلك $g_1(X)$ تكون غير خطية ، بينما $g_2(X), g_3(X),$ and $g_4(X)$ تكون كلها خطية ؛ لذلك

$$k_1 = 1 \text{ and } k_2 = \ \ k_3 = k_4 = 0$$

فى البرنامج (١٢ – ١٢) .

الخطوة ١ : اختيارياً نعطى **B** قيمة أولية هى $[1, 1]^T$ ، والتى تكون ممكنة .

الخطوة ٢ : عند هذه القيمة لـ **B** يصبح البرنامج (١٢ – ١٢)

تعظيم : $z = d_3$

علماً بأن :

$$\begin{aligned}
-d_1 - d_2 + d_3 &\le 0 \\
d_1 - d_2 + d_3 &\le 4 \\
3d_1 + 2d_2 &\le 19 \\
-d_1 &\le 1 \\
-d_2 &\le 1 \\
d_1 &\le 1 \\
d_2 &\le 1 \\
d_3 &\le 1
\end{aligned}$$

عند

وحله $d_1 = 1,\ d_2 = 0,\ d_3 = 1$

الخطوة ٣ : $d_3 = 1 \ne 0$

الخطوة ٤ : $\mathbf{D} = [1, 0]^T$ حيث إن

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = f(1 + \lambda, 1) = 2 + \lambda$$

والتى تصبح كبيرة عندما تؤول λ إلى ∞ . . وللحفاظ على $[1 + \lambda, 1]^T$ ممكنة ، مع ذلك ، لايمكن أن تظل λ أكبر من 4 إذا تحقق القيد الأول فى البرنامج (١) ، وليست أكبر من 19/3 إذا تحقق القيد الثانى . لذلك $\lambda^* = 4$

الخطوة ٥ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

الخطوة ٢ : بهذه الـ $\mathbb{B}$ المعدلة يصبح البرنامج (١٢ - ١٢) هو

تعظيم $z = d_3$

علماً بأن

$$
\begin{aligned}
-d_1 - d_2 + d_3 &\le 0\\
d_1 + 3d_2 + d_3 &\le 0\\
3d_1 + 2d_2 &\le 7\\
-d_1 &\le 5\\
-d_2 &\le 1\\
d_1 &\le 1\\
d_2 &\le 1\\
d_3 &\le 1
\end{aligned}
$$

عند :

وحله هو $d_1 = 1,\ d_2 = -1/2,\ d_3 = 1/2.$

الخطوة ٣ : $d_3 = 1/2 \neq 0.$

الخطوة ٤ : $\mathbb{D} = [1, -\frac{1}{2}]^T$ إذاً .

$$f\left(\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right) = f(5+\lambda, 1-\tfrac{1}{2}\lambda) = 6 + \tfrac{1}{2}\lambda$$

والتى تصبح كبيرة عندما تؤول λ إلى ∞ . وللحفاظ على $[5+\lambda, 1-\frac{1}{2}\lambda]^T$ ممكنة ، مع ذلك ، λ لايمكن أن تكون أكبر من 3.5 إذا تحقق القيد الثانى فى البرنامج (١) ، وليست أكبر من 2 إذا تحقق قيد اللاسلبية فى x_2 (ويتحقق القيدان الآخران فى البرنامج (١) لأى اختيار لا سلبى لـ λ لذلك

$$\lambda^* = 2.$$

الخطوة ٥ :

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}$$

جدول ١٢ - ٤

x_1	x_2	d_1	d_2	d_3	λ^*
1	1	1	0	1	4
5	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
7	0	1	0	1	1
8	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0.531373
7.64575	0.531373	0	0	0	...

بالاستمرار فى هذه الطريقة نكمل الجدول ١٢ - ٤ . ويتبع ذلك أن $x_2^* = 0.531373$. $x_1^* = 7.64575$.

عند $z^* = f(x_1^*, x_2^*) = 7.64575 + 0.531373 = 8.17712$

١٢ - ١٤ بين أن الحل المعطى فى المسألة ١٢ - ١٣ ليس أمثل .

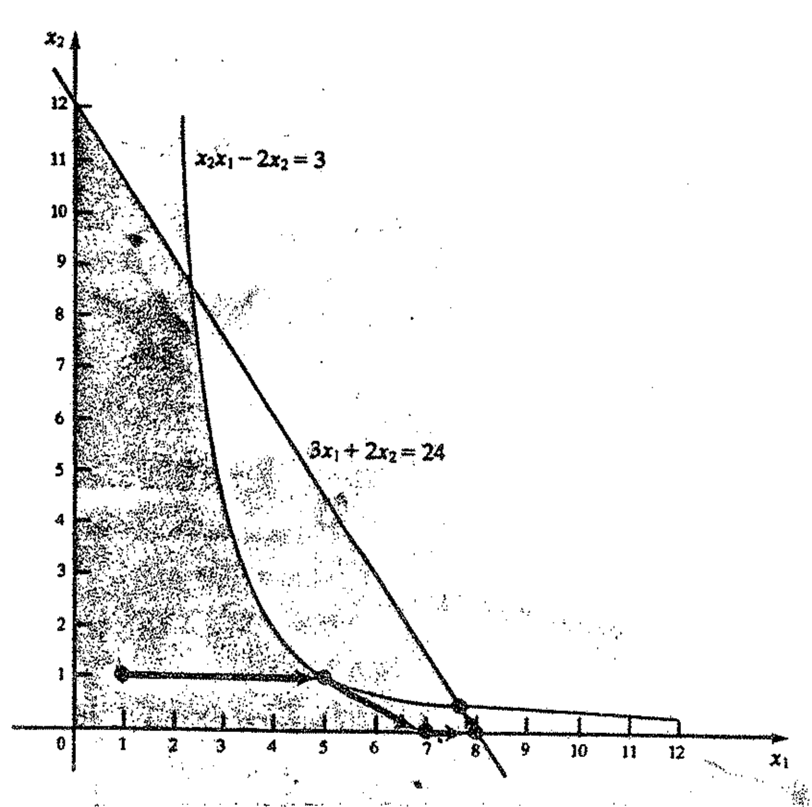
يمكن كتابة القيد الثانى للبرنامج الأصلى كما يلى

$$z \le 12 - \frac{x_1}{2}$$

والذى يبين أنه إذا كانت $x_1 > 0$ ، فإن $z < 12$. ومن ناحية أخرى .. إذا كانت $x_1 = 0$، فإن $z = x_2 \leq 12$.
ويتبع ذلك أن الحد الأعلى الشامل هو $z^* = 12$، والمفترض عند $x_1^* = 0,\ x_2^* = 12$، والحل الذى حصلنا عليه فى المسألة ١٢ – ١٣ هو حد أعلى محلى مقيد ؛ وتكون طريقة الاتجاهات الممكنة قد خصصت الحد الأعلى الشامل باختيار B مبدئياً قريبة من $[0, 12]^T$.

١٢ – ١٥ ترجم بالرسم طريقة الاتجاهات الممكنة

تنتج طريقة الاتجاهات الممكنة اتجاهاً D يمكن التحرك عليه من B ، أفضل تقريب حالى لـ X^* لتحقيق قيمة أفضل للدالة الهدفية . وهذا التحرك ممكن فقط إذا كانت $d_{n+1} \neq 0$ ، وبالتالى λ^* تمثل أكبر حجم خطوة يمكن أخذه . ويوضح شكل ١٢ – ٢ طريقة الحل للحسابات فى المسألة ١٢ – ١٣



ضع البرامج ١٢ – ١٦ حتى ١٢ – ٢٠ فى الصيغة القياسية

مسائل مكملة

Supplementary Problems

١٢ – ١٦ تعظيم $z = x_1^4 e^{-0.01(x_1x_2)^2}$

علماً بأن $2x_1^2 + x_2^2 = 10$

١٢ – ١٧ تعظيم $z = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$

علماً بأن $x_1^2 + x_2^2 = 4$

١٢ - ١٨ تعظيم $z = 6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$

علماً بأن $x_1 + x_2 \leq 2$

كل المتغيرات لا سلبية

١٢ - ١٩ تصغير $z = 24x_1^2 + 14x_2^2 + 46x_3^2 - 28x_1x_2 - 24x_1x_3 + 34x_2x_3$

علماً بأن

$$11x_1 + 9x_2 + 12x_3 \geq 1000$$
$$x_2 + x_3 = 40$$

كل المتغيرات لا سلبية

١٢ - ٢٠ تعظيم $z = 3x_1x_3 + 4x_2x_3$

علماً بأن

$$x_2^2 + x_3^2 = 4$$
$$x_1x_3 = 3$$

كل المتغيرات لا سلبية

حل المسائل ١٢ - ٢١ حتى ١٢ - ٢٣ حسابياً بمضروبات لاجرانج ، وعددياً إما بطريقة نيوتن ـــ رافسون ، أو بطريقة الدالة الجزائية .

١٢ - ٢١ المسألة ١٢ - ١٧

١٢ - ٢٢ تصغير $z = x_1x_2 + x_3$

علماً بأن $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

١٢ - ٢٣ تعظيم $z = x_1^2 + x_2x_3$

علماً بأن

$$4x_1^2 + x_2^2 = 16$$
$$2x_2 + 3x_3 = 25$$

١٢ - ٢٤ أوجد النقطة على القطع المكافىء $y^2 = 4x$ الأقرب ما تكون إلى النقطة $(1,0)$.

١٢ - ٢٥ استخدم مضروبات لاجرانج لحل المسألة ١٢ - ٢٠ بدون شرط اللاسلبية . وبناءً على النتيجة .. حل المسألة مع وجود شرط اللاسلبية .

١٢ - ٢٦ حل المسألة ١٢ - ١٦

١٢ - ٢٧ تصغير $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

علماً بأن

$$x_1x_2x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

١٢ - ٢٨ حل المسألة ١٢ - ٢٧ بإضافة قيد أن كل المتغيرات أعداد صحيحة .

١٢ - ٢٩ تعظيم $z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3$

علماً بأن

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$$
$$8x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 56$$

كل المتغيرات لا سلبية

١٢ – ٣٠ تصغير $z = x_1^6 x_2^2 + x_1^4 x_3^2 + 1$

علماً بأن $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$

$x_1 x_3 = 19$

١٢ – ٣١ حل المسألة ١٢ – ١٨

١٢ – ٣٢ حل المسألة ١٢ – ١٩

١٢ – ٣٣ استخدم طريقة كون ـــ توكر فى حل البرنامج المعطى فى المسألة ١٢ – ١١
حل المسائل ١٢ – ٣٤ و ١٢ – ٣٥ بمدخل الدالة الجزائية .

١٢ – ٣٤ تصغير $z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

علماً بأن $x_1 - 2x_2 = -1$

$x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4$

١٢ – ٣٥ تعظيم $z = \ln(1 + x_1) + 2\ln(1 + x_2)$

علماً بأن $x_1 + x_2 \leq 2$

كل المتغيرات لا سلبية

(ملحوظة : بسط المسألة بتعظيم e^z ، وجعل القيد متساو)

١٢ – ٣٦ تصغير $z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$

علماً بأن $x_1 + 2x_2 \leq 3$

$8x_1 + 5x_2 \geq 10$

عند x_2 و x_1 لاسلبية

١٢ – ٣٧ تعظيم $z = x_1 + 3x_2$

علماً بأن $x_1 x_2 \geq 3$

$x_1^2 + x_2^2 \leq 9$

x_2 و x_1 لا سلبية

الفصل الثالث عشر

البرمجة التربيعية .
Quadratic Programming

الصيغة القياسية STANDARD FORM

البرنامج التربيعى العام للتعظيم له المصفوفة ذات الصيغة

$$\text{تعظيم}: \quad z = X^T C X + D^T X$$
$$\text{علماً بأن}: \quad AX \leq B \qquad (13-1)$$
$$\text{عند} \quad X \geq 0$$

والذى فيه المصفوفة المتماثلة C سلبية ونصف مؤكدة (انظر الفصل ١١)

وشرط C الذى لم يكن موجوداً فى التعريف الأصلى للبرنامج التربيعى (فصل ١) يجعل z دالة محدبة (من المسألة ١١ — ٢٤) ، وذلك يضمن أن أى حد أعلى محلى فى المنطقة الممكنة المقعرة سيكون حداً أعلى شاملاً فى هذه المنطقة . وتفرض شروط اللاسلبية ، غير الموجودة فى الفصل ١ ، لمساعدة خطوات الحل ، وإذا لم توجد أصلاً ، فإنهم يمكن دائماً أن يتأثروا بالطريقة العادية بالتعبير عن المتغيرات اللاسلبية . ومع ذلك لاحظ أن هذا التعويض سيحول المصفوفة الأصلية السلبية المؤكدة إلى مصفوفة سلبية نصف مؤكدة فقط .

وتحل البرامج التربيعية للتصغير بتحويلها إلى برامج تعظيم من الصيغة القياسية (انظر المسألة ١٣ — ١)

نظام كون — توكر A KUHN-TUCKER SYSTEM

ينتج من تطبيق شروط كون — توكر (انظر الفصل ١٢) على البرنامج (١٣ — ١) أن الحل الأمثل لهذا البرنامج ، إذا تواجد ، يجب أن يحقق معادلة المصفوفة الجديدة

$$\hat{A}Y = \hat{B} \qquad (13-2)$$

حيث إن

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & I_1 & 0_1 & 0_2 \\ -2C & 0_3 & -I_2 & A^T \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} X \\ S \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

إذا كانت A من الدرجة $m \times n$ (أى أنه إذا كانت (١٣ — ١) تتضمن m متساويات فى n متغير $x_1, x_2, \ldots, x_n$) فإن I_1 ، I_2 تكون متغيرات أحادية من الدرجة $m \times m$ and $n \times n$, على التوالى ؛ $0_1, 0_2$, and 0_3 تكون مصفوفات صفرية من الدرجة $m \times n$, $n \times m$, and $n \times m$ على التوالى ؛ S تكون متجهاً ذا بعد m للمتغيرات المساعدة U ، V يكونان متجهين من مضروبات لاجرانج لهما n and m عنصر على التوالى (انظر المسألة ١٣ — ٨) .

تتطلب شروط كون — توكر أيضاً أن الحل الأمثل لـ (١٣ — ١) يحقق المعادلة

$$\tilde{Y}^T Y = 0 \quad \text{أو} \quad U^T X + V^T S = 0 \qquad (13-3)$$

حيث إن

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ X \\ S \end{bmatrix}$$

وأخيراً تتطلب شروط كون ــ توكر أن كل المتغيرات تكون لا سلبية ، بمعنى $Y \geq 0$.

طريقة فرانك وولف THE METHOD OF FRANK AND WOLFE

هذه الطريقة لها ثماني خطوات لحل (١٣ - ٢) ، (١٣ - ٣) ، مبنية على طريقة السمبلكس ، والتي تحافظ أوتوماتيكياً على كل المتغيرات لا سلبية . وتحدد المتجهات الجديدة P and Y_e (متجه Y الحالي) ثم تعدل بنسق حتى تحتوى Y_e على الحل الأمثل .

لاستخدام طريقة السمبلكس يجب أن تكون $\hat{B}$ لا سلبية ، ولذلك إذا كان أحد عناصر $\hat{B}$ سلبياً ، فيجب أن تضرب معادلة القيد المناظرة فى 1- .

الخطوة ١ : حدد الحل الأساسى الممكن لـ (١٣ - ٢) ، وأطلق عليه Y_e and P ، ويمكن أن يوجد هذا الحل بإضافة متغير صناعى لكل معادلة قيد ، ثم تطبيق الطريقة ذات المرحلتين لتصغير مجموع هذه المتغيرات الصناعية عدد M من المرات ، حيث تمثل M تكلفة جزائية موجبة كبيرة جداً . وإذا لم يمكن الحصول على حل مبدئى خالٍ من المتغيرات الصناعية ، فإن البرنامج التربيعى الأصلى لا يكون له حل .

الخطوة ٢ : أوجد قيمة $\theta = \bar{P}^T Y_e$ إذا كانت $\theta = 0$ ، فإن X^* تكون أول عنصر n فى Y_e ، ويحل البرنامج بعد ذلك . وإذا كانت $\theta \neq 0$ ، فاذهب إلى الخطوة ٣

الخطوة ٣ : استخدام الهدف الحالى

$$z = -\bar{P}^T Y \quad \text{تعظيم}$$

طبق محاولة واحدة لطريقة السمبلكس على هذا الهدف متصلاً بالمجموعة الحالية للمتغيرات الأساسية وجدول القيد الذى يحدد هذه المتغيرات . وأطلق على هذا الحل المعدل Y_e

الخطوة ٤ : أوجد قيمة $\theta_e = \bar{Y}_e^T Y_e$ إذا كانت $\theta_e = 0$ ، فإن X^* تكون العناصر n الأولى فى Y_e ، ويمكن حل البرنامج . إذا كانت $\theta_e \neq 0$, فاذهب إلى الخطوة ٥ .

الخطوة ٥ : أوجد قيمة $\bar{P}^T Y_e$. إذا كانت $\bar{P}^T Y_e \leq \frac{1}{2}\theta$, ، فاذهب إلى الخطوة ٦ ، وإذا لم تكن كذلك ، فَعُدْ إلى الخطوة ٣ ، ونفذ محاولة أخرى لطريقة السمبلكس .

الخطوة ٦ : أوجد قيمة

$$\alpha = \frac{\bar{P}^T(P - Y_e)}{(\bar{P} - \bar{Y}_e)^T(P - Y_e)}$$

إذا كانت $\alpha \geq 1$, ، فاذهب إلى الخطوة ٧ ، وإذا كانت $\alpha < 1$, ، فاذهب إلى الخطوة ٨ .

الخطوة ٧ : ضع $P = Y_e$, $\theta = \theta_e$ ، وعُدْ إلى الخطوة ٣ .

الخطوة ٨ : احسب المتجه $P - \alpha(P - Y_e)$. أطلق على هذا المتجه المعدل P وعُدْ إلى الخطوة ٢ .

إذا أريد توزيع مبلغ ثابت من المال F، بين عدد n من الاستثمارات المختلفة، وكل منها له تاريخ معروف من العائد. ومشكلة محفظه الورق هي تحديد كَمّ النقود الذى يجب أن يخصص لكل استثمار، بحيث يكون العائد الكلى المتوقع أكبر من أو يساوى أقل كمية مقبولة L، وبحيث يكون الاختلاف الكلى فى المدفوعات المستقبلية أقل ما يمكن.

دع x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ تمثل كمية الإنفاق المخصص للاستثمار i، ودع x_{ik} تمثل العائد بالدولار للاستثمار i، فى الفترة الزمنية k فى الماضى $(k = 1, 2, \ldots, p)$. وإذا دلت المدفوعات السابقة على الأداء المستقبلى، فإن العائد المستقبلى للدولار من الاستثمار i يكون

$$E_i = \frac{\sum_{k=1}^{p} x_{ik}}{p} \qquad (١٣ - ٤)$$

ويكون العائد المتوقع من كل الاستثمارات مجتمعه هو

$$E = E_1x_1 + E_2x_2 + \cdots + E_nx_n \qquad (١٣ - ٥)$$

وكمقياس للاختلاف الكلى فى المدفوعات المستقبلية، مبنى على أساس العائد فى الماضى، فإننا نختار الكمية

$$z = \frac{\sum_{k=1}^{p} (x_{1k}x_1 + x_{2k}x_2 + \cdots + x_{nk}x_n - E)^2}{p} \qquad (١٣ - ٦)$$

بمعنى المتوسط خلال المدة الزمنية المنقضية p لمربعات الانحرافات بين العائد الكلى من تخصيص $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، وقيمة العائد الكلى المتوقع (بلغة الإحصاء تسمى الكمية (١٣ - ٦) التباين للعائد الكلى، ويمكن تسميتها σ^2) بتعويض (١٣ - ٥) فى (١٣ - ٦)، وإعادة الترتيب، فإنه يمكننا التبسيط كما يلى.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}[(x_{1k} - E_1)x_1 + (x_{2k} - E_2)x_2 + \cdots + (x_{nk} - E_n)x_n]^2 \\ &= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ik} - E_i)(x_{jk} - E_j)x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2 x_ix_j \end{aligned} \qquad (١٣ - ٧)$$

وفيها يكون التباين المشترك

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}(x_{ik} - E_i)(x_{jk} - E_j) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}x_{ik}x_{jk} - \frac{1}{p^2}\left(\sum_{k=1}^{p}x_{ik}\right)\left(\sum_{k=1}^{p}x_{jk}\right) \qquad (١٣ - ٨)$$

من (١٣ - ٦) يظهر أن z، كمجموع مربعات، تكون سلبية لكل قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$، وهذا يعنى أن المصفوفة المتماثلة $\mathbf{C} = [\sigma_{ij}^2]$ فى (١٣ - ٧)، مصفوفة التباين المشترك، تكون موجبة نصف مؤكدة.

ولذلك يمكن وضع نموذج مشكلة محفظة الورق فى صورة البرنامج التربيعى

$$\begin{aligned} &\text{تصغير :} \quad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2 x_ix_j = \mathbf{X}^T\mathbf{C}\mathbf{X} \\ &\text{علماً بأن :} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = F \\ &\qquad E_1x_1 + E_2x_2 + \cdots + E_nx_n \geq L \end{aligned} \qquad (١٣ - ٩)$$

كل المتغيرات لا سلبية

ستكون (١٣ - ٩) غير ممكنة إذا كانت L عالية بدرجة كبيرة.

مسائل محلولة

Solved Problems

١٣ – ١ ضع البرنامج التالى فى الصيغة القياسية

تصغير : $z = x_1^2 + \text{[illegible]} + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 + 5x_3$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$

كل المتغيرات لا سلبية

كما هو ظاهر فى المسألة ١٢ – ١٠ هذا البرنامج يكون مكافئاً لـ :

تصغير : $z = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 5x_3$

علماً بأن : $-x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -4$

كل المتغيرات لا سلبية

أو فى صورة المصفوفة :

تعظيم :

$$z = [x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [2, -10, -5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (١)$$

علماً بأن :

$$[-1, -2, -1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq -4$$

عند $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

يكون البرنامج (١) فى الصورة القياسية عند

$$\mathbf{A} = [-1, -2, -1] \qquad \mathbf{B} = [-4] \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \\ -3 & 6 & -10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad (٢)$$

وتكون المصفوفة $\mathbf{C}$ سلبية ، نصف مؤكدة ، كما هو المطلوب ، وحقيقة ، فإنها سلبية مؤكدة (انظر نظرية ١١ – ١)

١٣ – ٢ حدد نموذج كون ـــ توكر للبرنامج القياسى فى المسألة ١٣ – ١

تصبح المصفوفات المحددة فى (٢) فى المسألة ١٣ – ١ وهى (١٣ – ٢)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -4 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 10 & -12 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & -12 & 20 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -10 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad (١)$$

وتصبح (١٣ ــ ٢)

$$[u_1, u_2, u_3, v_1, x_1, x_2, x_3, s_1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (٢)$$

وتكون المعادلات (١) ، (٢) بالاشتراك مع شرط أن كل المتغيرات لا سلبية تكون نموذج كون ـــ توكر .

١٣ - ٣ حل البرنامج المعطى فى المسألة ١٣ - ١

يقع الحل الأمثل لهذا البرنامج ضمن الحل المرتبط بنموذج كون ـــ توكر ، وهذا النموذج حصلنا عليه فى المسألة ١٣ - ٢ ، ونحل نموذج كون ـــ توكر بطريقة فرانك ، وولف

كخطوة أولى ، نتحقق ما إذا كانت $\hat{\mathbf{B}}$ لا سلبية . وحيث إنها ليست كذلك ، نضرب معادلات القيود الأول ، الثالث ، الرابع فى (١) من المسألة ١٣ - ٢ فى -1 ونحصل على

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 & & = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 & - u_1 \qquad\qquad - v_1 & = 2 \\ 4x_1 - 10x_2 + 12x_3 & + u_2 \qquad + 2v_1 & = 10 \\ -6x_1 + 12x_2 - 20x_3 & + u_3 + v_1 & = 5 \end{array}$$

الخطوة ١ : لايجاد حل أساسى ممكن لمجموعة المعادلات السابقة ، فإننا ندخل متغير صناعى فى كل معادلة ، ثم نقلل مجموع هذه المتغيرات الصناعية عدد M من المرات . وبالتبادل نرى أن u_2 and u_3 يمكن أن يستخدما كمتغيرات أساسية لحل المعادلتين الأخيرتين $(u_2 = 10 \text{ and } u_3 = 5)$، بحيث نحتاج إلى إضافة w_1 and w_2 إلى المعادلتين الأوليين فقط على التوالى . بعمل ذلك ، وتصغير $Mw_1 + Mw_2$ باستخدام الطريقة ذات المرحلتين ، نوجد الجداول رقم ١ ، ٢ ، ٣ . (تقرب كل الحسابات إلى أربعة أعداد صحيحة ؛ وتوضح عناصر المحور بنجوم) . ويمكن قراءة الحل المبدئى من الجدول ٣ مثل .

$$[0, 1.375, 1.25, 0, 0, 8.75, 13.5, 0]^T$$

والذى نطلق عليه كلًا من $\mathbf{Y}_0$ و $\mathbf{P}$

جدول (١)

		x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	w_1	w_2	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	M	
w_1	M	1	2	1	−1	0	0	0	0	1	0	4
w_2	M	2	−4	6*	0	−1	0	0	−1	0	1	2
u_2	0	4	−10	12	0	0	1	0	2	0	0	10
u_3	0	−6	12	−20	0	0	0	1	1	0	0	5
$(c_j - z_j)$:		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		−3	2	−7	1	1	0	0	1	0	0	−6

جدول (٢)

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	w_1	
w_1	0.6667	2.667*	0	−1	0.1667	0	0	0.1667	0	3.667
x_3	0.3333	−0.6667	1	0	−0.1667	0	0	−0.1667	0	0.3333
u_2	0	−2	0	0	2	1	0	4	1	6
u_3	0.6660	−1.334	0	0	−3.334	0	1	−2.334	0	11.67
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	−0.6669	−2.667	0	1	−0.1669	0	0	−0.1669	0	−3.667

جدول (٣)

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
x_2	0.2500	1	0	−0.3750	0.06250	0	0	0.06250	1.375
x_3	0.5000	0	1	−0.2500	−0.1250	0	0	−0.1250	1.250
u_2	0.5000	0	0	−0.7500	2.125	1	0	4.125	8.750
u_3	0.9995	0	0	−0.5003	−3.251	0	1	−2.251	13.50
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

الخطوة ٢ :

$$\theta = \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{Y}_c = [0, 8.75, 13.5, 0, 0, 1.375, 1.25, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1.375 \\ 1.25 \\ 0 \\ 0 \\ 8.75 \\ 13.5 \\ 0 \end{bmatrix} = 57.81 \neq 0$$

الخطوة ٣ : يكون الهدف الجديد هو تعظيم

$$z = -\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{Y} = -[0, 8.75, 13.5, 0, 0, 1.375, 1.25, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

$$= -0x_1 - 8.75x_2 - 13.5x_3 - 0s_1 - 0u_1 - 1.375u_2 - 1.25u_3 - 0v_1$$

بتجميع هذه الدالة الهدفية مع معادلات القيود والمتغيرات الأساسية المعطاه فى الجدول ٣ ، نوجد الجدول ٤ . وتؤدى محاولة واحدة لطريقة السمبلكس إلى الجدول ٥ ، ومنه نقرأ الحل .

$$[2.5, 0.75, 0, 0, 0, 7.5, 11, 0]^T$$

ويصبح هذا المتجه هو $\mathbf{Y}_c$ المعدل

الخطوة ٤ :

$$\theta_c = \bar{\mathbf{Y}}_c^T \mathbf{Y}_c = [0, 7.5, 11, 0, 2.5, 0.75, 0, 0] \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} = 11.25 \neq 0$$

جدول ٤

		x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
		0	−8.75	−13.50	0	0	−1.375	−1.250	0	
x_2	−8.75	0.2500	1	0	−0.3750	0.06250	0	0	0.06250	1.375
x_3	−13.50	0.5000*	0	1	−0.2500	−0.1250	0	0	−0.1250	1.250
u_2	−1.375	0.5000	0	0	−0.7500	2.125	1	0	4.125	8.750
u_3	−1.250	0.9995	0	0	−0.5003	−3.251	0	1	−2.251	13.50
$(z_j - c_j)$:		−10.87	0	0	8.313	2.283	0	0	−1.718	−57.81

جدول ٥

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
x_2	0	1	−0.5000	−0.2500	0.1250	0	0	0.1250	0.7500
x_1	1	0	2.000	−0.5000	−0.2500	0	0	−0.2500	2.500
u_2	0	0	−1.000	−0.5000	2.250	1	0	4.250*	7.500
u_3	0	0	−1.999	0.0006	−3.001	0	1	−2.001	11.00
	0	0	21.74	2.878	−0.4345	0	0	−4.436	−30.64

جدول ٦

	x_1	x_2	x_3	s_1	u_1	u_2	u_3	v_1	
x_2	0	1	−0.4706	−0.2353	0.05883	−0.02941	0	0	0.5294
x_1	1	0	1.941	−0.5294	−0.1177	0.05883	0	0	2.941
v_1	0	0	−0.2353	−0.1176	0.5294	0.2353	0	1	1.765
u_3	0	0	−2.470	−0.2347	−1.942	0.4708	1	0	14.53
	0	0	20.70	2.356	1.914	1.044	0	0	−22.81

الخطوة ٥ :

$$\bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{Y}_c = [0, 8.75, 13.5, 0, 0, 1.375, 1.25, 0] \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.75 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} = 30.63$$

الذي لا يقل عن ولا يساوى

$$\tfrac{1}{2}\theta = \tfrac{1}{2}(57.81) = 28.91$$

الخطوة ٣ : حيث إن $\mathbf{P}$ لم تعدل بعد ، يبقى الهدف دون تغير ، ويبقى جدول العائد هو الجدول ٥ . وبتطبيق طريقة السمبلكس مرة واحدة على هذا الجدول نحصل على الجدول ٦ . ويصبح الحل الناتج من الجدول ٦ هو $\mathbf{Y}_c$، المعدل ، وبالتحديد :

$$\mathbf{Y}_c = [2.941, 0.5294, 0, 0, 0, 0, 14.53, 1.765]^T$$

الخطوة ٤ :

$$\theta_c = \bar{Y}_c^T Y_c = [0, 0, 14.53, 1.765, 2.941, 0.5294, 0, 0] \begin{bmatrix} 2.941 \\ 0.5294 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14.53 \\ 1.765 \end{bmatrix} = 0$$

لذلك تكوّن العناصر الثلاثة الأولى من Y_c الحل الأمثل لبرنامج التصغير الأصلى ، بمعنى $x_3^* = 0$, و $x_1^* = 2.941, x_2^* = 0.5294$, عند $z^* = 3.235$. قارن بالحل الناتج فى المسألة ١٢ — ١٠ .

١٣ — ٤ حدد مصفوفة التباين المشترك لبيانات الجدول ١٣ — ١ التى تمثل العائد (بالسنت) لكل دولار مستثمر

	السنوات					
	1	2	3	4	5	6
الاستثمار 1	0	20	0	20	0	20
الاستثمار 2	0	0	30	0	0	30

لتطبيق (١٣ — ٨) فإنه من المناسب إعادة جدولة البيانات كما فى الجدول ١٣ — ٢

الجدول ١٣ — ٢

k	x_{1k}	x_{2k}	x_{1k}^2	x_{2k}^2	$x_{1k}x_{2k}$
1	0	0	0	0	0
2	20	0	400	0	0
3	0	30	0	900	0
4	20	0	400	0	0
5	0	0	0	0	0
6	20	30	400	900	600
المجموع	60	60	1200	1800	600

فإن

$$\sigma_{11}^2 = \frac{1200}{6} - \frac{(60)^2}{36} = 100 \qquad \sigma_{22}^2 = \frac{1800}{6} - \frac{(60)^2}{36} = 200$$

$$\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \frac{600}{6} - \frac{(60)^2}{36} = 0$$

وتكون مصفوفة التباين المشترك هى

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}$$

١٣ - ٥ حدد مصفوفة التباين المشترك لبيانات الجدول ١٣ - ٣ ، والتى تمثل العائد (سنت) لكل دولار مستثمر .

الجدول ١٣ - ٣

	السنوات				
	1	2	3	4	5
الاستثمار 1	10	4	12	13	6
الاستثمار 2	6	9	6	5	9
الاستثمار 3	17	1	11	19	2

استمر كما فى المسألة ١٣ - ٤

k	x_{1k}	x_{2k}	x_{3k}	x_{1k}^2	x_{2k}^2	x_{3k}^2	$x_{1k}x_{2k}$	$x_{1k}x_{3k}$	$x_{2k}x_{3k}$
1	10	6	17	100	36	289	60	170	102
2	4	9	1	16	81	1	36	4	9
3	12	6	11	144	36	121	72	132	66
4	13	5	19	169	25	361	65	247	95
5	6	9	2	36	81	4	54	12	18
المجموع	45	35	50	465	259	776	287	565	290

من الجدول ١٣ - ٤

$$\sigma_{11}^2 = \frac{465}{5} - \frac{(45)^2}{25} = 12 \qquad \sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \frac{287}{5} - \frac{(45)(35)}{25} = -5.6$$

$$\sigma_{22}^2 = \frac{259}{5} - \frac{(35)^2}{25} = 2.8 \qquad \sigma_{13}^2 = \sigma_{31}^2 = \frac{565}{5} - \frac{(45)(50)}{25} = 23$$

$$\sigma_{33}^2 = \frac{776}{5} - \frac{(50)^2}{25} = 55.2 \qquad \sigma_{23}^2 = \sigma_{32}^2 = \frac{290}{5} - \frac{(35)(50)}{25} = -12$$

لذلك

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12 & -5.6 & 23 \\ -5.6 & 2.8 & -12 \\ 23 & -12 & 55.2 \end{bmatrix}$$

١٣ - ٦ يمتلك أحد الأفراد 10000 دولاراً للاستثمار ، وقد حدد ثلاثة بدائل نقدية كفرص استثمار جذابة . فى السنوات الخمس السابقة كانت المدفوعات كما هو موضح فى الجدول ١٣ - ٣ (سنت لكل دولار مستثمر) ويفترض هذا الفرد أن هذه المدفوعات هى دلالة على ما يتوقع مستقبلاً . ولهذا الفرد شرطان . (١) يجب ألا يقل العائد المشترك السنوى للاستثمارات عن 800 دولار (تحقق الكمية 1000 دولار عائد 8 فى المائة) (٢) يجب أن يكون الاختلاف السنوى فى المدفوعات فى المستقبل أصغر ما يمكن . كم يجب أن يستثمره هذا الفرد فى كل مشروع حتى يحقق هذين الشرطين ؟

توجد فترات زمنية $p = 5$ يمكن تقسيم البيانات بها ؛ من (١٣ - ٤) أو الجدول ١٣ - ٤

$$E_1 = \frac{45}{5} = 9\ ¢/\$ \qquad E_2 = \frac{35}{5} = 7\ ¢/\$ \qquad E_3 = \frac{50}{5} = 10\ ¢/\$$$

وهنا $F = \$10\,000$ دولار ، $L = \$800 = 80\,000¢$, سنت ، بحيث تصبح القيود فى ١٣ - ٩

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10\,000$$
$$9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \geq 80\,000$$

باستخدام التباينات المشتركة فى المسألة ١٣ – ٥ نحصل على الهدف

تصغير :

$$z = 12x_1^2 + 2.8x_2^2 + 55.2x_3^2 - 5.6x_1x_2$$
$$+ 23x_1x_3 - 5.6x_2x_1 - 12x_2x_3 + 23x_3x_1 - 12x_3x_2 \qquad (٢)$$

بإضافة شروط اللاسلبية فى النموذجين (١) ، (٢) نكون البرنامج التربيعى الذى وضع فى الصيغة القياسية فى المسألة ١٢ – ١١ ، ويكون حله مباشرة سواء بطريقة فرانك ــ وولف أو من شروط كون ــ توكر (المسألة ١٢ – ٣٣) هو $x_1^* = x_2^* = \$5000$ $x_3^* = 0.$ دولار ، وبالتالى يجب أن يقسم هذا الفرد أمواله بالتساوى بين الفرصتين الأولى والثانية ، ولا ينفق على الفرصة الثالثة مطلقاً .

١٣ – ٧ يقدم أحد المستشارين الماليين توصيته إلى أحد الزبائن يمتلك 15000 دولار فى مجالين استثماريين ، يحقق أحد الاستثمارين عائداً قدره 20 فى المئة كل ثانى سنة ، بينما يحقق الثانى 30 فى المئة كل ثالث سنة . حدد أحسن خليط استثمار إذا كان الشرط الوحيد لهذا المستثمر هو أن يكون الاختلاف فى العائد المشترك المتوقع السنوى أقل ما يمكن .

البيانات المناسبة لكل استثمار موضحه فى الجدول ١٣ – ١ . لهذه البيانات

$$E_1 = E_2 = \frac{60}{6} = 10 \text{ ¢/\$} \qquad \text{سنت/ دولار}$$

لذلك ، فإن العائد الكلى المتوقع هو

$$E = E_1x_1 + E_2x_2 = 10(x_1 + x_2) = 10(15\,000) = 150\,000¢$$

بصرف النظر عن خليط الاستثمار ، لذلك فإن الشرط الوحيد للمسألة هو

$$x_1 + x_2 = 15\,000 \qquad (١)$$

وبالنظر إلى التباينات المحسوبة فى المسألة ١٣ – ٤ ، يكون الهدف هو

تصغير :

$$z = 100x_1^2 + 200x_2^2 \qquad (٢)$$

وعندنا أيضا الشروط الإضافية

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (٣)$$

يمكن حل البرنامج التربيعى (١) ، (٢) ، (٣) بسهولة (بالرسم أو باستخدام شروط كون ــ توكر) ، ويؤدى إلى $x_1^* = \$10\,000,\ x_2^* = \$5000,$ دولار ، عند $z^* = 1.5 \times 10^{10}$ [وحدات (سنت)^2]

١٣ – ٨ تحقق من أن شروط كون ــ توكر للبرنامج المعطى فى المسألة ١٣ – ١ هى من الصيغة (١٣ – ٢) ، (١٣ – ٣) .

اشتقت شروط كون ــ توكر لهذا البرنامج فى المسألة ١٢ – ١٠ ، وبالأخص فى (٨) ، (١) حتى (٣) ، (١٣) . بوضع $s_1 = x_4^2,\ v_1 = \lambda_1,\ u_1 = \lambda_2,\ u_2 = \lambda_3,\ u_3 = \lambda_4,$ ، وإعادة الترتيب يمكن كتابة هذه المعادلات كما يلى :

$$\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 - x_3 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= -4 \\
2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \quad - u_1 \qquad\qquad - v_1 &= 2 \\
-4x_1 + 10x_2 - 12x_3 \qquad - u_2 \qquad - 2v_1 &= -10 \\
6x_1 - 12x_2 + 20x_3 \qquad\qquad - u_3 - v_1 &= -5
\end{aligned}$$

$$v_1s_1 = 0$$
$$u_1x_1 = 0$$
$$u_2x_2 = 0$$
$$u_3x_3 = 0$$

وتكون المجموعة الأولى من المعادلات بالتحديد (١٣ – ٢) كما هو مبين فى (١) من المسألة ١٣ – ٢ . ويمكن ضم المجموعة الثانية من المعادلات فى المعادلة

$$v_1 s_1 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

والتى تكون لها الصيغة (١٣ – ٣) كما هو موضح فى (٢) من المسألة ١٣ – ٢ . ولاحظ أن حل هذه المعادلة يكون مكافئاً لحل الأربع معادلات التى جاءت منها ، حيث يشترط أن تكون كل المتغيرات لا سلبية .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

١٣ – ٩ ضع البرنامج التالى فى الصيغة القياسية

تصغير : $z = 24x_1^2 + 14x_2^2 + 46x_3^2 - 28x_1x_2 - 24x_1x_3 + 34x_2x_3$

علماً بأن

$$11x_1 + 9x_2 + 12x_3 \geq 1000$$
$$x_2 + x_3 = 40$$

كل المتغيرات لا سلبية

١٣ – ١٠ حدد نظام كون ــ توكر للبرنامج القياسى للمسألة ١٣ – ٩

استخدم طريقة فرانك ــ وولف لحل المسائل ١٣ – ١١ ، ١٣ – ١٢ ، ١٣ – ١٣ ، وتحقق من إجابتك للمسألة ١٣ – ١٢ بواسطة الرسم .

١٣ – ١١ المسألة ١٣ – ٩

١٣ – ١٢ تعظيم : $z = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 + 4x_2$

علماً بأن :

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

عند x_1 and x_2 لا سلبية

١٣ – ١٣ تعظيم : $z = 10x_1^2 + 20x_2^2 + 30x_3^2 + 10x_1x_2 - 8x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_1 + 2x_2 - x_3$

علماً بأن : $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$

عند كل المتغيرات لا سلبية

١٣ – ١٤ تحتاج إحدى المؤسسات إلى ٦ مليون دولار تمويل إحدى عمليات التصنيع الجديدة ، وقد وافق ثلاثة بنوك على تمويل كل أو جزء من هذه الكمية . وبالرغم من اشتراط كل بنك على سداد الديون وفوائدها خلال ست سنوات ، فإن جدول السداد يختلف من بنك لآخر كما فى الجدول ١٣ – ٥

الجدول ١٣ – ٥

	النسبة من الأصل التى تدفع كل سنة					
	السنة 1	السنة 2	السنة 3	السنة 4	السنة 5	السنة 6
البنك 1	0	0	30	40	50	55
البنك 2	5	15	25	35	40	45
البنك 3	40	40	0	35	15	15

تشعر المؤسسة أنه من المفيد أن يتم الاقتراض بطريقة تجعل السداد السنوى للقرض قريباً من التساوى بقدر الإمكان ، لذلك لاترغب فى دفع أكثر من ٤ مليون دولار كمصروفات كلية . ضع البرنامج الرياضى الذى يحدد كمية النقود التى يتم اقتراضها من كل بنك ، بحيث يتحقق هدف المؤسسة .

١٣ – ١٥ بالنتيجة المعروفة لجبر المصفوفات يمكن حل البرنامج التربيعى بمتساويات القيود

أمثليه :

$$z = X^T QX + D^T X$$

علماً بأن :

$$AX = B$$

بصيغة مغلقة ، علماً بأن Q تكون محددة (محددة سلبياً فى حالة التعظيم ، أو بالموجب فى حالة التصغير) وتكون صفوفاً مستقلة خطياً . بوضوح

$$z^* = \frac{\det\left[\begin{array}{c|c} AQ^{-1}A^T & -(B+\frac{1}{2}AQ^{-1}D) \\ \hline (B+\frac{1}{2}AQ^{-1}D)^T & 0_{1\times 1} \end{array}\right]}{\det AQ^{-1}A^T} - \frac{1}{4}D^T Q^{-1}D$$

بتعبير أكثر تعقيداً عن X^* استخدم هذه النتيجة للتحقق من قيمة z^* فى المسألة ١٣ — ٧ .

١٣ – ١٦ أعد حل المسألة ١٢ — ٦ فى الصيغة .

تعظيم :

$$8 + z = -3x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 2x_2$$

علماً بأن :

$$3x_1 + x_2 = 5$$

باستخدام المسألة ١٣ – ١٥

البرمجة الديناميكية الثابتة (المؤكدة)

Deterministic Dynamic Programming

عمليات القرارات المتعددة المراحل MULTISTAGE DECISION PROCESSES

عملية القرارات المتعددة المراحل هى عملية يمكن تقسيمها إلى عدد من الخطوات ، أو المراحل المتتالية التى يمكن أن تستكمل بأكثر من طريقة . وتسمى البدائل لاستكمال هذه المراحل « قرارات » . و « السياسة » هى تسلسل من القرارات ، واحد لكل مرحلة من العملية .

وشرط العملية عند أى مرحلة يسمى « الحالة » فى هذه المرحلة ، ويؤثر كل قرار على الانتقال من الحالة الحالية إلى حالة أخرى مرتبطة بالمرحلة التالية . وتعتبر عملية القرارات المتعددة محددة ، إذا كان هناك عدد محدد فقط من المراحل فى العملية ، وعدد محدد من الحالات مرتبط بكل مرحلة .

وكثير من عمليات القرارات المتعددة المراحل لها عائد (تكلفة أو فائدة) مرتبط بكل قرار ، ويختلف هذا العائد بالنسبة لمرحلة وحالة العملية . ويكون الهدف هو تحليل هذه العمليات لتحديد السياسة المثلى التى ينتج عنها أحسن عائد كلى .

مثال ١٤ — ١ : فى المسألة ١٥ — ١ تعتبر عملية تحديد كمّ الأموال التى يجب أن تستثمر فى كل فرصة استثمار ، لتعظيم العائد الكلى ، عملية قرارات ذات ثلاث مراحل . باعتبار الفرصة i تكون المرحلة i $(i = 1, 2, 3)$ ، فإن حالة العملية عند المرحلة i هى كمية الأموال المتاحة للاستثمار عند المرحلة i . وللمرحلة 1 كبداية للعملية ، توجد 4 وحدات أموال متاحة ، ومن ثم تكون الحالة 4 . وللمراحل 3 ، 2 يمكن أن تكون الحالات 4 ,3 ,2 ,1 ,0 معتمدة على التخصيص (القرارات) من المراحل السابقة . ويمثل القرار عند المرحلة i بالمتغير x_i ، والقيم الممكنة للمتغير x_i هى الأعداد الصحيحة من صفر حتى الحالة عند المرحلة .

وتحدد السياسة المثلى للعملية فى المسألة ١٤ — ١ .

وتكون عملية القرارات المتعددة المراحل ، ثابتة (مؤكدة) إذا كان الناتج من كل قرار (وبالأخص الحالة الناتجة عن القرار) معروفاً تماماً . ويغطى هذا الفصل فقط هذه العمليات المتعددة المراحل ، والتى تكون محددة وثابتة . وستناقش العمليات المحددة التصادفية (العشوائية) فى الفصل ١٨ ، وستقدم العمليات غير المحددة فى الفصل ٢٠ .

البرنامج الرياضى A MATHEMATICAL PROGRAM

البرنامج الرياضى

أمثلية : $z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$

علماً بأن : $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq b$ (١٤ — ١)

عند كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

والذى فيه $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$ دوال معروفة (غير خطية) فى متغير واحد ، b عدد صحيح معروف لا سلبى ، يوضح نموذج لطبقة هامة من عمليات القرارات متعددة المراحل . وهنا n تمثل عدد المراحل . وتتضمن المرحلة 1 توصيف متغير القرار x_1 بعائد ناتج هو $f_1(x_1)$ إلى العائد الكلى .... إلخ . وتمثل الحالات $0, 1, 2, \ldots, b$ القيم الممكنة لعدد الوحدات المتاحة للتخصيص وكل المراحل بعد الأولى لها هذه الحالات المرتبطة بها ، والمرحلة 1 لها حالة منفردة b .

مثال ١٤ ــ ٢ :البرنامج (١٤ ــ ١) يوضح نموذج المسألة ١٥ ــ ١ عند $b = 4$ و $n = 3$.

البرمجة الديناميكية DYNAMIC PROGRAMMING

تعتبر البرمجة الديناميكية ، مدخلاً لأمثلية عملية القرارات المتعددة المراحل . وتبنى على مبدأ بلمان للأمثلية .
مبدأ الأمثلية ***Principle of optimality.*** : للسياسة المثلى خاصية أنه بصرف النظر عن القرارات المتخذة للدخول إلى أى حالة معينة فى أى مرحلة معينة ، فإن القرارات المتبقية يجب أن تكون سياسة مثلى لترك هذه الحالة .

لتنفيذ هذا المبدأ ، ابدأ بالمرحلة الأخيرة لعملية ذات -n مرحلة ، ثم حدد لكل حالة أفضل سياسة لترك هذه الحالة ، واستكمل العملية ، بافتراض أن كل المراحل السابقة قد اكتملت ، ثم تحرك للخلف خلال العملية ، مرحلة بمرحلة . وعند كل مرحلة حدد أفضل سياسة لترك كل حالة ، واستكمل العملية ، وافترض أن المراحل السابقة قد اكتملت ، واستخدم النتائج التى سبق الحصول عليها للمراحل التالية . ويعمل ذلك .. تحسب مدخلات الجدول ١٤ ــ ١ ، حيث إن :

u = متغير الحالة ، والذى تحدد قيمته هذه الحالة

$m_j(u)$ = العائد الأمثل من استكمال العلمية ابتداءً من المرحلة j فى الحالة u .

$d_j(u)$ = القرار المتخذ عند المرحلة j ، والذى يحقق $m_j(u)$

جدول ١٤ ــ ١

		u				
		0	1	2	3	...
المرحلة الأخيرة	$m_n(u)$					
	$d_n(u)$					
المرحلة قبل الأخيرة	$m_{n-1}(u)$					
	$d_{n-1}(u)$					
	...	....				
المرحلة الأولى	$m_1(u)$					
	$d_1(u)$					

والمدخلات المرتبطة بالمرحلة الأخيرة للعملية $d_n(u)$ ، $m_n(u)$ تحسب دائماً بطريقة مباشرة . (انظر المسائل ١٤ ــ ١ ، ١٤ ــ ٣) . والمدخلات المتبقية تحسب بالمسار العكسى ، بمعنى أن مدخلات المرحلة j تحدد كدوال $(j = 1, 2, \ldots, n - 1)$ من مدخلات المرحلة $(j + 1)$. وتعتبر الصيغة العكسية مسألة اعتيادية ، ويجب أن نحصل عليها من جديد لكل نوع مختلف من العملية متعددة المراحل . (انظر المسائل ١٤ ــ ٥ ، ١٤ ــ ٨) .

للتبسيط ، الجدول ١٤ ــ ١ قد رُسم على أساس أن كل مرحلة لها نفس مجموعة الحالات . وبينما يمكن دائماً الحصول على ذلك صناعياً (بجعل دوال العائد m_j دوال جزائية) ، إلا أنه فى الغالب يكون طبيعياً استخدام متغيرات حالة مختلفة كل منها له مدى من القيم للمراحل المختلفة . وهذا الاستخدام ، طبعاً ، يغير دون شك تطبيق مبدأ الأمثلية . (انظر المسائل ١٤ ــ ٩ ، ١٤ ــ ٢٠)

ويناسب مدخل البرمجة الديناميكية على الأخص هذه العمليات الموضحة بالنموذج (١٤ – ١) ـــ العمليات التى فيها يحقق كل قرار عائداً منفصلاً ـــ غير معتمد على القرار السابق . فى النموذج (١٤ ـــ ١) تُعطى قيم $m_n(u)$ ، $u = 0, 1, \ldots, b$ بالصيغة

$$m_n(u) = \underset{0 \le x \le u}{\text{أمثليه}} \{f_n(x)\} \qquad (١٤ - ٢)$$

وتكون الصيغة العكسية (أنظر المسألة ١٤ – ١)

$$m_j(u) = \underset{0 \le x \le u}{\text{أمثليه}} \{f_j(x) + m_{j+1}(u - x)\} \qquad (١٤ - ٣)$$

عند $j = n-1, n-2, \ldots, 1$. ومتغير القرار x فى (١٤ – ٢) (الذى يعبر عنه x_n فى ١٤ – ١) يتراوح بين قيم صحيحة ، كما يفعل ذلك $x\ (\equiv x_j)$ فى (١٤ – ٣) . وتؤخذ هذه القيمة لـ x ، والتى تؤدى إلى الحل الأمثل فى (١٤ – ٢) ، تؤخذ $d_n(u)$، وتؤخذ قيمة x التى تؤدى إلى الحل الأمثل فى (١٤ – ٣) ، $d_j(u)$. وإذا أدت أكثر من قيمة لـ x إلى حل أمثل ، فنختار إحداها كقرار أمثل . ويكون الحل الأمثل للبرنامج (١٤ – ١) هو $z^* = m_1(b)$ ، وهو العائد الأمثل من تكملة العملية ابتداءً من المرحلة 1 ، عند وجود عدد b من الوحدات متاحة للتخصيص . بعد تحديد z^* توجد القرارات المثلى $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ على التوالى من :

$$\begin{aligned} x_1^* &= d_1(b) \\ x_2^* &= d_2(b - x_1^*) \\ x_3^* &= d_3(b - x_1^* - x_2^*) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^* &= d_n(b - x_1^* - x_2^* - \cdots - x_{n-1}^*) \end{aligned} \qquad (١٤ - ٤)$$

البرمجة الديناميكية مع الخصم DYNAMIC PROGRAMMING WITH DISCOUNTING

إذا كان العائد من أى كمية نقود بمعدل i لكل فترة زمنية هو كمية $P(n)$ نتيجة n فترة زمنية مستقبلية ولها القيمة الحالية (أو سعر خصم)

$$P(0) = \alpha^n P(n) \quad \text{، حيث إن} \quad \alpha \equiv \frac{1}{1+i} \qquad (١٤ - ٥)$$

الخصم *Discounting* هو إحلال مجموع كل الدولارات فى المستقبل بقيمتها الحالية ، ويتصل دائماً بعمليات القرارات متعددة المراحل ، والتى تمثل فيها المراحل فترات زمنية ، ويكون الهدف هو أمثلية قيمة نقدية . وفى الحل بواسطة البرمجة الديناميكية ، فإن الصيغة العكسية فى $m_j(u)$ ، وهى أفضل عائد يبدأ عند المرحلة j والحالة u ، تتعامل مع حدود من الصيغة $m_{j+c}(y)$ ، وأفضل عائد يبدأ فى المرحلة $j + c$ (c فترة زمنية بعد المرحلة j) والحالة y . [انظر مثال (١٤ – ٣)] . إذا ضربت $m_{j+c}(y)$ فى α^c ، حيث

هى معامل الخصم المعرّف سابقاً ، فإن $m_{j+c}(y)$ تخصم إلى قيمتها الحالية عند بدء المرحلة j . ويتبع ذلك أن $m_1(u)$ ستخصم حتى بدء المرحلة 1 ، وهى بدء العملية . (انظر المسألة ١٤ - ١٠)

مسائل محلولة

Solved Problems

١٤ - ١ حدد السياسة المثلى فى المسألة (١ - ١٥) (انظر المثال ١٤ - ١)

نبدأ باعتبار المرحلة الأخيرة فى العملية هى المرحلة الثالثة ، بافتراض أن كل المراحل السابقة ، المرحلتين 1 ، 2 قد استكملت ، بمعنى أن التخصيصات للمرحلتين 1 ، 2 قد استكملت (بالرغم من أنه عند هذا الوقت لا نعرف هذه التخصيصات) ، ونحن بصدد استكمال العملية بتخصيص وحدات نقدية للاستثمار رقم 3 . وحيث إننا لا نعرف كم الوحدات التى قد خُصصت للاستثمارين الأول والثانى ، فإننا لا نعرف كم الوحدات ، المتاحة للإستثمار 3 ، ولذلك يجب أخذ كل الاحتمالات فى الاعتبار . سيكون هناك إما 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 وحدات متاحة .

بصرف النظر عن عدد الوحدات المتاحة للمرحلة 3 ، فإنه من الواضح طبقاً لتعريف $f_3(x)$ فى جدول ٢ - ١ أن أفضل طريقة لاستكمال العملية هى تخصيص كل الوحدات المتاحة للاستثمار 3 . وينتج نفس الشىء من تطبيق (١٤ - ٢) . لذلك

$$\begin{aligned}
m_3(4) &= \max\{f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3), f_3(4)\} \\
&= \max\{0, 1, 4, 5, 8\} = 8 \quad \text{with} \quad d_3(4) = 4 \\
m_3(3) &= \max\{f_3(0), f_3(1), f_3(2), f_3(3)\} \\
&= \max\{0, 1, 4, 5\} = 5 \quad \text{with} \quad d_3(3) = 3 \\
m_3(2) &= \max\{f_3(0), f_3(1), f_3(2)\} \\
&= \max\{0, 1, 4\} = 4 \quad \text{with} \quad d_3(2) = 2 \\
m_3(1) &= \max\{f_3(0), f_3(1)\} = \max\{0, 1\} = 1 \quad \text{with} \quad d_3(1) = 1 \\
m_3(0) &= \max\{f_3(0)\} = \max\{0\} = 0 \quad \text{with} \quad d_3(0) = 0
\end{aligned}$$

وهذه النتائج تعطينا الصفين الأولين فى جدول الحل رقم ١٤ - ٢

جدول ١٤ - ٢

	u				
	0	1	2	3	4
$m_3(u)$	0	1	4	5	8
$d_3(u)$	0	1	2	3	4
$m_2(u)$	0	1	4	6	8
$d_2(u)$	0	1	0	3	0
$m_1(u)$	...	...	...	...	9
$d_1(u)$	...	...	...	...	2

باستكمال المرحلة 3 ، نأخذ فى الاعتبار المرحلة 2 ، بافتراض أن المرحلة 1 قد استكملت (بالرغم من أننا حتى هذا الوقت لا نعرف كيف) . وحيث إننا لا نعرف عدد الوحدات التى خصصت للاستثمار 1 ، فإننا لا نعرف عدد الوحدات المتاحة للاستثمار 2 ، ولذلك يجب أن نأخذ فى الاعتبار كل الاحتمالات الممكنة .

إحدى الإمكانيات هو أن أربع وحدات متاحة للمرحلة 2 ، حيث يفترض مسبقاً أنه لم يتم تخصيص أى وحدة للاستثمار 1 . والآن فإن كل أو بعض هذه الوحدات الأربع ، يمكن تخصيصها للاستثمار 2 ، والباقى للاستثمار 3 . وإذا خصصت x من هذه الوحدات الأربعة للاستثمار 2 ، يكون العائد هو $f_2(x)$ ، والباقى $4-x$ وحدة تكون متاحة للمرحلة 3 ، ولكننا وجدنا قبل ذلك أن أفضل استمرارية من المرحلة 3 عندما يكون لدينا $4-x$ وحدة ، وبالتحديد $m_3(4-x)$. ويكون العائد الكلى لذلك هو $f_2(x)+m_3(4-x)$ ، وقيمة $(x=0,1,2,3,4)$ التى تعظم هذا العائد الكلى تمثل القرار الأمثل عند المرحلة 2 بعدد أربع وحدات متاحة . وتصور الصيغة (١٤ - ٣) عند $j=2$ ، $u=4$ ، هذه النتيجة ببساطة .

$$m_2(4)=\max\{f_2(0)+m_3(4-0),\ f_2(1)+m_3(4-1),\ f_2(2)+m_3(4-2),\ f_2(3)+m_3(4-3),\ f_2(4)+m_3(4-4)\}$$
$$=\max\{0+8,\ 1+5,\ 3+4,\ 6+1,\ 7+0\}=8 \qquad \text{with} \quad d_2(4)=0.$$

وبمعاملة الإمكانيات الأخرى بالمثل عند المرحلة 2 ، نحصل على :

$$m_2(3)=\max\{f_2(0)+m_3(3-0),\ f_2(1)+m_3(3-1),\ f_2(2)+m_3(3-2),\ f_2(3)+m_3(3-3)\}$$
$$=\max\{0+5,\ 1+4,\ 3+1,\ 6+0\}=6 \qquad \text{with} \quad d_2(3)=3$$
$$m_2(2)=\max\{f_2(0)+m_3(2-0),\ f_2(1)+m_3(2-1),\ f_2(2)+m_3(2-2)\}$$
$$=\max\{0+4,\ 1+1,\ 3+0\}=4 \qquad \text{with} \quad d_2(2)=0$$
$$m_2(1)=\max\{f_2(0)+m_3(1-0),\ f_2(1)+m_3(1-1)\}$$
$$=\max\{0+1,\ 1+0\}=1 \qquad d_2(1)=1$$ (نفك الاشتراك اختيارياً) عند :
$$m_2(0)=\max\{f_2(0)+m_3(0-0)\}=\max\{0+0\}=0 \qquad d_2(0)=0$$ عند :

وبتجميع الحسابات للمرحلة 2 ، نحصل على الصفين الثالث ، الرابع للجدول (١٤ - ٢)

وباستكمال المرحلة 2 ، نعود الآن للمرحلة 1 . هناك حالة واحدة مرتبطه بهذه المرحلة ، $u = 4$.

$$m_1(4) = \max\{f_1(0) + m_2(4-0),\ f_1(1) + m_2(4-1),\ f_1(2) + m_2(4-2),\ f_1(3) + m_2(4-3),\ f_1(4) + m_2(4-4)\}$$
$$= \max\{0+8,\ 2+6,\ 5+4,\ 6+1,\ 7+0\} = 9 \qquad d_1(4) = 2 \ \text{عند}$$

وبهذه البيانات نستكمل الجدول ١٤ - ٢ .

والحد الأعلى للعائد الذى يمكن أن يتحقق من هذا الاستثمار ذى الثلاث مراحل ، ابتداءً من الوحدات الأربع هو $m_1(4) = 9$ لتحقيق هذا العائد ، خصص وحدة $d_1(4) = 2$ للاستثمار 1 ، تاركاً وحدة (2 - 4) للمرحلة الثانية ، ولكن $d_2(2) = 0$ تدل على أن أى وحدات لا تنفق حتى هذه المرحلة إذا كان هناك 2 وحدة متاحة فقط . لذلك تبقى وحدتان للمرحلة 3 . وحيث $d_3(2) = 2$ ، فإن الوحدتين يجب أن تخصصا للاستثمار 3 . وتصور هذه النتائج فى المعادلة (١٤ — ٤) . ولذلك فإن السياسة المثلى هى تخصيص 2 وحدة للاستثمار 1 ، 0 وحدة للاستثمار 2 . و 2 وحده للاستثمار 3 .

١٤ - ٢ يمتلك أحد أصحاب عربات الشحن 8 أمتار مكعبة من الفراغ المتاح فى عربة شحن مقرر أن تغادر إلى نيويورك . وقد قدم أحد الموزعين ، والذى يمتلك كميات كبيرة من ثلاثة أنواع مختلفة من الأجهزة ستشحن إلى مدينة نيويورك ، عرضاً لصاحب عربة الشحن لنقل وحدات كثيرة طبقاً لما تستطيع نقله العربة بالرسوم التالية :

الحجم متر مكعب / وحدة	السعر دولار / وحدة	الجهاز
1	11	I
3	32	II
5	58	III

ما هو عدد الوحدات من كل جهاز يجب أن يقبلها صاحب عربة الشحن حتى يعظم رسوم النقل ، بدون أن تزيد طاقة الشحن للعربة عن الطاقة المتاحة ؟

يمكن اعتبار هذه المسألة على أنها عملية ذات ثلاث مراحل ، تحتوى على تخصيص فراغ للأجهزة III ، II ، I ، على التوالى . ويمكن تصوير المسألة فى البرنامج (١٤ - ١) عند $n = 3, b = 8$ إذا كانت $x_j\ (j = 1, 2, 3)$ محددة بعدد الأمتار المكعبة من الجهاز j التى ستنقل ، إذا كانت $f_j(x_j)$ العائد من تخصيص x_j للمرحلة j، معرفة بالجدول ١٤ - ٣ . والحالة عند هذه المرحلة هى عدد الأمتار المكعبة من الفراغ الذى لم يُشغل بعد .

جدول ١٤ – ٣

f \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x)$	0	11	22	33	44	55	66	77	88
$f_2(x)$	0	0	0	32	32	32	64	64	64
$f_3(x)$	0	0	0	0	0	58	58	58	58

يستنتج الصف الأول من الجدول مباشرة ، حيث إن كل متر مربع إضافى يخصص للجهاز I سيحقق عائداً إضافياً ١١ دولاراً . ولإيجاد الصف الثانى للجدول نلاحظ أن كل جهاز II يشغل 3 أمتار مكعب! ، لذلك حتى عدد ٣ أمتار مكعبة فراغ متاح على الأقل لا يمكن نقل أى وحدة من هذا النوع ، وبالتالى لا يتحقق أى عائد . وإذا خصص 5 ، 4 ، 3 أمتار مكعبة للجهاز II ، فإن وحدة واحدة فقط يمكن تجهيزها بعائد صافى 32 دولاراً . وإذا خصص 8 ، 7 ، 6 أمتار مكعبة ، فإنه يمكن شحن وحدتين بعائد صافى 64 دولاراً . وهذا التحليل ينطبق على الجهاز III . ولا يمكن تحقيق أى عائد حتى يمكن تخصيص 5 أمتار مكعبة على الأقل له ، وإذا خصص 8 ، 7 ، 6 ، 5 أمتار مكعبة فإن جهازاً واحداً فقط من III يمكن أن يشحن بعائد صافى 58 دولاراً .

البرنامج (١٤ – ١) يمكن أن يحل باستخدام (١٤ – ٢) ، (١٤ – ٣) ، كما فى المسألة (١٤ – ١) تماماً . وتعرض النتائج فى الجدول ١٤ – ٤ ، وأمكن كسر كل المتساويات بالجدول ، وذلك باختيار أصغر قيم تعظم x مثل $d_j(u)$. يبين ١٤ – ٤ أن أحسن عائد كلى يمكن أن يحصل عليه صاحب عربة الشحن هو دولار $m_1(8) = \$91$ بأن يبدأ المرحلة 1 بـ 8 أمتار مكعبة من الفراغ المتاح . ولتحقيق هذا ، فإن 3 أمتار مكعبة [$d_1(8) = 3$] يجب أن تخصص للجهاز I ، تاركين 5 أمتار مكعبة للمراحل التالية . ويجب ألا يخصص أى حجم للجهاز II [$d_2(5) = 0$] ، تاركين 5 أمتار مكعبة للمرحلة 3 ، وكلهم يخصصون للجهاز III [$d_3(5) = 5$] . وبالنسبة للوحدات .. يجب أن يأخذ صاحب عربة الشحن ثلاث وحدات من الجهاز I ، ووحدة واحدة من الجهاز III .

جدول ١٤ – ١٤

	u								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_3(u)$	0	0	0	0	0	58	58	58	58
$d_3(u)$	0	0	0	0	0	5	5	5	5
$m_2(u)$	0	0	0	32	32	58	64	64	90
$d_2(u)$	0	0	0	3	3	0	6	6	3
$m_1(u)$	...	...	...	...	...	...	...	...	91
$d_1(u)$	...	...	...	...	...	...	...	...	3

١٤ - ٣ حول البرنامج التالى إلى النموذج (١٤ - ١)

تعظيم : $z = 11y_1 + 32y_2 + 58y_3$ (١)

علماً بأن : $y_1 + 3y_2 + 5y_3 \leq 8$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

هذا البرنامج هو نموذج رياضى للمسألة ١٤ - ٢ ، إذا جعلنا y_j $(j = 1, 2, 3)$ عدد الوحدات (على عكس عدد الأمتار المكعبة) من الأجهزة التي ستشحن . ويصور القيد الخطى حدود الحجم ، ويصور معامل y_j الحجم لكل وحدة من الأجهزة j . وكما لاحظنا فى المسألة ١٤ - ٢ ، نحصل على نموذج رياضى لهذا البرنامج من الصيغة (١٤ - ١) ـــ والذى له معاملات أحادية فى متباينة القيد ـــ إذا عرفنا متغيرات جديدة x_j لترمز إلى عدد الأمتار المكعبة من كل جهاز يشحن نحصل إذاً على

تعظيم : $z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$ (٢)

علماً بأن : $x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

حيث تعرف دوال العائد $f_j(x)$ بالجدول ١٤ - ٣ .

لاحظ أن (١) لم تؤخذ من الصيغة (١٤ - ١) بالتحويل الخطى

$$x_1 = y_1 \qquad x_2 = 3y_2 \qquad x_3 = 5y_3$$

وبالرغم من أن هذا التحويل ينتج النوع المطلوب من الدالة الهدفية ، والنوع المطلوب من متباينة القيد ، فإنه يصور مجموعة النقط الصحيحة اللاسلبية (y_1, y_2, y_3) فى المجموعة الفرعية للنقط الصحيحة اللاسلبية (x_1, x_2, x_3) . ونحتاج بالتحديد إلى الدوال $f_j(x)$ المعرفة فى المسألة (١٤ - ٢) لإمكانية عمل الامتداد لهذه المجموعة الفرعية حتى المجموعة كلها .

١٤ - ٤ حول البرنامج التالى إلى النموذج (١٤ - ١)

تعظيم : $z = g_1(y_1) + g_2(y_2) + g_3(y_3) + g_4(y_4)$

علماً بأن : $2y_1 + y_2 + 6y_3 + 3y_4 \leq 9$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

حيث $g_j(y)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ تعرف فى الجدول ١٤ - ٥

جدول (١٤ - ٥)

g \ y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g_1(y)$	0	4	8	11	14	17	19	21	22	23
$g_2(y)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$g_3(y)$	0	1	2	3	6	8	11	15	20	26
$g_4(y)$	0	1	7	9	14	16	21	23	25	27

بتقليد المدخل المستخدم فى المسألة ١٤ – ٣ ، نفكر فى y_j كعدد الوحدات من المنتج j التى تشحن بعربة معينة . يمثل الجدول ١٤ – ٥ جدول أسعار الشحن ، بينما يصور القيد الخطى الحدود على الحجم الكلى الذى يمكن أن يجهز ، وهو ٩ وحدات . ويترجم معامل y_j فى هذا القيد بالحجم المشغول بوحدة واحدة من المنتج j (انظر الجدول ١٤ – ٦) .

المنتج	1	2	3	4
الحجم / وحدة	2	1	6	3

ونحدد الآن متغيرات جديدة x_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ كعدد الوحدات من حجم المنتج j التى ستشحن . البرنامج (١) يكافىء البرنامج التالى من الصيغة (١٤ – ١) .

تعظيم : $z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4)$ (٢)

علماً بأن : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

حيث تصور $f_j(x_j)$ العائد من تخصيص x_j وحدة من الحجم للمنتج j . وتشتق هذه الدوال من الجداول ١٤ – ٥ ، ١٤ – ٦ .

وكمثال :

$f_4(7)$ = العائد من شحن 7 وحدات حجم من المنتج 4

= العائد من الشحن 2 وحدة من المنتج 4

$= g_4(2) = 7$ حيث إن كل وحدة من المنتج 4 تتطلب 3 وحدات حجم

وبالإستمرار على هذا النمط ، نكمل الجدول ١٤ – ٧

جدول ١٤ – ٧

f \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	0	0	4	4	8	8	11	11	14	14
$f_2(x)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$f_3(x)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$f_4(x)$	0	0	0	1	1	1	7	7	7	9

١٤ – ٥ كون صيغة عكسية مناظرة لـ (١٤ – ٣) للمسألة التالية . تستطيع إحدى الشركات إنتاج حتى أربع حاسبات أسبوعياً ، وقد وافقت على تسليم الحاسبات التالية فى الأربعة أسابيع التالية ، وهم ثلاثة ، اثنين ، أربعة ، اثنين حاسب على التوالى . وتعتبر تكلفة الإنتاج دالة فى عدد الحاسبات المنتجة ، وتعطى (بالألف دولار) كما يلى :

الوحدات المنتجة x	0	1	2	3	4
التكلفة $f(x)$	4	13	19	27	32

يمكن تسليم الحاسبات إلى العملاء فى نهاية نفس أسبوع التصنيع ، ويمكن تخزينها للتسليم مستقبلاً بتكلفة 4000 دولار للأسبوع . وبسبب إمكانيات الشركة المحدودة ، فإنها لا تستطيع تخزين أكثر من ثلاث حاسبات فى الوقت الواحد . المخزون الحالى صفر ، ولا ترغب الشركة فى وجود أى مخزون فى نهاية الأسبوع الرابع . كم من الحاسبات يجب أن تنتجه الشركة فى كل أسبوع من الأسابيع الأربعة التالية لمواجهة كل الاحتياجات بتكلفة كلية أقل ما يمكن ؟

كما هو مبين فى الفصل ٩ ، فإن مسائل الإنتاج من هذا النوع تصاغ فى صورة مسائل نقل . وهذه النماذج لا تخضع للصيغة (١٤ - ١) ، ومن ثم لا يمكن تطبيق (١٤ - ٣) . ومع ذلك ، فإن مسائل الإنتاج هى عمليات قرارات متعددة المراحل يمكن حلها باستخدام البرمجة الديناميكية .

ومسألة الإنتاج المقدمة هى عملية ذات أربع مراحل ، وفيها المرحلة j تمثل الأسبوع $(j = 1, 2, 3, 4)$. والحالة I من المرحلة j هى عدد الحاسبات بالمخزن فى بداية الأسبوع j . دع

$m_j(u) =$ أقل تكلفة لاستكمال جدول الإنتاج ابتداء من المرحلة j عند الحالة u .

$d_j(u) =$ جدول الإنتاج للمرحلة j التى تحقق $m_j(u)$.

$D_j =$ الاحتياج فى المرحلة j .

$I_j(u) =$ تكلفة المخزون المقابلة للمرحلة j عندما تكون الحالة u .

$f_j(x) =$ تكلفة إنتاج x حاسب فى المرحلة j .

اعتبر الحالة التى تدخل فيها الشركة المرحلة j بعدد حاسبات u فى المخزن . وتستطيع الشركة إنتاج أى عدد من الحاسبات طبقاً لطاقتها خلال هذه المرحلة ، علماً بأن مجموع إنتاجها ومخزونها يكونا على الأقل فى مستوى الاحتياج D_j . وأى كمية زائدة عن الاحتياج D_j تخزن بالمخزن للمرحلة التالية . وعلى الأخص إذا أنتجت الشركة x حاسباً فى المرحلة j ، فإن تكلفة الإنتاج $f_j(x)$ تكون قد تضخمت . وتسبب الوحدات u بالمخزن تكلفة تخزين $I_j(u)$ ، بتكلفة كلية للفترة j تقدر بـ $f_j(x) + I_j(u)$ وهذا يترك $u + x - D_j$ وحدة فى المخزن للمرحلة $j+1$ ، وتكون أقل تكلفة لاستكمال العملية عند هذه النقطة هى $m_{j+1}(u + x - D_j)$ ، حيث تكون التكلفة الكلية لاستكمال العملية ابتداءً من المرحلة j بجدول إنتاج x وحدة ، وهى $f_j(x) + I_j(u) + m_{j+1}(u + x - D_j)$ ، ويكون أفضل قرار للمرحلة j عند u وحدة فى المخزن هو إنتاج الكمية x التى تجعل التكلفة أقل ما يمكن . وبالتالى عند $j = 1, 2, 3$

$$m_j(u) = \min_x \{f_j(x) + I_j(u) + m_{j+1}(u + x - D_j)\}$$
$$= I_j(u) + \min \{f_j(x) + m_{j+1}(u + x - D_j)\} \qquad (١)$$

حيث تتراوح x بين القيم $0, 1, 2, 3, 4$ ، ولضمان ذلك

$$0 \le u + x - D_j \le 3 \quad (\text{طاقة تخزين})$$

نجعل $m_{j+1}(u)$ مساوية للتكلفة الجزائية العالية جداً ، M ، حيث إن $u < 0$ or $u > 3$.

وللمسألة هذه ، لا تعتمد تكلفة المخزون أو تكلفة الإنتاج على المرحلة ، وتعطى بـ $I_j(u) = 4u$ (وحدات ألف دولار) ، $f_j(x) = f(x)$ على التوالى ، كما هو موضح فى جدول تكلفة الإنتاج . وتكون الاحتياجات $D_1 = 3,\ D_2 = 2,\ D_3 = 4,$ $D_4 = 2$. وتبسط العلاقة (١)

$$m_j(u) = 4u + \min_{x=0,1,2,3,4} \{f(x) + m_{j+1}(u + x - D_j)\} \qquad (٢)$$

١٤ - ٦ حل المسألة المصاغة فى المسألة ١٤ - ٥

يوجد إما صفر ، واحد ، اثنين ، وإما ثلاث حاسبات فى المخزن فى بداية الأسبوع الرابع . وحيث إنه ليس مطلوباً أن يكون هناك أى مخزون فى نهاية الأسبوع الرابع ، فإن القرار الأمثل عند المرحلة الرابعة هو إنتاج الجزء من احتياج الأسبوع الرابع فقط $D_4 = 2$ الذى لا يُخزن . وتنشأ الصعوبة فقط إذا كان المخزون القادم ثلاثة عناصر ، والتى تزيد على الاحتياج . ولمنع هذا

الموقف فى السياسة النهائية ، فإننا نعين لها تكلفة جزائية عالية جداً حتى الاستكمال ، 1000 (وحدات ألف دولار) . والتكلفة حتى الاستكمال لكل الحالات الأخرى هى تكلفة التخزين للمخزون الحالى ، مضافاً إليها تكلفة الإنتاج للفرق بين الاحتياج والمخزون . لذلك

$$m_4(3) = 1000$$

تكلفة التخزين لحاسبتين ، وتكلفة الإنتاج لعدد صفر حاسب $= m_4(2)$

عند $d_4(2) = 0$ $\quad = 4(2) + 4 = 12$

تكلفة التخزين لحاسب واحد وتكلفة إنتاج لحاسب واحد $= m_4(1)$

عند $d_4(1) = 1$ $\quad = 4(1) + 13 = 17$

تكلفة التخزين لعدد صفر حاسب ، وتكلفة إنتاج حاسبتين

عند $d_4(0) = 2$ $\quad = 4(0) + 19 = 19$

بتجميع هذه النتائج نحصل على الصفين الأولين للجدول ١٤ – ٨ . ونحصل على باقى المدخلات بتطبيق (٢) من المسألة (١٤ – ٥) عند $j = 3, 2, 1$ ومرة أخرى $M = 1000$ تستخدم للتحكم فى حالة المخزون غير الممكنة .

جدول ١٤ – ٨

	u			
	0	1	2	3
$m_4(u)$	19	17	12	1000
$d_4(u)$	2	1	0	...
$m_3(u)$	51	50	46	44
$d_3(u)$	4	3	2	1
$m_2(u)$	70	68	63	66
$d_2(u)$	2	1	0	0
$m_1(u)$	97	...	...	...
$d_1(u)$	3	...	...	...

من جدول ١٤ – ٨ يتبين أن أقل تكلفة إنتاج لاستكمال العملية كليةً ابتداءً من المرحلة 1 عند عدد وحدات صفر بالمخزون هى

$$m_1(0) = \$97\,000 \quad \text{دولار}$$

ولتحقيق ذلك ، يجب أن تنتج الشركة $d_1(0) = 3$ حاسبات فى الأسبوع الأول ، تشحن كلها مباشرة إلى العملاء . تدخل الشركة الأسبوع الثانى بمخزون صفر ، ويجب أن تشحن $d_2(0) = 2$ حاسباً التى تواجه الاحتياج . ومستوى الإنتاج للمرحلة 3 عند مخزون صفر حاسب هو $d_3(0) = 4$ ، لذلك يقابل الاحتياج بالضبط ؛ ومستوى الاحتياج للمرحلة الرابعة بمخزون صفر من الحاسبات هو $d_4(0) = 2$. لذلك فإن السياسة المثلى هى إنتاج العدد المطلوب من الحاسبات بالضبط ، والذى يفى بالاحتياج دون أى مخزون .

١٤ - ٧ تلقى أحد الصناع طلباً من إحدى السكك الحديدية لتسليم ١٢ قاطرة ، بواقع ثلاث كل عام ، وذلك للأعوام الأربعة التالية . توضح بيانات الإنتاج فى الجدول ١٤ - ٩ . تسلم القاطرات فى نهاية نفس سنة الصنع ، أو يمكن تخزينها لدى الصانع بتكلفة 30000 دولار للقاطرة لكل سنة لتشحن فى سنة أخرى .وحالياً لدى الصانع قاطرة واحدة بالمخزن ، ويرغب فى زيادة المخزون إلى ثلاث فى نهاية الأربع سنوات التالية . حدد جدول الإنتاج الذى سيقابل كل الاحتياجات بتكلفة كلية أقل ما يمكن .

جدول١٤ - ٩

	السنة			
	1	2	3	4
الطاقة الإنتاجية (الوردية العادية)	1	2	3	4
الطاقة الإنتاجية (الوردية العادية)	2	2	3	2
التكلفة للقاطرة (الوردية الإضافية)	$350 000	$370 000	$395 000	$420 000
التكلفة للقاطرة (الوردية الإضافية)	$375 000	$400 000	$430 000	$465 000

نحل هذه المسألة بالبرمجة الديناميكية باستخدام الرموز والصيغة العكسية (١) فى المسألة ١٤ - ٥ . هناك أربع مراحل (سنوات) للأخذ فى الاعتبار ، باعتبار أن القرارات هى مواصفات مستوى الإنتاج للمراحل . وتقدر الطاقة الإنتاجية فى كل مرحلة بمجموع الطاقات للورديات العادية والإضافية لهذا العام . بوضع $f_j(x) = M$ تكلفة جزائية عالية ، وإذا لم نحقق مستوى x فى المرحلة j ، فإننا نعيد صياغة بيانات الإنتاج كما فى الجدول ١٤ - ١٠ ، علماً بأن جميع التكاليف معطاه بوحدات الألف دولار

جدول ١٤ - ١٠

f \ x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	350	725	1100	M	M	M
$f_2(x)$	0	370	740	1140	1540	M	M
$f_3(x)$	0	395	790	1185	1615	2045	2475
$f_4(x)$	0	420	840	1260	1680	2145	2610

ويمكن تأكيد المخزون النهائى كثلاث قاطرات بسهولة بزيادة الاحتياج فى المرحلة الأخيرة بثلاث . لذلك $D_1 = D_2 = D_3$ $= 3$ ، بينما $D_4 = 6$. وأقصى مخزون ممكن فى أى مرحلة هو خمس قاطرات ، يتحقق فى نهاية المرحلة 3 تحت ظروف أعلى انتاج فى كل المراحل . وبالتالى نأخذ الحالات لتكون $u = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ، ونعرف $I_j(u) \equiv 30u$ (لا تعتمد على j) ونعرف أيضاً $m_{j+1}(u) = M \quad (j = 1, 2, 3)$ ، حيث إن $u < 0$ أو $u > 5$

المرحلة 4 إذا كانت القاطرات فى بداية هذه المرحلة فإن هناك مصروفات تخزين $30u$ألف دولار . لذلك فإن قرار أقل تكلفة لاستكمال العملية هو أن نصنع

$$d_4(u) = D_4 - u = 6 - u$$

قاطرة بتكلفة $f_4(6-u)$ وأقل تكلفة حتى الاستكمال هى

$$m_4(u) = 30u + f_4(6-u)$$

وهذه هى المدخلات فى الصفين الأولين للجدول ١٤ -١١

ونحصل على باقى جدول ١٤ - ١١من الصيغة العكسية (١) للمسألة ١٤ - ٥ ، وفيها يكون التصغير فوق $x = 0, \ldots, 6$ التساوى بين $d_2(2), d_2(1),$ and $d_2(0)$ قطع باختيار أصغر قيمة تصغير x فى كل حالة . ومن المشاهد أن أقل تكلفة كلية لاستكمال العملية هى $m_1(1) = \$5\,680\,000$ دولار . لتحقيق هذه التكلفة ، فإن تكلفة الإنتاج لقاطرتين مطلوبتين للمرحلة 1 $[d_1(1) = 2]$ هى غير تاركين أى شىء فى المخزن ، وتكلفة الإنتاج للثلاث قاطرات المطلوبة للمرحلة 2 $[d_2(0) = 3]$ غير تاركين أى شىء فى المخزن ؟ وتكلفة الإنتاج للخمس قاطرات الضرورية للمرحلة 3 $[d_3(0) = 5]$ ، تاركين قاطرتين فى المخزن ، وتكلفة الإنتاج للأربع قاطرات المطلوبة للمرحلة الأخيرة هى : $[d_4(2) = 4]$

جدول ١٤ - ١١

	u					
	0	1	2	3	4	5
$m_4(u)$	2610	2175	1740	1350	960	570
$d_4(u)$	6	5	4	3	2	1
$m_3(u)$	3785	3385	2985	2620	2255	1890
$d_3(u)$	5	4	3	2	1	0
$m_2(u)$	4925	4555	4185	3815	3475	3135
$d_2(u)$	3	2	2	2	1	0
$m_1(u)$	...	5680	...	...	...	...
$d_1(u)$	...	2	...	...	...	...

١٤ - ٨ كون صيغة عكسية لحل المسألة التالية بالبرمجة الديناميكية . تقوم شركة بيع ماكينات حالياً بتشغيل ماكينة عمرها سنتان فى أحد المواقع يعطى الجدول ١٤ -١٢ تقديرات تكلفة المحافظة على استبدال العائد (بالدولار) لأى ماكينة فى هذا الموقع كدالة بالنسبة لعمر الماكينة

جدول ١٤ - ١٢

	العمر u					
	0	1	2	3	4	5
$I(u)$ العائد	10 000	9500	9200	8500	7300	6100
$M(u)$ الصيانة	100	400	800	2000	2800	3300
$R(u)$ الإحلال	...	3500	4200	4900	5800	5900

وطبقا لسياسة الشركة ، فإن الماكينات لا تبقى بعد السنة السادسة ، وتستبدل بماكينات جديدة . حدد سياسة الاستبدال التى تعظم الربح الكلى من هذا الموقع فى السنوات الأربع التالية .

هذا المطلب فى مسألة الاستبدال التى هى عبارة عن عملية ذات أربع مراحل تمثل كل مرحلة سنة من الفترة الزمنية تحت الاعتبار ، والحالات عند كل مرحلة هى الأعمار المختلفة للماكينات التى ستدخل هذه المرحلة ، بمعنى i.e., $u = 1, \ldots, 5$.

فى كل مرحلة ، يكون لمتغير القرار قيمتين فقط ، ويرمز لهما باللفظين « احفظ » (احفظ الماكينة الحالية) ، « اشتر » (استبدل الماكينة الحالية بماكينة جديدة)

عرف : أعلى عائد يتحقق ابتداءً من المرحلة j فى الحالة u $= m_j(u)$

القرار عند المرحلة j الذى يحقق $m_j(u)$ $= d_j(u)$

دع الدوال $I(u), M(u),$ and $R(u)$ لتعرف بالجدول ١٤ – ١٢ . إذا دخلت الشركة المرحلة j بماكينة عمرها u ، وقررت « حفظ » هذه الماكينة ، فإنها تكلف الشركة $M(u)$ للحفاظ عليها بعائد سنوى $I(u) - M(u)$. تدخل الشركة بعد ذلك إلى المرحلة التالية بماكينة عمرها $(u+1)$ سنة ، وأحسن عائد يمكن أن يتحقق بها (وبالتالين لها) هو : $m_{j+1}(u+1)$. لذلك يكون الربح الكلى حتى الاستكمال هو :

$$I(u) - M(u) + m_{j+1}(u+1) \qquad (٢)$$

وبدلاً من ذلك ، لو قررت الشركة بيع الماكينة التى عمرها u سنة عند المرحلة j ، « وشراء » ماكينة جديدة ، فإنها تتحمل تكلفة $R(u)$. وتكون الماكينة ذات عمر صفر ، وتحقق عائداً $I(0)$ وتكلفة $M(0)$ للصيانة . ويكون العائد السنوى $I(0) - M(0) - R(u)$ وتدخل الشركة المرحلة التالية بماكينة عمرها سنة واحدة ، ويكون أفضل ربح يمكن تحقيقه هو $m_{j+1}(1)$ فى هذه الحالة يكون الربح الكلى حتى الاستكمال هو

$$I(0) - M(0) - R(u) + m_{j+1}(1)$$

والقرار الأمثل عند المرحلة j ينتج الكمية الأكبر من (١) ، (٢) ، بمعنى :

$$m_j(u) = \max\{I(u) - M(u) + m_{j+1}(u+1),\ I(0) - M(0) - R(u) + m_{j+1}(1)\} \qquad (٣)$$

١٤ – ٩ حل المسألة المضاعفة فى المسألة ١٤ – ٨

نلاحظ أنه ابتداءً من المرحلة ١ بماكينة عمرها سنتان ، فإنه من غير الممكن الدخول فى المرحلة j $(j = 1, \ldots, 4)$ بماكينة أقدم من $j+1$ ، أو عمرها j .. لذلك نعرف $m_j(u) = -M$ على أنه عائد سلبى كبير جداً ، حيث إن

$$u > j+1 \ \text{ or } \ u = j$$

المرحلة 4 تتحقق الصيغة (٣) فى المسألة ١٤ – ٨ عند $j = 4$ إذا عرفنا $m_5(u) \equiv 0$ ، لذلك

$$m_4(5) = \text{أكبر}\ \{I(5) - M(5),\ I(0) - M(0) - R(5)\}$$
$$= \text{اكبر}\ \{6100 - 3300,\ 10\,000 - 100 - 5900\} = 4000 \qquad \text{عند } d_4(5) = \text{اشترى}$$
$$m_4(4) = -M$$
$$m_4(3) = \text{اكبر}\ \{I(3) - M(3),\ I(0) - M(0) - R(3)\}$$
$$= \text{اكبر}\ \{8500 - 2000,\ 10\,000 - 100 - 4900\} = 6500 \qquad \text{عند } d_4(3) = \text{احفظ}$$
$$m_4(2) = \text{اكبر}\ \{I(2) - M(2),\ I(0) - M(0) - R(2)\}$$
$$= \text{اكبر}\ \{9200 - 800,\ 10\,000 - 100 - 4200\} = 8400 \qquad \text{عند } d_4(2) = \text{احفظ}$$
$$m_4(1) = \text{اكبر}\ \{I(1) - M(1),\ I(0) - M(0) - R(1)\}$$
$$= \text{اكبر}\ \{9500 - 400,\ 10\,000 - 100 - 3500\} = 9100 \qquad \text{عند } d_4(1) = \text{احفظ}$$

هذه النتائج تُكَوِّنْ الصفين الأولين للجدول ١٤ – ١٣

جدول ١٤ – ١٣

	u				
	1	2	3	4	5
$m_4(u)$	9100	8400	6500	$-M$	4000
$d_4(u)$	احفظ	احفظ	احفظ	...	اشتر
$m_3(u)$	17 500	14 900	$-M$	13 200	$-M$
$d_3(u)$	احفظ	احفظ	...	اشتر	...
$m_2(u)$	24 000	$-M$	22 500	$-M$	$-M$
$d_2(u)$	احفظ	...	اشتر	...	...
$m_1(u)$	...	30 900	...	...	...
$d_1(u)$	...	احفظ	...	...	...

يمكن الحصول على المدخلات الباقية فى الجدول ١٤ – ١٣ بالتطبيق المتتالى للصيغة العكسية فى $j = 3, 2, 1$ ، بعائد من الحالات غير الممكنة المجازاة ، كما هو متفق عليه مسبقاً . وينتج من جدول ١٤ – ١٣ أن الشركة يمكن أن تحقق أعلى عائد ممكن 30900 دولار فى السنوات الأربع التالية ، ابتداءً بالماكينة التى عمرها سنتان . ولعمل ذلك .. يجب أن تحافظ على الماكينة الحالية لسنة أخرى ، ثم تشترى ماكينة جديدة وتحفظها للفترة الزمنية المقبلة .

١٤ – ١٠ حل المسألة الموضحة فى المسألة ١٤ – ٨ إذا كان الهدف هو تعظيم الخصم الكلى للربح للسنوات الأربع التالية بمعدل فائدة 10 فى المئة فى السنة .

بدون سعر خصم ، تكون الصيغة العكسية للربح الأمثل هى (٣) فى المسألة ١٤ – ٨ . وباستخدام القيمة الحالية للمرحلة j تصبح الصيغة

(١)

$$m_j(u) = \max\{I(u) - M(u) + \alpha m_{j+1}(u+1),\ I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m_{j+1}(1)\}$$

وهنا

$$\alpha = \frac{1}{1+0.10} = 0.90909091$$

نحل (١) بنفس الطريقة كما فى المسألة ١٤ – ٩ . ويقدم الحل فى جدول ١٤ – ١٤ . بالمقارنة بجدول ١٤ – ١٣ نجد أنه فى هذه الحالة لم يغير الخصم من السياسه المثلى التى مازالت—احفظ ، اشترى ، احفظ ، احفظ—ولكنها خفضت الحل الأمثل إلى 26777 دولار .

جدول ١٤ - ١٤

	u				
	1	2	3	4	5
$m_4(u)$	9100	8400	6500	$-M$	4000
$d_4(u)$	احفظ	احفظ	احفظ	...	اشتر
$m_3(u)$	16 736	14 309	$-M$	12 373	$-M$
$d_3(u)$	احفظ	احفظ	...	اشتر	...
$m_2(u)$	22 108	$-M$	20 215	$-M$	$-M$
$d_2(u)$	احفظ	...	اشتر	...	...
$m_1(u)$	...	26 777	...	...	...
$d_1(u)$	...	احفظ	...	...	...

مسائل مكملة

Supplementary Problems

١٤ - ١١ تلقى دافيد جيرمى المحاسب القانونى عروضاً من ثلاثة عملاء لتقديم خدماته . ويرغب كل عميل أن يعمل السيد دافيد على أساس تفرغ كامل (كل الوقت) ، ومع ذلك يرغب كل عميل فى استخدام السيد دافيد عدداً من أيام الأسبوع ، طبقاً لما يعرضه السيد دافيد بالرسوم الموضحة بالجدول ١٤ - ١٥ . كم يوماً يستطيع السيد دافيد جيرمى تقديمها لكل عميل لتعظيم الدخل الأسبوعى ؟

الجدول ١٤ - ١٥

عدد الأيام	العميل 1, $	العميل 2, $	العميل 3, $
0	0	0	0
1	100	125	150
2	250	250	300
3	400	375	400
4	525	500	550
5	600	625	650

١٤ - ١٢ أعد حل المسألة ١٤ - ١١ ، وذلك بإضافة قيد ، وهو أن السيد جيرمى يعمل على الأقل يوماً واحداً لكل عميل . (ملحوظة : اجعل إمكانية ألا يعمل ــ ولو يوماً واحداً ــ لأى عميل تكلفة جزائية) .

١٤ - ١٣ تستطيع إحدى الشاحنات نقل حتى ١٠ أطنان من المواد ، وتلقت طلبات من أربع شركات لتنقل تجارتها من مدينة سان لويس إلى نيو أورليانز . وتستطيع الشركات تقديم أصناف بقدر ما يطلبه كابتن الشاحنة . وتشحن الأصناف بالوحدة . وجدول ١٤ - ١٦ يوضح أسعار الشحن .

جدول ١٤ - ١٦

سعر الشحن دولار / صنف	وزن الأصناف طن / صنف	الشركة
10	1	I
25	2	II
45	3	III
60	4	IV

كم صنفاً من كل شركة يجب أن يقبلها كابتن الشاحنة لتعظيم سعر الشحن ، بدون زيادة طاقة الشحن ؟

١٤ - ١٤ استخدم البرمجة الديناميكية فى حل المسألة ١ - ١٦ بإضافة شرط ، وهو أن الألعاب تنتج بأعداد صحيحة . (ملحوظة : وحدة الزمن هى نصف ساعة) .

١٤ - ١٥ تعظيم : $z = 5x_1^2 + 5x_2^3 + 3x_3$

علماً بأن : $3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 11$

عند كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

١٤ - ١٦ استخدم البرمجة الديناميكية لحل المسألة ١ - ٨

١٤ - ١٧ استخدم البرمجة الديناميكية لحل المسألة ٩ - ١٠

١٤ - ١٨ استنتج صيغة عكسية ، وحل المسألة الموضحة فى المسألة ١٤ - ٨ بإضافة إما حفظ الماكينة الحالية ، أو شراء ماكينة جديدة ، ويمكن أيضاً للشركة شراء ماكينة مستعملة أصغر من الموديل الحالى . اعتبر أن تكلفة إحلال ماكينة عمرها سنة بماكينة عمرها سنة ليكون الفرق بين تكلفتى إحلالهما بماكينات جديدة ، كمثال ، تكلفة إحلال ماكينة عمرها ٣ سنوات بماكينة عمرها سنة واحدة هى 1400 = 3500 - 4900 دولار

١٤ - ١٩ ضع صيغة قياسية ، ثم حل المسألة التالية : تمتلك إحدى الشركات عربة نقل عمرها سنة واحدة ، والجدول ١٤ - ١٧ يوضح تكلفة حفظها واستبدالها ، والعائد الذى ينتج عنها ، بالإضافة إلى بيانات العربات الجديدة التى يمكن شراؤها فى المستقبل ، وكل الكميات بوحدات 1000 دولار . ولا تحفظ العربات أكثر من ثلاث سنوات ، ويكون الاستبدال بعربات جديدة . حدد سياسة الإحلال للشركة فى السنوات الخمس التالية التى تؤدى إلى أعلى ربح .

جدول ١٤ - ١٧

	العمر	العائد	الصيانة	الإحلال
الطراز الحالي	1 2 3	20 17 ...	8 11 ...	18 25 35
الطراز الجديد	0 1 2 3	21 20 17 ...	1 8 11 ...	6 19 26 36
طراز للسنة التالية	0 1 2 3	21 17 15 ...	1 7 12 ...	6 18 26 36
طراز سنتين	0 1 2 3	22 19 17 ...	2 8 12 ...	7 19 24 37
طراز ثلاث سنوات	0 1 2 3	24 18 15 ...	3 4 11 ...	6 12 27 37
طراز أربع سنوات	0 1 2 3	25 19 14 ...	3 5 10 ...	6 13 27 38

١٤ - ٢٠ حل مسألة التعيين 3 x 3 بمصفوفة التكلفة

		الأعمال		
		1	2	3
العمال	1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
	2	c_{21}	c_{22}	c_{23}
	3	c_{31}	c_{32}	c_{33}

(انظر الفصل ٩) ، باستخدام البرمجة الديناميكية . فى حالة المصفوفات الأكبر ، هل يناسب هذا المدخل الطريقة الجرية ؟

١٤ - ٢١ حل المسألة ١٤ - ٧ بالخصم ، إذا كان سعر الفائدة المؤثر هو 7 فى المئة لكل سنة .

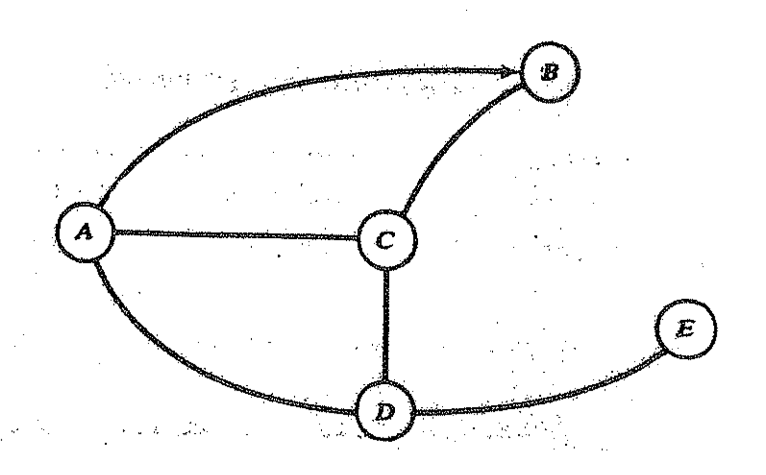
١٤ - ٢٢ حل المسألة ١٤ - ١٨ بالخصم ، إذا كان سعر الفائدة هو 8 فى المئة لكل سنة .

تحليل الشبكات
Network Analysis

الشبكات NETWORKS

الشبكة هي مجموعة من النقط تسمى « عقد » ، ومجموعة من المنحنيات تسمى « الأفرع » (أو الأقواس أو الوصلات) التي تصل بين أزواج من العقد . والشبكات التي ستؤخذ في الاعتبار هنا هي الشبكات التي يصل بين كل زوج من العقد فرع واحد على الأكثر . وسنرمز للعقد بالحروف ، وللفروع بأسماء العقد التي تصل بينها .

مثال ١٥ ـــ ١ يبين شكل ١٥ ـــ ١ شبكة تتكون من خمس عقد ، تسمى A حتى E ، وستة أفرع تعرف بالمنحنيات AB, AC, AD, BC, CD and DE



شكل ١٥ – ١

يكون الفرع متجهاً (موجهاً) إذا كان له اتجاه مرتبط به . وطبيعياً تحدد الاتجاهات بالأسهم . ويحدد السهم على الفرع AB في شكل ١٥ ـــ ١ أن هذا الفرع موجه من A إلى B . وأن أى حركة على هذا الفرع يجب أن تبدأ عند A ، وتنتهى عند B ؛ ولا يسمح بالحركة من B إلى A .

ويكون الفرعان « متصلين » إذا كانت لهما عقدة مشتركة . وفي الشكل ١٥ - ١ الأفرع AB ، AC تكون متصلة ، ولكن الأفرع AB،CD ليست متصلة ، والمسار هو تتابع من الأفرع المتصلة ، بحيث إنه عند تبادل العقد والأفرع لاتتكرر أى عقدة . وتكون الشبكة « متصلة » إذا كان لكل زوج من العقد في الشبكة على الأقل مسار واحد يصل هذا الزوج . إذا كان هذا المسار وحيداً لكل زوج من العقد ، تسمى الشبكة المتصلة « شجرة » . وبالتكافؤ .. فإن الشجرة تكون شبكة متصلة لها عقدة واحدة أكثر من الأفرع .

مثال ١٥ ــ ٢ فى شكل ١٥ ــ ١   {ED, DA, AB}   تكون مساراً ، ولكن تتابع الأفرع المتصلة   {CA, AD, DC, CB} ليست مساراً ، حيث تقع العقدة C مرتين فيه ، وتكون الشبكة متصلة ، وتظل متصلة حتى إذا حذفت الأفرع DA ، AB . وإذا حدث أن حذفت DE ، فإن الشبكة تكون متصلة ، حيث إنه لن يكون هناك مسار يصل بين D ، E . ولأن D ; C يتصلان بثلاثة مسارات ، فإن الشبكة لاتكون شجرة .

مسائل النطاق الأدنى MINIMUM-SPAN PROBLEMS

يحتوى النطاق الأدنى على مجموعة من العقد ، ومجموعة من الأفرع « المقترحة » لايوجد بينها فرع « متجه » . وكل فرع متجه له تكلفة لاسلبية مرتبطة به . ويكون الهدف هو إنشاء شبكة متصلة تحتوى على كل العقد ، بحيث يكون مجموع التكلفة المرتبطة بهذه الأفرع أقل مايمكن . وسنفرض أنه توجد أفرع مقترحة كافية لتأكيد وجود حل .

وليس من الصعب القول أن مسألة النطاق الأدنى تحل دائماً بشجرة (إذا اتصلت عقدتان فى الشبكة المتصلة بمسارين ، فإن أحد هذه المسارات يجب أن يحتوى على فرع لايسبب حذفه قطع الشبكة ولكنه يسبب تخفيض التكلفة الكلية فقط) . وتوجد الشجرة ذات النطاق الأدنى بالاختيار الأولى لأى عقدة وتحديد أى من الأفرع على هذه العقدة له أقل أصغر تكلفة . ويقبل هذا الفرع كجزء من الشبكة النهائية ، وتستكمل الشبكة بعد ذلك بالتكرار . وفى كل مرحلة من العملية التكرارية يجب تركيز الانتباه على العقد المتصلة أصلاً ببعضها . وتؤخذ كل الأفرع التى تصل هذه العقد بعقد غير متصلة ، وتحدد أرخص هذه التفريعات . وتفك الأفرع المتساوية اختيارياً . ويقبل هذا الفرع كجزء من الشبكة النهائية . وتنتهى عملية التكرار عندما تتصل كل العقد . (انظر المسألة ١٥ ــ ١ ، ١٥ ــ ٢) .

إذا كانت كل التكلفة واضحة ومحددة (يمكن الحصول على ذلك بتغييرات صغيرة جداً) ، فإنه يمكن إثبات أن شجرة النطاق الأدنى تكون وحيدة وتنتج من الطريقة السابقة لأى اختيار لعقدة البداية .

مسائل أقصر طريق SHORTEST-ROUTE PROBLEMS

تتضمن مسألة أقصر طريق شبكة متصلة لها تكلفة لاسلبية متصلة بكل فرع . وتسمى إحدى العقد « المصدر » ***source*** ، والعقد الأخرى تسمى « المصب » ***sink.*** (ولاتتضمن هذه التسميات توجيه أفرع الشبكة ؛ إنما تقترح فقط الاتجاه الذى يطبق عليه طريقة الحل) . ويكون الهدف هو تحديد المسار الذى يصل بين المصدر والمصب ، بحيث إن مجموع التكلفة المتصلة بالأفرع فى المسار يكون أقل مايمكن .

وتحل مسائل أرخص مسار بالطريقة التالية ، وفيها تفك كل المتساويات إختيارياً .

الخطوة ١ : انشيء بجدولة تحت كل عقدة كشفاً أساسياً فى ترتيب تصاعدى للتكلفة الأفرع التى تقع عليها . ويكتب كل فرع تحت أى عقدة باسم العقدة الأولى له . احذف من الكشف أى فرع تكون العقدة الثانية له كمصدر ، أو العقدة الأولى كمصب .

الخطوة ٢ : وضح المصدر بنجمة ، وعين لها القيمة 0 . خصص أرخص فرع يقع على المصدر ووضحة بدائرة . وضح العقدة الثانية لهذا الفرع بنجمة ، وعين لهذه العقدة قيمة تساوى تكلفة الفرع . احذف من الكشف الأساسى كل الأفرع الأخرى التى لها العقد الجديدة الموضحة بنجمة كعقدة ثانية .

الخطوة ٣ : إذا كانت العقدة الجديدة الموضحة بنجمة هى مصب ، فاذهب إلى الخطوة ٥ . وإذا لم تكن كذلك ، فاذهب إلى الخطوة ٤ .

الخطوة ٤ : اعتبر كل العقد الموضحة بنجوم ، والتى لها أفرع بدون دوائر تحتها ، وذلك فى الكشف الأساسى الحالى . وأضف لكل عقدة القيمة المعينة لهذه العقدة إلى تكلفة أرخص فرع تحتها بدون دائرة . ارمز لأصغر مجموع منها بالرمز M ، ووضح هذا الفرع بدائرة ، والتى تساهم تكلفته فى M . وضح العقدة الثانية لهذا الفرع بنجمة ، وعين لها القيمة M . احذف من الكشف الأساسى كل الأفرع الأخرى التى لها هذه العقد الجديدة الموضحة بنجمة كعقد ثانية . اذهب إلى الخطوة ٣ .

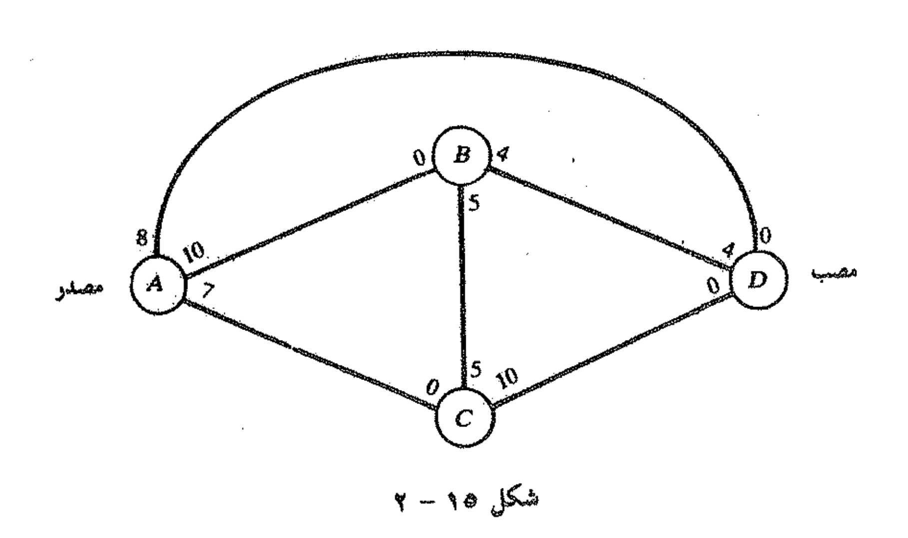
الخطوة ٥: *z هى القيمة المعينة للمصب . ونحصل على مسار أقل تكلفة عكسياً ، ابتداءً من المصب ، وذلك بإضافة كل الأفرع الموضحة بدائرة إلى المسار ، والتى تتبع كل العقد الثانية لها هذا المسار .

(انظر المسائل ١٥ ــ ٣ ، ١٥ ــ ٤) من العمل فى الخطوة ٤ نرى أن مجموعة الأفرع الموضحة بدوائر ، والناتجة من الطريقة تكون شجرة أصغر من الشبكة الأصلية ، لها خاصية أن المسافة الوحيدة (التكلفة) فى الشجرة الأصغر بين المصدر وعقدة أخرى تكون مساوية لأصغر مسافة بين هاتين العقدتين فى الشبكة الأصلية ، ومع ذلك فإنه بوجه عام لن تزيد الشجرة الأصغر من الشبكة .

مسائل التدفق الأعلى MAXIMAL-FLOW PROBLEMS

الهدف من مسائل التدفق الأعلى هو تصميم جدول شحن يجعل كمية المواد المرسلة بين نقطتين أكبر مايمكن . وتسمى نقطة الأصل « المصدر » ، وتسمى نقطة الوصول « المصب » . وتوجد عدة مسارات تصل بين المصدر والمصب مباشرة ، أو من خلال مواقع متوسطة تسمى « نقط الوصل » (نقط وسيطة) يفترض أنه لاتخزن أى مواد فى نقط الوصل ، بمعنى أن أى مواد تصل إلى نقط الوصل تشحن مباشرة للموقع الآخر .

يمكن تمثيل مسألة التدفق الأعلى بشبكة . وتمثل نقط المصدر المصب والوصل بواسطة عقد ، بينا تمثل الأفرع المسارات التى من خلالها تنقل المواد . ويرتبط بكل عقدة N ، وبكل فرع NM يخرج من N عدد لاسلبى طاقة تمثل أكبر كمية من المواد يمكن أن تشحن خلال NM من N .



شكل ١٥ - ٢

مثال ١٥ ــ ٣ يبين شكل ١٥ ــ ٢ شبكة فيها A مصدر ، D مصب ، B ، C كنقط وصل ، وتبين طاقات التدفق لكل فرع فى الاتجاهين بجوار نهاية الأفرع . لاحظ أن 7 وحدات يمكن أن تشحن من A إلى C خلال AC ، ولكن صفر وحدة يمكن أن تشحن فى الاتجاه المضاد ؛ وهذا التماثل يسمح لنا إذا أردنا تحديد اتجاه AC . وعلى النقيض .. فإن التدفق خلال BC يمكن أن يتحرك فى أى اتجاه بطاقة 5 وحدات .

تحل مسائل التدفق الأعلى بالطريقة التالية :

الخطوة ١ : أوجد المسار من المصدر إلى المصب الذى يستوعب تدفق مواد موجب . وإذا لم يوجد أى مسار ، فاذهب إلى الخطوة ٥ .

الخطوة ٢ : حدد أعلى تدفق يمكن أن ينقل خلال هذا المسار ، وأطلق عليه k .

الخطوة ٣ : خفض الطاقة المباشرة (بمعنى الطاقة فى اتجاه التدفق k وحدة) لكل فرع من هذا المسار بعدد k ، وزِدْ الطاقة العكسية بـ k ، وأضف k وحدة إلى الكمية المسلمة إلى المصب .

الخطوة ٤ : اذهب إلى الخطوة ١

الخطوة ٥ : التدفق الأعلى هو كمية المواد المسلمة إلى المصب . ويحدد جدول الشحن الأمثل بمقارنة الشبكة الأصلية بالشبكة النهائية . وأى تخفيض فى الطاقة يعنى شحن .
(انظر المسائل ١٥ ـــ ٦ ، ١٥ ـــ ٧)

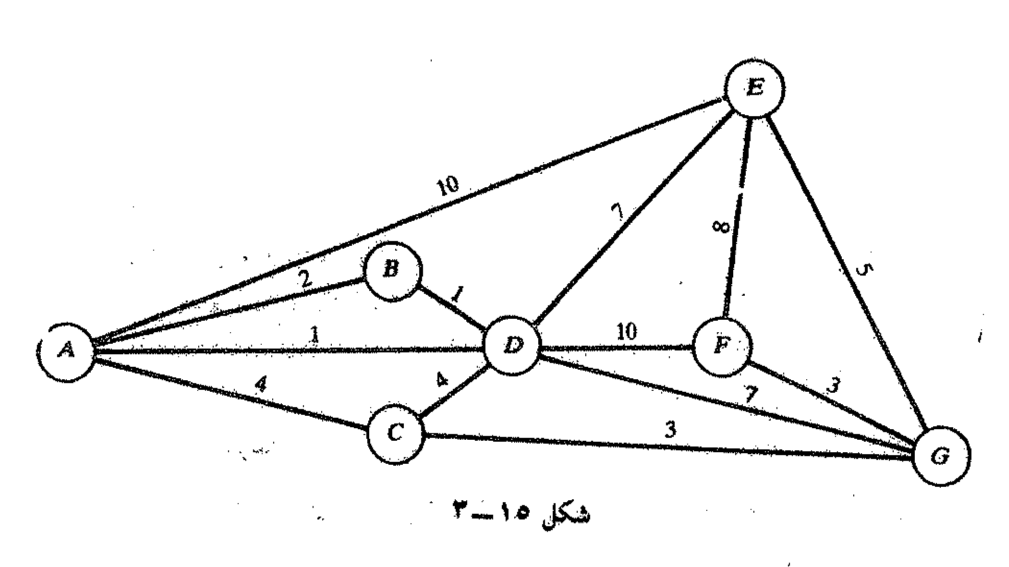
إيجاد مسار التدفق الموجب FINDING A POSITIVE-FLOW PATH

الخطوة ١ هى النقطة الصعبة فى طريقة التدفق الأعلى ـــ وهي تعريف مسار من المصدر حتى المصب بطاقة تدفق موجبه . لاكتشاف هذا المسار ، صِلِ المصدر بكل العقد التى يمكن الوصول إليها بفرع مفرد له طاقة تدفق موجبة فى الاتجاه الأمامى (اتجاه المصدر) . صِلِ هذه العقد بكل العقد الجديدة التى يمكن الوصول إليها بأفرع مفردة لها طاقات موجبة فى الاتجاه الأمامى . استمر فى هذه العملية إلى أن تصل إلى المصب ـــ الذى عنده يكون قد تم تحديد مسار مناسب ـــ أو نجد أنه لايمكن الوصول إلى عقد جديدة من العقد الموجودة ، ولانصل إلى المصب ـــ فى هذه الحالة لايوجد مسار مناسب . (انظر المسألة ١٥ ـــ ٥) .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٥ ـــ ١ حل مسألة النطاق الأدنى للشبكة المعطاة فى شكل ١٥ ـــ ٣ . تمثل الأعداد على الأفرع تكلفة احتواء الأفرع فى الشبكة النهائية .
نختار A كعقدة بداية ، ونأخذ فى الاعتبار كل الأفرع الواقعة عليه ؛ وهى $AE, AB, AD, AC,$ بتكلفة 10, 2, 4, 1, على التوالى ، حيث إن AD هى الأرخص ، ونضيف هذا الفرع إلى الحل ، كما فى شكل ١٥ ـــ ٤ (أ) . العقد D ، A تكون متصله الآن .



شكل ١٥ ـــ ٣

نأخذ فى الاعتبار بعد ذلك كل الأفرع الواقعة على أى من D ، أو A ، والتى تتصل بالعقد الأخرى . وهذه العقد هى $AE, AB, AC, DB, DE, DF, DG,$ and $DC,$ بتكلفة 10, 2, 4, 1, 7, 10, 7, and 4, على التوالى . وحيث إن DB هى الأرخص ، فإننا نصلها بشكل ١٥ ـــ ٤ (أ) ، ونحصل على شكل ١٥ ـــ ٤ (ب) ، وتصبح العقد المتصلة هى $A, B,$ and $D.$

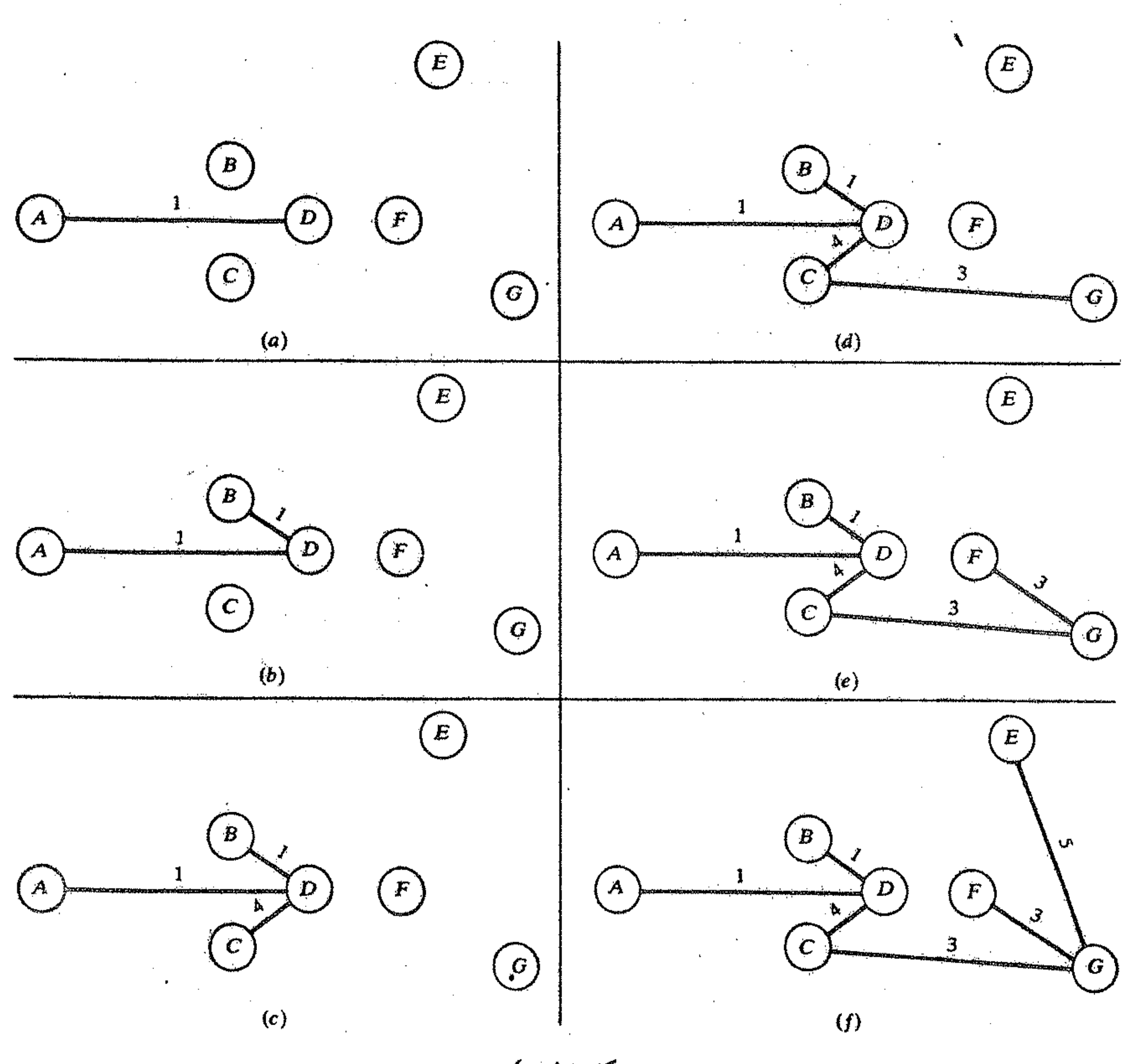
نأخذ فى الاعتبار بعد ذلك كل الأفرع الواقعة على $A, B,$ or D ، والتى تتصل إلى العقد الأخرى . وهى $AC, DE, DF, DG,$ and $DC,$ بتكلفة 10, 4, 7, 10, 7,4 وأرخص فرع هو إما AC ، أو DC . ثم نختار DC ونوصله إلى الشكل ١٥ — ٤ (ب) لنحصل على شكل ١٥ — ٤ (جـ) .

بالاستمرار فى هذه الطريقة نحصل بالتالى على الأشكال ١٥ — ٤ (د) حتى ١٥ — ٤ (و) . ويحتوى الشكل ١٥ — ٤ (و) على كل العقد ، ومن ثم فهو شبكة النطاق الأدنى ، وأقل تكلفة لتوصيل الشبكة هى

$$z^* = 1 + 1 + 4 + 3 + 3 + 5 = 17$$

١٥ – ٢ تخطط إحدى جهات خدمة الحدائق لتطوير مساحة خالية للسياحة . تحددت أربعة مواقع فى المنطقة للوصول بواسطة السيارات . هذه المواقع والمسافات بينها (بالميل) توضح فى الجدول ١٥ – ١ . ولإيقاع أقل ضرر على البيئة ترغب جهة خدمة الحدائق تقليل الأميال من الطريق اللازم للوصول إلى المكان . حدد عدد الطرق التى يجب أن تبنى لتحقيق هذا الهدف .

هذه المسألة هى مسألة نطاق أدنى . العقد هى الأربعة مواقع التى ستتطور ومدخل الحديقة ، بينما الأفرع المقترحة هى الطرق الموصلة إلى المواقع . والتكلفة هى الأميال . ويبين الشكل ١٥ – ٥ الشبكة الكلية ، حيث إن كل موقع يُمثل بأول حرف من اسمه .



شكل ١٥ — ٤

نختار مدخل الحديقة كعقدة البداية . وتُوضّح تكلفة الأفرع الواقعة على هذه العقدة فى الصف الأول من الجدول ١٥ –١ . وحيث إن أقل تكلفة هى 7.1 ، فإننا نضيف الفرع من مدخل الحديقة إلى المساقط المائية إلى الشبكة .

نعتبر بعد ذلك كل الأفرع الموصلة إلى موقع جديد مدخل الحديقة أو المساقط المائية . وهذه الأفرع هى من مدخل الحديقة إلى الصخور السحرية ، ونقطة الغروب ، والحديقة ، وبالمثل من المساقط المائية إلى نفس المواقع الثلاثة . من هؤلاء .. فإن أرخصها هو الموصل من المساقط المائية إلى الصخور السحرية ؛ لذلك نوصلها إلى الشبكة .

جدول ١٥ – ١

	مدخل الحديقة	المساقط المائية	الصخور السحرية	نقطة الغروب	الحديقة
مدخل الحديقة	...	7.1	19.5	19.1	25.7
المساقط المائية	7.1	...	8.3	16.2	13.2
الصخور السحرية	19.5	8.3	...	18.1	5.2
نقطة الغروب	19.1	16.2	18.1	...	17.2
الحديقة	25.7	13.2	5.2	17.2	...

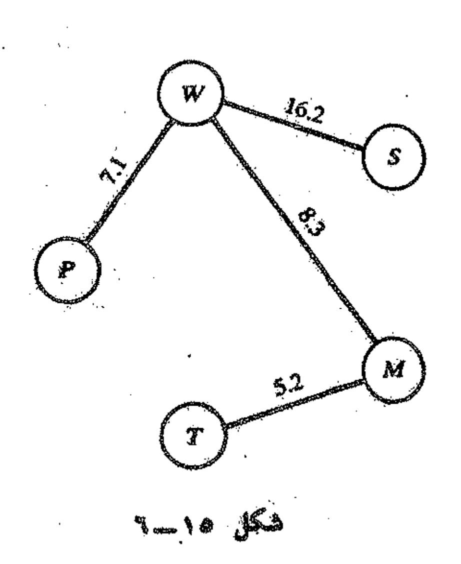
نعتبر بعد ذلك كل الأفرع إلى نقطة الغروب أو الحديقة إما من المدخل ، أو المساقط المائية ، أو الصخور السحرية . من هؤلاء .. الفرع من الصخور السحرية إلى الحديقة تكون له أقل تكلفة ؛ لذلك يضاف أيضاً إلى الشبكة .

عند هذه المرحلة نجد أن الموقع الوحيد الذى لم يُصَلْ هو نقطة الغروب . وأرخص فرع يصل نقطة الغروب بأى موقع آخر هو من المساقط المائية ، وبإضافة هذا الفرع إلى الشبكة نصل إلى الشكل ١٥ – ٦ الذى له أقل تكلفة .

ميل

$$z^* = 7.1 + 8.3 + 5.2 + 16.2 = 36.8 \text{ mi}$$

شكل ١٥ ــ ٥



شكل ١٥ ــ ٦

١٥ – ٣ يعيش أحد الأفراد فى مدينة ريدجوود بولاية نيوجرسى ، ويعمل بمدينة وينالى بولاية نيوجرسى ، ويبحث عن طريق سيارات يجعل وقت القيادة الصباحية أقل مايمكن . وقد سجل هذا الشخص وقت القيادة (بالدقيقة) على الطرق السريعة بين البلدان المتوسطة ، وهذه البيانات مدونة فى الجدول ١٥ – ٢ . مدخلات الجدول الخالية من البيانات تعبر عن عدم وجود طريق سريع يربط هذه النقط مباشرة . حدد أحسن طريق لهذا الشخص .

جدول ١٥ – ٢

	ريد جوود	كليفتون	أورانج	تروى هيلز	بارسيانى	ويانى
ريد جوود	...	18	...	32	...	...
كليفتون	18	...	12	28	...	...
أورانج	...	12	...	17	...	32
تروى هيلز	32	28	17	...	4	17
بارسيانى	...	...	...	4	...	11
ويانى	...	...	32	17	11	...

يمكن صياغة الموقف فى صورة مسألة أقصر طريق . تمثل المدن بعقد ، والطرق السريعة بالأفرع ، وتكون التكلفة المرتبطة بالأفرع هى وقت السفر . والمصدر هو ريدجوود ، والمصب هو ويانى .

الخطوة ١ : يوضح شكل ١٥ – ٧ (أ) الكشف الأساسى ، وفيه تمثل كل مدينة بأول حرف من اسمها . وتختفى الأفرع CR and TR تحت C and T, على التوالى ، وتظهر RC and RT تحت المصدر فقط بالتماثل ، ولانوضح أى أفرع باستخدام المصب كعقدة أولى .

الخطوة ٢ : نوضح عقدة المصدر بنجمة ، R ، ونعين لها القيمة صفر . أرخص فرع يغادر R هو RC ، ونوضح بنجمة ، ونعين لها القيمة 18 وهى تكلفة RC نوضح الفرع RC بدائرة ، وتحذف من الشكل ١٥ – ٧ (أ) كل الأفرع الأخرى التى لها العقد الثانية ، وهى C بمعنى OC and TC. ويكون الكشف الأساسى الجديد هو الشكل ١٥ – ٧ (ب) .

الخطوة ٤ : العقد الموضح بنجوم هى C ، R . ومجموع العائد هو 32=32+0 تحت R ، ونحصل عليه بإضافة قيمة R إلى تكلفة RT ، 30=12+18 تحت C ، ونحصل عليه بإضافة قيمة C إلى تكلفة CO . وحيث إن 30 هى المجموع الأصغر ، نوضح CO بدائرة و O بنجمة ، ونعطى O القيمة 30 ، ونحذف من شكل ١٥ – ٧ (ب) كل الأفرع الأخرى التى لها O كعقدة ثانية ؛ بمعنى TO. وتكون النتيجة هى الشكل ١٥ – ٧ (جـ) .

الخطوة ٤ : العقدة الموضحة بنجوم هى R ، C ، O . ومجموع العائد هو 32=32+0 تحت R ، 46=28+18 تحت C ، 47=17+30 تحت O . وأصغر مجموع هو 32 ؛ ومن ثم نوضح RT بدائرة ، و T بنجمة ، ونعطى T القيمة 32 ، ونحذف من الشكل ١٥ – ٧ (جـ) كل التفريعات التى لها T كعقدة ثانية . وتكون النتيجة هى شكل ١٥ – ٧ (د) .

الخطوة ٤ : العُقَدْ الوحيدة الموضحة بنجوم ، والتى لها أفرع غير موضحة بدوائر تحتها فى الكشف الأساسى الحالى فى شكل ١٥ – ٧ (د) هى O ، T . مجموع العائد لهذه العقد هو 62=32+30 ، 36=4+32 على التوالى . لذلك نوضح TP بدائرة ، P بنجمة ، ونعطى P القيمة 36 ، ونحذف كل الأفرع الأخرى التى لها P عقدة ثانية ، ولاتوجد أى واحدة من هذا النوع . ويكون الكشف الأساسى الجديد هو شكل ١٥ – ٧ (هـ)

الخطوة ٤ : العُقَدْ الوحيدة الموضحة بنجوم ، والتى لها أفرع غير موضحة بدوائر تحتها فى الكشف الأساسى الحالى هى O ، T ، P . ويكون مجموع العوائد على التوالى 62=32+30 ، 49=17+32 ، 47=11+36 . وحيث إن 47

هو أصغرها ، نوضح PW بدائرة ، W بنجمة (المصب) ، ونعطى W القيمة 47 ، ونحذف من شكل ١٥ - ٧ (هـ) كل الأفرع الأخرى التى لها W كعقدة ثانية . تكون النتيجة شكل ١٥ - ٧ (و)

الخطوة ٥ : يكون أقل وقت قيادة من ريدجوود إلى ويبانى هو : $\hat{z}^* = 47$. دقيقة . ولتحديد المسار الأمثل ، نبحث فى شكل ١٥ - ٧ (و) عن فرع موضح بدائرة له W كعقدة ثانية ، فتكون PW ، ثم بالبحث عن فرع موضح بدائرة له P كعقدة ثانية ، فيكون TP . نبحث عن فرع موضح بدائرة له T كعقدة ثانية ، فيكون RT . وحيث إن R هى المصدر ، فيكون المسار المطلوب هو $\{RT, TP, PW\}$.

R	C	O	T	P	W
RC 18	CO 12	OC 12	TP 4	PT 4	
RT 32	CT 28	OT 17	TW 17	PW 11	
		OW 32	TO 17		
			TC 28		

(أ)

R* (0)	C* (18)	O	T	P	W
(RC 18)	CO 12	OT 17	TP 4	PT 4	
RT 32	CT 28	OW 32	TW 17	PW 11	
			TO 17		

(ب)

R* (0)	C* (18)	O* (30)	T	P	W
(RC 18)	(CO 12)	OT 17	TP 4	PT 4	
RT 32	CT 28	OW 32	TW 17	PW 11	

(جـ)

R* (0)	C* (18)	O* (30)	T* (32)	P	W
(RC 18)	(CO 12)	OW 32	TP 4	PW 11	
(RT 32)			TW 17		

(د)

R* (0)	C* (18)	O* (30)	T* (32)	P* (36)	W
(RC 18)	(CO 12)	OW 32	(TP 4)	PW 11	
(RT 32)			TW 17		

(هـ)

R* (0)	C* (18)	O* (30)	T* (32)	P* (36)	W* (47)
(RC 18)	(CO 12)		(TP 4)	(PW 11)	
(RT 32)					

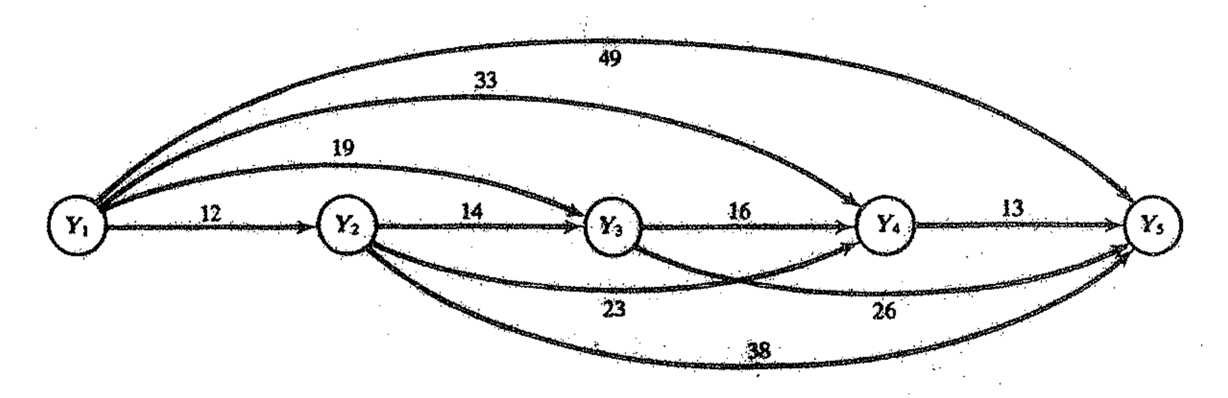
(و)

شكل ١٥ - ٧

١٥ – ٤ وقّعت إحدى الشركات عقداً لتصنيع صناديق تعبئة ، مدة العقد ٤ سنوات غير قابلة للتجديد . وتتطلب العملية الإنتاجية ماكينة خاصة لاتمتلكها الشركة . ويمكن للشركة شراء الماكينة وصيانتها لمدة أربع سنوات ، ثم تبيعها كخردة ، أو استبدال الماكينة فى أى سنة بماكينة جديدة . وتحتاج الموديلات الجديدة صيانة أقل من القديمة . وتقدر تكلفة التشغيل الصافية (ثمن الشراء + الصيانه ــ الاستبدال) لشراء ماكينة فى بداية السنة i ، وبيعها فى بداية السنة j ، وتلك موضحة بالجدول ١٥ – ٣ ، حيث تعبر كل الأرقام عن وحدات الألف دولار .

جدول ١٥ – ٣

i \ j	1	2	3	4	5
1	...	12	19	33	49
2	...	...	14	23	38
3	...	...	...	16	26
4	...	...	...	...	13



شكل ١٥ – ٨

حدد سياسة الاستبدال التى تجعل تكلفة التشغيل الكلية أقل مايمكن للماكينة خلال مدة العقد .

يمكن حل هذه المسألة بالبرمجة الديناميكية ، وبالتبادل فإنها يمكن أن تصاغ فى صورة مسألة أقصر طريق على شبكة موجهة . دع العقد $Y_1, \ldots, Y_4$ تمثل بدايات سنوات العقد ، Y_5 بداية السنة الخامسة . والفرع المتجه من Y_i إلى Y_j يعنى شراء الماكينة عند بداية السنة i ، واستبدالها أو تكهينها عند بداية السنة j . والتكلفة المرتبطة بكل فرع هى تكلفة التشغيل الصافية . وتوضح الشبكة فى شكل ١٥ – ٨ .

يوضح شكل ١٥ – ٩ (أ) الكشف الأساسى لهذه الشبكة الموجهة . وبتطبيق طريقة أرخص مسار عليها نحصل على الأشكال ١٥ – ٩ (ب) حتى ١٥ – ٩ (هـ) على التوالى . ومن الشكل ١٥ – ٩ (هـ)

$$z^* = 45 \quad \text{(ألف دولار)}$$

ويكون المسار الأمثل هو $\{Y_1Y_3, Y_3Y_5\}$. ويمثل هذا المسار سياسة الشراء للماكينة عند بداية السنة الأولى ، واستبدالها بماكينة جديدة عند بداية السنة الثالثة ، وأخيراً تكهين الماكينة التى عمرها سنتان عند بداية السنة الخامسة .

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
Y_1Y_2 12	Y_2Y_3 14	Y_3Y_4 16	Y_4Y_5 13	
Y_1Y_3 19	Y_2Y_4 23	Y_3Y_5 26		
Y_1Y_4 23	Y_2Y_5 38			
Y_1Y_5 49				

أ

Y_1^* (0)	Y_2^* (12)	Y_3	Y_4	Y_5
(Y_1Y_2 12)	Y_2Y_3 14	Y_3Y_4 16	Y_4Y_5 13	
Y_1Y_3 19	Y_2Y_4 23	Y_3Y_5 26		
Y_1Y_4 33	Y_2Y_5 38			
Y_1Y_5 49				

ب

Y_1^* (0)	Y_2^* (12)	Y_3^* (19)	Y_4	Y_5
(Y_1Y_2 12)	Y_2Y_4 23	Y_3Y_4 16	Y_4Y_5 13	
(Y_1Y_3 19)	Y_2Y_5 38	Y_3Y_5 26		
Y_1Y_4 33				
Y_1Y_5 49				

ج

Y_1^* (0)	Y_2^* (12)	Y_3^* (19)	Y_4^* (33)	Y_5
(Y_1Y_2 12)	Y_2Y_5 38	Y_3Y_5 26	Y_4Y_5 13	
(Y_1Y_3 19)				
(Y_1Y_4 33)				
Y_1Y_5 49				

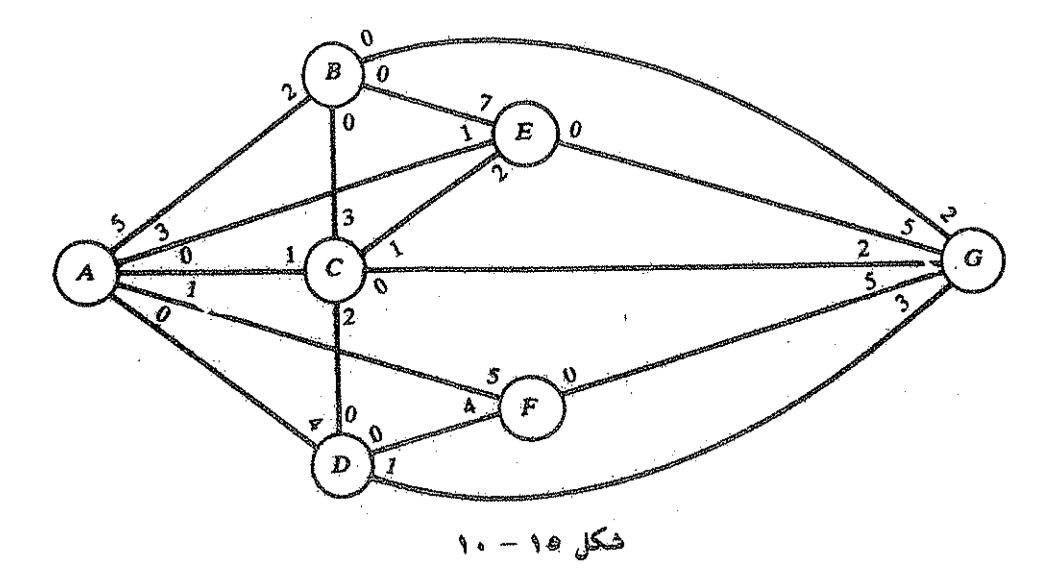
د

Y_1^* (0)	Y_2^* (12)	Y_3^* (19)	Y_4^* (33)	Y_5^* (45)
(Y_1Y_2 12)		(Y_3Y_5 26)		
(Y_1Y_3 19)				
(Y_1Y_4 33)				

هـ

شكل ١٥ – ٩

١٥ - ٥ في شكل ١٥ - ١٠ حدد المسار من المصدر A إلى المصب G الذى يستوعب تدفقاً موجباً .



شكل ١٥ - ١٠

(ب)

(أ)

(ج)

شكل ١٥ - ١١

نبدأ بالمصدر ، ونوجد كل العُقد التى يمكن الوصول إليها مباشرة من A خلال الأفرع التى تسمح بتدفق موجب خارجاً من A وهى B, E, and F كما هو موضح بشكل ١٥ – ١١ (أ) ، ثم نأخذ فى الاعتبار بعد ذلك هذه العقد الثلاثة الجديدة على التوالى .

بالتركيز على B أولاً ، نحدد كل العقد غير الواضحة فى شكل ١٥ – ١١ (أ) ، والتى يمكن الوصول إليها من B خلال الأفرع التى تسمح بتدفق موجب من B، ولايوجد أى منها . وبالتركيز على E نرى أن A, B, C يمكن الوصول إليها خلال أفرع تسمح بتدفق موجب من E، ولكن حيث إن A ، B تظهر فى الشكل ١٥ – ١١ (أ) ، فتضاف C فقط . ومن F يمكن الوصول إلى A ، D خلال الأفرع التى تسمح بتدفق موجب ، ولكن حيث إن A تظهر فى شكل ١٥ – ١١ (أ) فنضيف D فقط . وتكون النتيجة شكل ١٥ – ١١ (ب) .

والآن نعتبر النقط C ، D على التوالى . بالتركيز على C أولاً ، نحدد أن A, B ,E, D يمكن الوصول إليها مباشرة من خلال الأفرع ذات التدفق الموجب من C . وحيث إن هذه العقد تظهر أصلاً فى شكل ١٥ – ١١ (ب) ، فلا نحدث له أى تعديل ، ونعتبر بعد ذلك العقدة D . من D نستطيع الوصول إلى A ، G خلال الأفرع التى تسمح بتدفق موجب . وحيث إن G فقط هى الجديدة ، فإننا نوصلها بالشكل ١٥ – ١١ (ب) ، ونحصل على الشكل ١٥ – ١١ (جـ) . ويتبع ذلك الشكل الأخير أن {AF, FD, DG} هى المسار من المصدر إلى المصب الذى يستوعب تدفقاً موجباً (بوحدة واحدة) .

١٥ – ٦ حدد أعلى تدفق للمواد التى يمكن أن ترسل من المصدر A إلى المصب D خلال الشبكة الموضحة بالشكل ١٥ – ٢ .

مسار واحد من المصدر إلى المصب هو الفرع AD الذى يصل بين هاتين العقدتين مباشرة . ويستطيع أن يستوعب 8 وحدات . بشحن هذه الكمية ، فإننا نسلم 8 وحدات إلى D ، ونخفض طاقة AD بـ 8 ، وحدات ونزيد طاقة DA بـ 8 . ويوضح الشكل ١٥ – ١٢ (أ) الشبكة الناتجة .

مسار آخر من المصدر إلى المصب الذى يستوعب التدفق الموجب هو {AC, CB, BD} . وأعلى كمية من المواد التى يمكن أن ترسل خلال هذا المسار هى 4 وحدات ، بطاقة BD . وبإتمام هذا الشحن ، نزيد الإمداد عند D بـ 4 وحدات إلى 12=4+8 ، وفى نفس الوقت نخفض طاقات AC, CB, and BD بـ 4 وحدات ، ونزيد بنفس الكمية طاقات DB, CA, BC, . ويصبح الشكل ١٥ – ١٢ (أ) هو الشكل ١٥ – ١٢ (ب) .

يستطيع المسار {AC, CD} فى شكل ١٥ – ١٢ (ب) استيعاب 3 وحدات من A إلى D . وبإتمام هذا الشحن ، نزيد الإمداد عند D 3 وحدات 15=3+12 ، ونخفض طاقات 3 AC and CD وحدات . ونزيد أيضاً طاقات CA and DC 3 وحدات . وتكون الشبكة الجديدة ١٥ – ١٢ (جـ) .

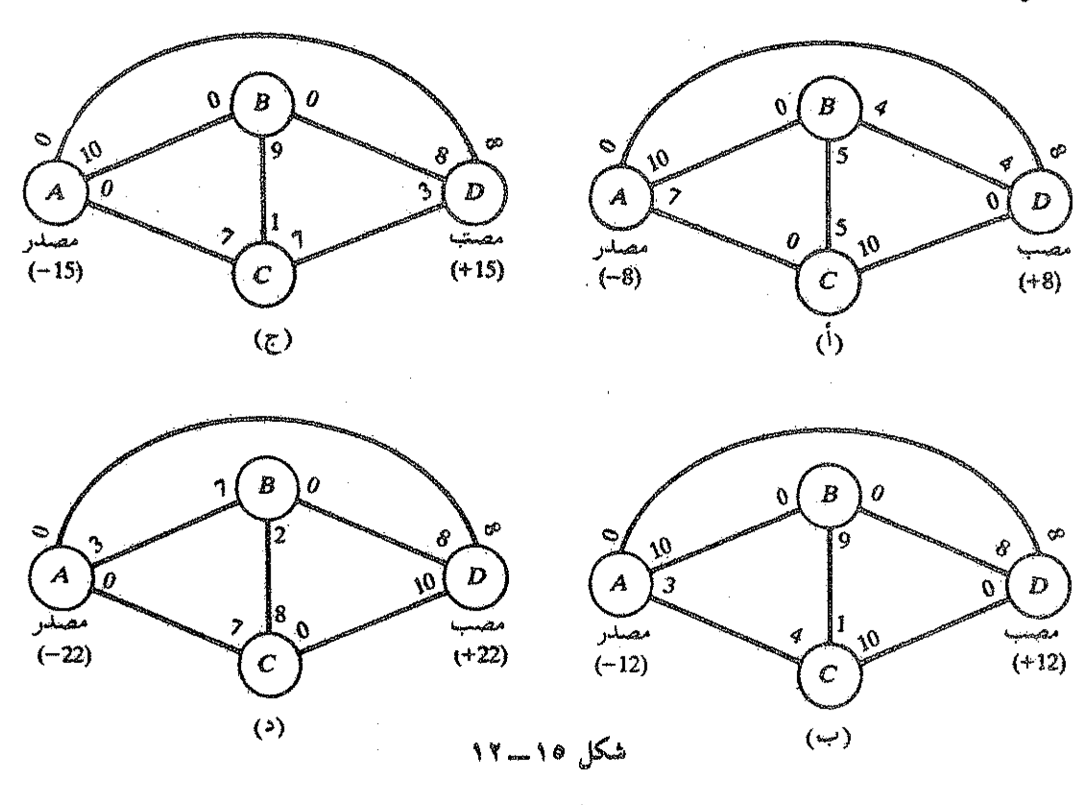
وأيضا نزيد 3 وحدات طاقات CA و DC وتكون الشبكة الجديدة ١٥ – ١٢ (جـ) استيعاب 7 وحدات من المصدر إلى المصب . بعمل ذلك الشحن ، نزيد الامداد عند D إلى 22 = 7+15 وحدة ، ونخفض طاقات AB, BC, CD 7 وحدات ونزيد أيضا 7 وحدات طاقات BA, CB, DC .وتوضح النتيجة فى شكل ١٥ – ١٢ (ء) —

لايوجد مسار من المصدر إلى المصب فى شكل ١٥ – ١٢ (د) يسمح بتدفق موجب . لذلك فإن أكبر كمية يمكن أن ترسل من A إلى D هى 22 وحدة . ولتحديد جدول الشحن الأمثل ، نقارن شكل ١٥ – ١٢ (د) بشكل ١٥ – ١٢ . ونلاحظ التخفيض التالى فى الطاقات : 7 وحدات من A إلى B ، 8 وحدات من A إلى D ، 7 وحدات من A إلى C ، 4 وحدات من B إلى D ، 3 وحدات من B إلى C ، 10 وحدات من C إلى D . وهذه التخفيضات تعتبر كشحنات ، وتكون جدول الشحن الأمثل .

١٥ – ٧ اشرح معنى زيادة الطاقات العكسية كما هو متفق عليه فى الخطوة 3 فى طريقة التدفق الأعلى .

زيادة هذه الطاقات تسمح بتدفقات فى الاتجاهات العكسية فى مراحل متأخرة فى الطريقة . وهذه التدفقات الوضعية ضرورية لتصحيح التدفق السابق تحديده ، والتى ثبت أنها مثالية .

يعطى مثال فى المسألة ١٥ ــ ٦ ، وذلك فى المحاولة الثانية يحدد أن المسار $\{AC, CB, BD\}$ يستطيع أن يستوعب تدفق مباشر 4 وحدات . باستخدام هذا المسار ، ومع ذلك .. ليس مثالياً ، ووجد أن الجدول الأمثل يشحن 3 وحدات من B إلى C ، ولاشىء من C إلى B . بالرغم من ذلك .. فإن شحن 4 وحدات من C إلى B وزيادة الطاقة من B إلى C 4 وحدات تسمح بتصحيح هذا الخطأ بعد ذلك فى البرنامج . وفى الحقيقة .. الخطوة الأخيرة فى الحل بالمحاولات تسمح بشحن 7 وحدات خلال $\{AB, BC, CD\}$ ولكن هذا الشحن لم تكن فى استطاعته زيادة الطاقة فى BC عن قيمتها الأصلية 5 وحدات . وفعلياً هذا التدفق لـ 7 وحدات من B إلى C يصحح التدفق غير الأمثل السابق بـ 4 وحدات من C إلى B ، تاركاً تدفق صافى 3 وحدات خلال BC فى الاتجاه C .

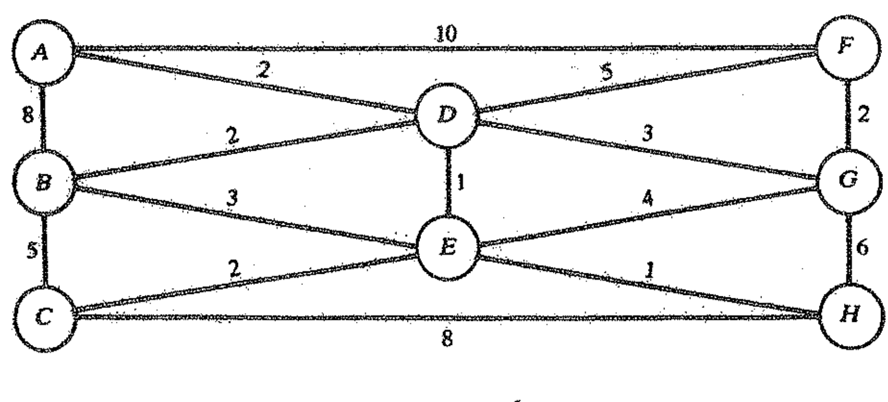


شكل ١٥ ــ ١٢

مسائل مكملة

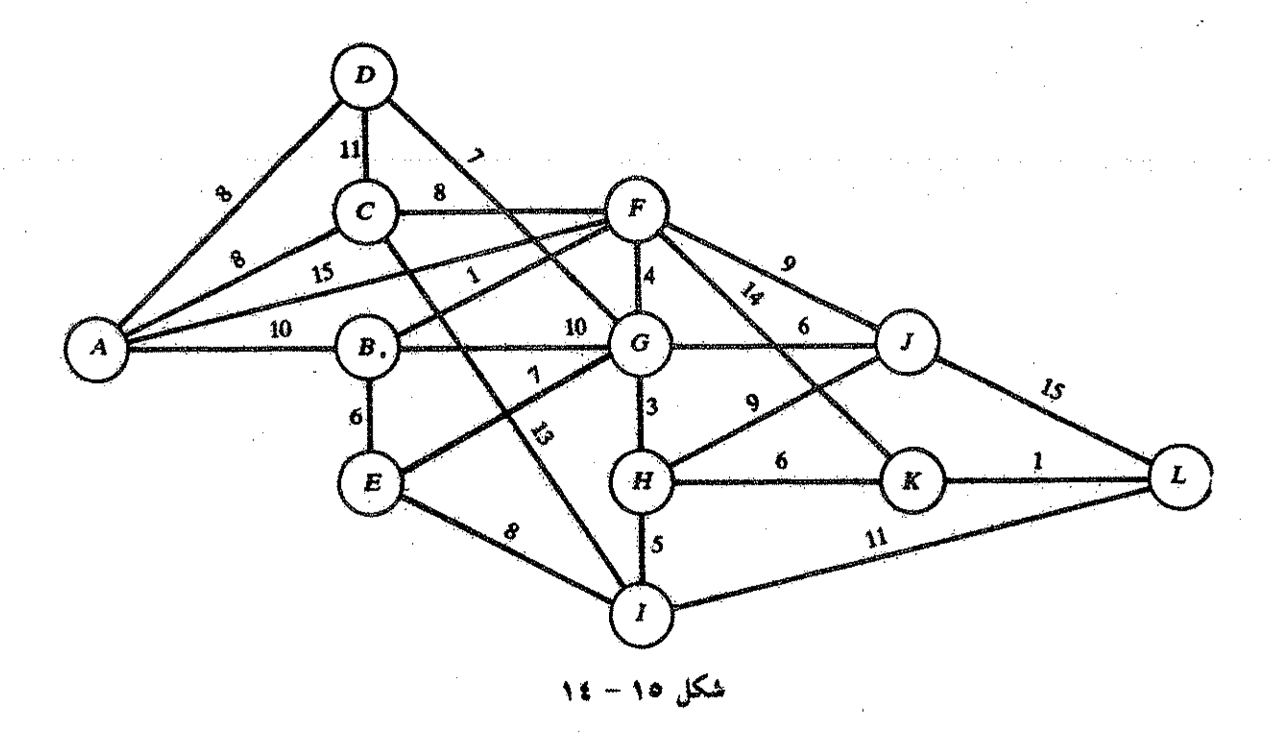
Supplementary Problems

١٥ – ٨ حل مسألة النطاق الأدنى للشبكة الموضحة فى شكل ١٥ – ١٣



شكل ١٥ – ١٣

١٥ - ٩ حل مسألة النطاق الأدنى للشبكة الموضحة فى شكل ١٥ - ١٤ .



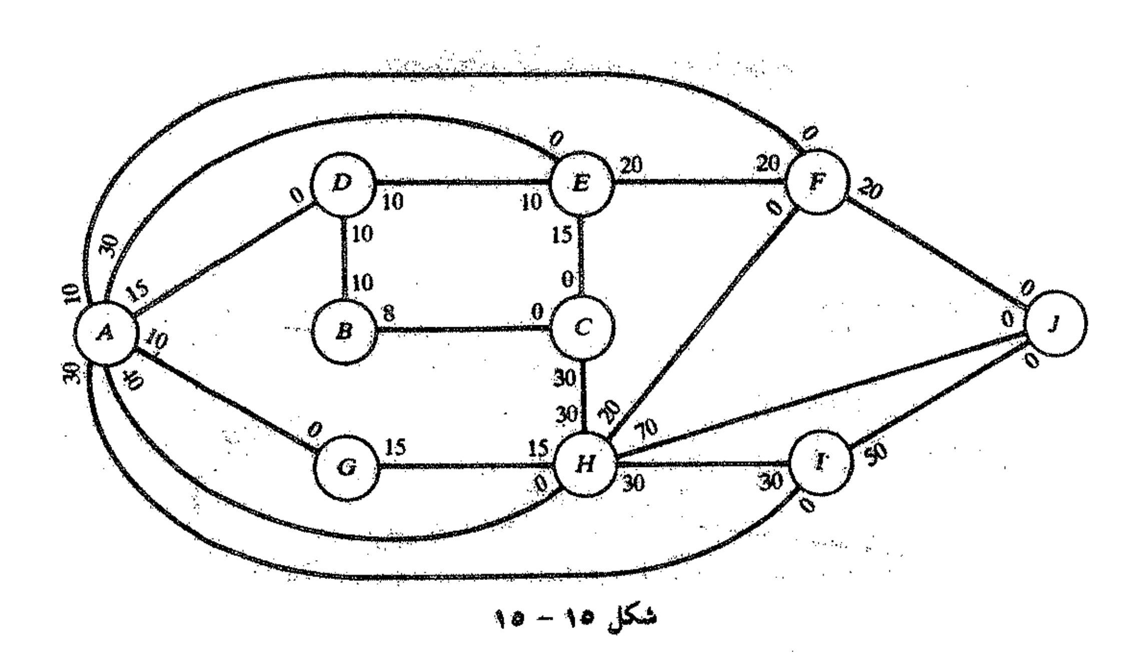
شكل ١٥ - ١٤

١٥ - ١٠ أوجد مسار أقل تكلفة الذى يصل A ، L فى الشبكة فى شكل ١٥ - ١٤ .

١٥ - ١١ حدد أكبر كمية من المواد التى يمكن أن تشحن من H إلى A خلال الشبكة الموضحة فى شكل ١٥ - ١٣ ، بافتراض أن الأعداد على الأفرع تمثل طاقات التدفق فى كلا الاتجاهين .

١٥ - ١٢ حدد أكبر كمية من المواد التى يمكن أن تشحن من A إلى K خلال الشبكة الموضحة فى شكل ١٥ - ١٤ ، بافتراض أن الأعداد على الأفرع تمثل طاقات التدفق فى كلا الاتجاهين .

١٥ - ١٣ حل مسألة التدفق الأعلى للشبكة الموضحة فى شكل ١٥ - ١٥ إذا كانت A هى المصدر ، و J هى المصب .



شكل ١٥ - ١٥

١٥ – ١٤ أعد حل المسألة ١٥ – ١١ إذا كانت H مصدراً ، بالإضافة إلى D .

١٥ – ١٥ يجب أن تنقل احدى الشركات 50 وحدة من المنتجات من لوس انجلوس إلى نيويورك . ويعطى جدول ١٥ – ٤ تكاليف النقل (بالدولار لكل وحدة) بين المخازن المختلفة للشركة ؛ وتعنى النقط بالجدول أنه لايمكن النقل مباشرة بين المخازن المناظرة . أوجد جدول النقل الأمثل . حل المسألة كأقصر طريق أولاً ، ثم — كنوع من التحقق — حل المسألة كمسألة نقل .

جدول ١٥ – ٤

	نيويورك	شيكاغو	سانت لويس	لارامى	فينكس	سان فرنسسكو	لوس أنجلوس
لوس أنجلوس	95	...	39	...	8	7	..
سان فرنسسكو	85	36	...	17	22	...	7
فينكس	...	27	25	14	...	22	8
لارامى	...	19	31	...	14	17	...
سانت لويس	20	14	..	31	25	...	39
شيكاغو	13	...	14	19	27	36	...
نيويورك	...	13	20	...	...	85	95

١٥ – ١٦ قامت إحدى شركات الإنشاءات بتجميع بيانات عن عربات النقل ، كما فى الجدول ١٥ – ٥ (الكميات بالدولار) .

جدول ١٥ – ٥

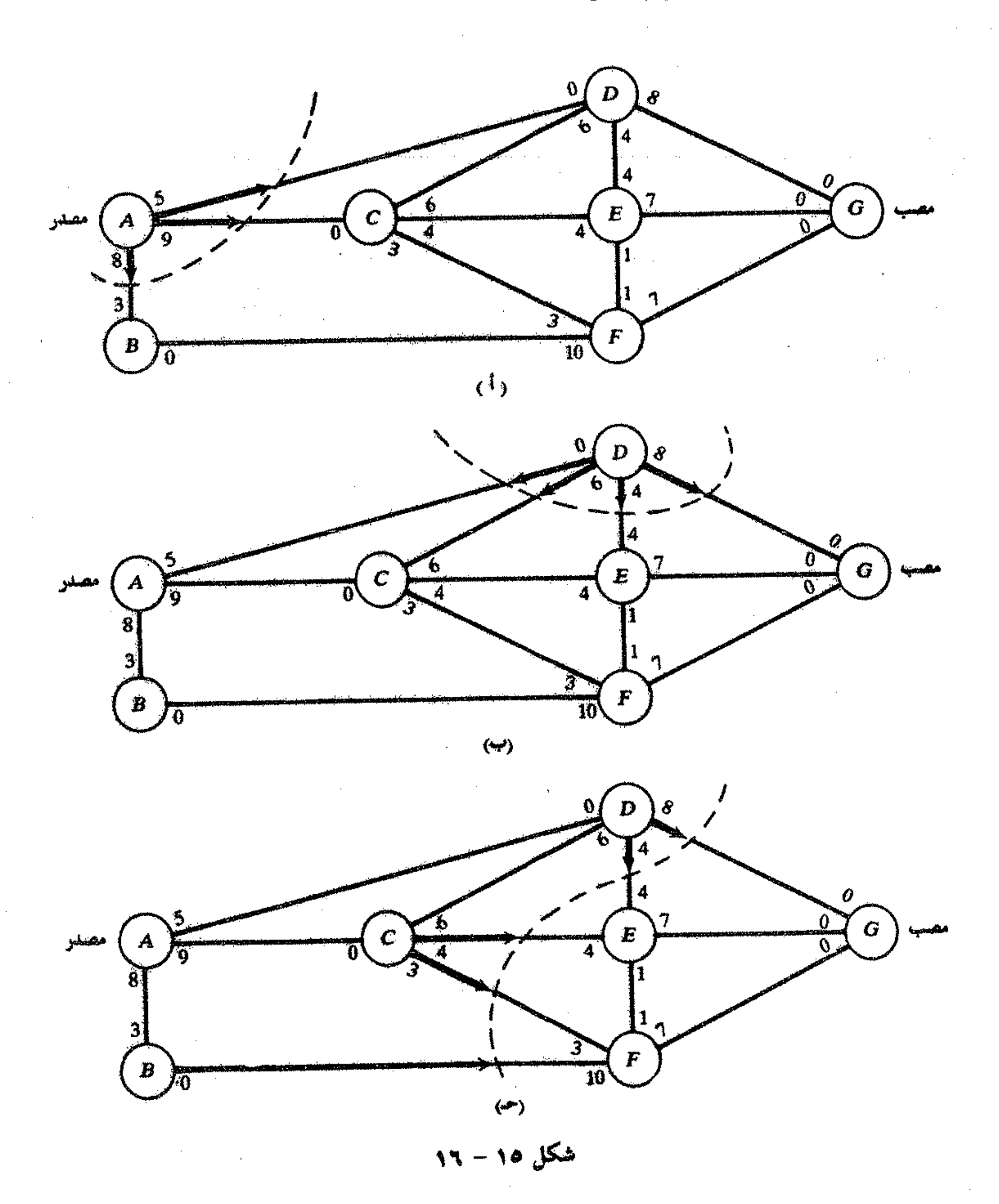
	العمر بالأعوام				
	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5
مصاريف الصيانة	7000	7500	9700	7700	9000
العائد الفاقد للمدينة	500	800	1200	800	1090
قيمة الاستبدال فى نهاية العام	16000	6000	9000	3500	2500

لاتحفظ أى عربة شحن أكثر من خمسة أعوام . حدد سياسة الاستبدال لعربة عمرها حالياً سنتان ، والتى تجعل مصروفات التشغيل أقل مايمكن خلال ٩ سنوات . افترض أن مصروفات السيارة الجديدة هى 21000 دولار ، وتشترى عربات جديدة فقط للاستبدال . حل المسألة أولاً كأقصر طريق ، ثم تحقق من الحل باستخدام البرمجة الديناميكية . (ملحوظة : خذ Y_0 كبداية للفترة الزمنية ، ثم Y_1 إلى Y_9 كبدايات للتسع سنوات التالية ، و Y_{-2} تمثل يوم شراء العربة الحالية Y_{-1} غير المطلوبة) .

١٥ – ١٧ القطع فى شبكة له مصدر ومصب ، وهو أى مجموعة متجهة من الأفرع تحتوى على الأقل على فرع واحد من كل مسار من المصدر إلى المصب . وقيمة القطع هى مجموع طاقات التدفق فى الاتجاهات المحددة للأفرع المكونة للقطع . فى الشبكة الموضحة فى شكل ١٥ – ١٦ ، والتى فيها تقطع ثلاث مجموعات من الأفرع ، ماهى قيم هذه القطع ؟ .

١٥ – ١٨ تنص نظرية أكبر تدفق ، وأقل قطع على أن التدفق الأعلى لأى شبكة بمصدر واحد ومصب واحد خلال الشبكة يساوى قيمة أقل قطع فى الشبكة . باستخدام هذه النظرية ونتائج المسألة ١٥ – ١٧ ، حدد حداً أعلى للتدفق خلال الشبكة فى شكل ١٥ – ١٦ .

١٥ - ١٩ أوجد قطع خلال الشكل ١٥ - ١٠ تكون قيمته 1 ، وباستخدام نظرية التدفق الأعلى وأقل قطع ونتائج المسألة ١٥ - ٥ استنتج أن أعلى تدفق خلال الشبكة هو وحدة واحدة .



شكل ١٥ - ١٦

الجزء الثانى : الطرق الاحتمالية

PART II: Probabilistic Methods

الفصل السادس عشر

نظرية المباريات

Game Theory

المباريات GAMES

المباراة هى موقف تنافسى بين N أشخاص أو مجموعات يطلق عليها « اللاعبون » . وتجرى تحت قواعد موضوعة مسبقاً بعائد معروف . تحدد تلك القواعد الأنشطة الأولية أو تحركات المباراة . ويسمح للاعبين المختلفين بتحركات مختلفه ، ولكن كل لاعب يعرف التحركات الممكنة للاعبين الآخرين .

إذا كسب أحد اللاعبين ما يخسره الآخر ، فإن المباراة تسمى « مباراة صفرية » . والمباراة بين شخصين هى المباراة التى لها لاعبان اثنان فقط ، وتسمى المباراة بين شخصين ، وكذلك الصفرية . « مباريات المصفوفات » . وهذا هو النوع الوحيد الذى سنأخذه فى الاعتبار فى هذا الفصل .

الاستراتيجيات STRATEGIES

السياسة المطلقة هى خطة محددة مسبقاً تصف للاعب التحركات والتحركات المضادة التى سيقوم بها خلال المباراة . وفى مباريات المصفوفات ، نجد أن أى لاعب تكون له مجموعة محددة من السياسات المطلقة ، رغم أن عددها قد يكون كبيراً ، فاللاعب I(II) يعرف مجموعة سياسات اللاعب II(I) ، ولكنه لا يعرف بالتأكيد أى من عناصر هذه المجموعة II(I) سيقوم بها عند بداية لعب المباراة . لذلك .. فإن التوصيف الكامل للمباراة يُعطى بمصفوفة العائد (الربحية) ، جدول ١٦ - ١ ، يعطى الكمية g_{ij} التى يكسبها اللاعب I من اللاعب II عندما ينفذ اللاعب I استراتيجيته المطلقة رقم i ، A_i وعندما يلعب II استراتيجيته المطلقة رقم j ، B_j (مصفوفة الربحية للاعب II هى القيم السالبه للمصفوفة السابقة) .

جدول ١٦ - ١

اللاعب II

اللاعب I	B_1	B_2	$\cdots$	B_n
A_1	g_{11}	g_{12}	$\cdots$	g_{1n}
A_2	g_{21}	g_{22}	$\cdots$	g_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_m	g_{m1}	g_{m2}	$\cdots$	g_{mn}

جدول ١٦ - ٢

اللاعب II

اللاعب I	1	2	3
1	2	−3	4
2	−3	4	−5
3	4	−5	6

مثال ١٦ – ١ : اعتبر المباراة التى يكشف فيها لاعبان عن 1, 2, 3 أصابع لكل منهم . إذا كان مجموع الأصابع المكشوفة زوجياً ، يدفع اللاعب II للاعب I المجموع بالدولارات ؛ وإذا كان المجموع فردياً ، يدفع اللاعب I للاعب II المجموع بالدولارات .

تحدد السياسات المطلقة لهذه المباراة الصفرية البسيطة لشخصين بالتحركات الفردية (لا يمكن عمل هذا بلعب الحظ مثلًا : إذا تحرك إلى المركز أولًا ، سأتحرك إلى الركن الأعلى الأيمن ، وإذا تحرك إلى الركن الأسفل الأيمن سأتحرك .. ..) . وبالإضافة إلى ذلك .. فإن لكلا اللاعبين نفس مجموعة السياسات المطلقة [1, 2, 3] . تعطى مصفوفة الربحية فى الجدول ١٦ ـــ ٢ .

يكون الهدف فى نظرية المباريات هو تحديد «أحسن» استراتيجية للاعب ، مع افتراض أن مُنافسه رشيد ، وأنه سيقوم بتحركات مضادة ذكية . وبالتالى ، فإذا اختار أحد اللاعبين نفس الاستراتيجية المطلقة ، أو نفس الاستراتيجيات بنفس الترتيب ، فإن منافسه سيتعرف على هذا النمط ، وسيتحرك ليهزمه إن أمكن . وعمومًا .. فإن الاستراتيجية المؤثرة هى « الاستراتيجية المختلطة » المحددة بالتوزيع الاحتمالى لمجموعة من الاستراتيجيات المطلقة . للمباراة فى جدول ١٦ ـــ ١ يمكن تعريف الاستراتيجية المختلطة للاعب I بالمتجه الاحتمالى

$$\mathbf{X} \equiv [x_1, x_2, \ldots, x_m]^T$$

حيث إن x_i $(i = 1, \ldots, m)$ تناسب الزمن (بمعنى التكرار النسبى أو الاحتمال) الذى يختار فيه A_i . وبالمثل تكون الاستراتيجية للاعب II هى

$$\mathbf{Y} \equiv [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$$

حيث y_j $(j = 1, \ldots, n)$ هى احتمال أن B_j قد أختيرت . وكإحتمالات ، فإن x_i ، y_j تكون لا سلبية ، عند

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

مثال ١٦ – ٢ : فى مباراة المثال ١٦ –١ إذا كشف اللاعب I دائماً ثلاثة أصابع ، فإن اللاعب II يمكن أن يهزم هذه الاستراتيجية المطلقة بكشف أصبعين فقط دائماً . وإذا نفذ اللاعب I تسلسل الاستراتيجيات المطلقة .... ,3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2 ، فإن اللاعب II يمكن أن يهزم هذه الاستراتيجية بالتسلسل .... ,2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3 .

إذا نفذ اللاعب I الاستراتيجية المختلطة $\mathbf{X} = [1/6, 1/3, 1/2]^T$ ، فإن I يخطط ليكشف إصبعاً واحداً سُدس عدد المرات ، وإصبعين ثُلث عدد المرات ، وثلاثة إصابع نِصف عدد المرات . ولتنفيذ الاستراتيجية ، فإن اللاعب I يجب أن يرمى الزهر قبل كل لعبة . وإذا أظهر الزهر الرقم 1 (الذى له احتمال $1/6$) فإنه يكشف إصبعاً واحداً ؛ وإذا أظهر الزهر الرقم 2 أو 3 (اللذان لهما الاحتمال $1/3 = 2/6$) ، فإنه يكشف إصبعين ؛ وإذا أظهر الزهر الأرقام 4, 5, 6 (التى لها احتمال $1/2 = 3/6$) ، فإنه يكشف ثلاثة أصابع .

المباراة المستقرة STABLE GAMES

افترض أن اللاعبين للمباراة الموضحة فى جدول ١٦ – ١ مقيدون لاستخدام الاستراتيجية المطلقة ، واكتب :

$$m_I \equiv \text{أعلى قيمة لأقل مكسب للاعب I} = \underset{i=1,\ldots,m}{\text{أعلى}} \; \underset{j=1,\ldots,n}{\text{أقل}} \{g_{ij}\} \qquad (١٦ - ١)$$

$$m_{II} \equiv \text{أقل قيمة لأعلى خسارة للاعب II} = \underset{j=1,\ldots,n}{\text{أقل}} \; \underset{i=1,\ldots,m}{\text{أعلى}} \{g_{ij}\} \qquad (١٦ - ٢)$$

إذا لعب اللاعب I الصف الذى يؤدى إلى أعلى قيمة فى (١٦ – ١) ـــ أعلى استراتيجية ـــ فإنه سيكون متأكداً من كسب كمية m_I على أسوأ فرض ؛ بينما بلعب صف آخر ، فإنه يمكن أن يكسب أقل من m_I (وبالتكافؤ ، فى ظل أعلى استراتيجية ، يخسر اللاعب I ـــ m_I على أسوأ فرض) . وبالتناظر .. إذا لعب اللاعب II العمود الذى يؤدى إلى أقل قيمة فى (١٦ –٢) ـــ الاستراتيجية الأعلى ـــ فإن خسارته المؤكدة (التى تعتبر مكسب للاعب I) ستكون m_{II} على أسوأ فرض . سنقول أن هاتين الاستراتيجيتين ستحققان أقل أعلى دلالة .

والآن من التعريف

$$m_I \leq m_{II} \quad (١٦ - ٣)$$

لأى مباراة مصفوفة إذا كانت $m_I = m_{II}$ ، فإن اللاعب I سيضعف موقفه بالبعد عن الاستراتيجية الأعلى ، واللاعب II سيضعف موقفه بالبعد عن أقل أعلى استراتيجية فقط . وهذه المباراة تكون « مستقرة » ، وتكون الاستراتيجيات هى الموصفة مسبقاً بأقل أعلى دلالة مثالية لكل من اللاعبين . بالإضافة إلى ذلك .. فإن كُلًّا من اللاعبين يمكن أن يوافق على كيفية لعب المباراة (بالنسبة للاعب I) ، بمعنى :

$$G^* = m_I = m_{II}$$

تسمى G^* « قيمة » المباراة ؛ وهى الكمية المدفوعة بواسطة اللاعب II للاعب I عندما يستخدم كل منهما استراتيجية المثلى .

وتلخيصاً لذلك .. فإن كل مباراة مستقرة تكون لها قيمة واحدة ، واستراتيجية مثلى (مطلقة) لكل لاعب . (لاحظ أن الاستراتيجيات المثلى لا تحتاج أن تكون وحيدة)

المباريات غير المستقرة UNSTABLE GAMES

إذا تحققت المتباينة (١٦ – ٣) ، فإن المباراة تكون « غير مستقرة » ، وتصبح الاستراتيجية المطلقة الموضحة بأقل أعلى دلالة غير مثلى . وتكون النتيجة الأساسية . لمباريات المصفوفات هى عند استخدام استراتيجيات مشتركة ، فإن المباريات غير المستقرة يكون لها حل أيضاً ، بمعنى استراتيجيات مثلى وقيمة ـــ على أن تستبدل العائد العشوائى بقيمته المتوقعة .

فى ظل الاستراتيجيات المختلطة (المعرفة بالمتجه الاحتمالى X للاعب I ، و Y للاعب II ، يكون العائد من II إلى I متغيراً عشوائياً له القيمة المتوقعة .

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j \quad ١٦ - ٤$$

وبالتناظر مع (١٦ – ١) ، (١٦ – ٢) نكتب :

$$M_I \equiv \text{أعلى قيمة لأقل ربح متوقع للاعب I}$$

$$\equiv \underset{Y}{\text{أعلى}} \left(\underset{X}{\text{أقل}} \, E(X, Y) \right) \quad (١٦ - ٥)$$

$$M_{II} \equiv \text{أقل قيمة لأعلى خسارة متوقعة للاعب II}$$

$$\equiv \underset{X}{\text{أقل}} \left(\underset{Y}{\text{أعلى}} \, E(X, Y) \right) \quad (١٦ - ٦)$$

وفيها X ، Y تتراوح بين متجهات الاحتمال ذات الأبعاد m ، n على التوالى . لذلك نحصل على :

نظرية أقل أعلى : ***Minimax theorem*** لأى مباراة مصفوفة ، توجد استراتيجية مثلى X^* ، Y^* بحيث إن

$$E(X^*, Y^*) = M_I = M_{II} = G^*$$

وبمعنى آخر .. فإن أى مباراة مصفوفة تكون لها قيمة . لاحظ أن المباريات المستقرة أيضاً تنطبق عليها نظرية الأقل أعلى ، حيث إن الاستراتيجية المطلقة هى استراتيجية مختلطة خاصة لها عنصر واحد غير صفرى (يساوى ١)

الحل بواسطة البرمجة الخطية SOLUTION BY LINEAR PROGRAMMING

الاستراتيجيات المثلى المضمونة بنظرية الأقل أعلى ، وكذلك قيمة المباراة يمكن أن تُحسب من خلال البرمجة الخطية . والاستراتيجية المثلى للاعب II تفضل فى حل البرنامج الخطى التالى .

تعظيم :

$$z = -y_{n+1}$$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} g_{11}y_1 + g_{12}y_2 + \cdots + g_{1n}y_n - y_{n+1} &\leq 0 \\ g_{21}y_1 + g_{22}y_2 + \cdots + g_{2n}y_n - y_{n+1} &\leq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{m1}y_1 + g_{m2}y_2 + \cdots + g_{mn}y_n - y_{n+1} &\leq 0 \\ y_1 + \quad y_2 + \cdots + \quad y_n \quad &= 1 \end{aligned} \qquad (١٦ - ٧)$$

حيث إن $y_1, y_2, \ldots, y_n$ لا سلبية

وهنا $G^* = y^*_{n+1}$ ، $Y^* = [y^*_1, y^*_2, \ldots, y^*_n]^T$ بزيادة كل g_{ij} مبدئياً بنفس الكمية الموجبة (هذا يترك طبيعة المباراة دون تغير) ، فإننا نجعل $g_{ij} \geq 0$ لذلك يكون العائد المتوقع للاعب I لا سلبياً أيضاً . وحيث إن هذه الكمية تمثل بـ y_{n+1} فى البرنامج (١٦ - ٧) ، فإنه يتبع ذلك أن تكون كل المتغيرات مقيدة لتكون لا سلبية تحت هذه الظروف . وبالتكافؤ .. فإن y_{n+1} يمكن أن تستبدل بالفرق بين متغيرين جديدين لا سلبيين . وتكون الاستراتيجية المثلى للاعب I هى متجه الاحتمال الذى تكون عناصره هى حل ازدواج البرنامج (١٦ - ٧) . (انظر المسألة ١٦ - ٩) .

وعندما تكون لأى لاعب استراتيجيتان مطلقتان فقط ، فإن الاستراتيجية المثلى لهذا اللاعب يمكن تحديدها بالرسم . (انظر المسألة ١٦ - ١٠) وإذا كان لكلا اللاعبين استراتيجيتان مطلقتان بالضبط ، فتكون الاستراتيجيات المثلى هى :

$$x^*_1 = \frac{g_{22} - g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \qquad x^*_2 = \frac{g_{11} - g_{12}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \qquad (١٦ - ٨)$$

$$y^*_1 = \frac{g_{22} - g_{12}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \qquad y^*_2 = \frac{g_{11} - g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \qquad (١٦ - ٩)$$

حيث

$$G^* = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{g_{11} + g_{22} - g_{12} - g_{21}} \qquad (١٦ - ١٠)$$

أنظر المسألة (١٦ - ٧)

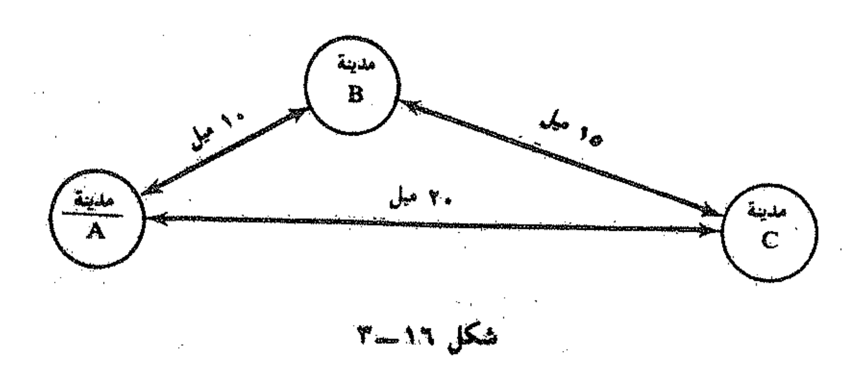
السيطرة DOMINANCE

الاستراتيجية المطلقة P مسيطر عليها بالاستراتيجية المطلقة Q . وإذا كان لكل استراتيجية مطلقة للخصم ـــ العائد المرتبط بـ P ليس أحسن من العائد المرتبط بـ Q . وحيث إن الاستراتيجية المطلقة المسيطرة لا يمكن مطلقاً أن تكون جزءاً من استراتيجية مثلى ، فإن الصف أو العمود المناظر فى مباراة المصفوفة يمكن أن يحذف كأسبقية أولى .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٦ - ١ انشيء مصفوفة عائد للمباراة التالية . يعمل كل من متجرين كبيرين على إنشاء مخزن فى منطقة ريفية تخدم ثلاث مدن . ويبين شكل ١٦ - ١ المسافات بين المدن ويعيش 45 % تقريباً من تعداد المنطقة بالقرب من المدينة A ، ويعيش 35 % بالقرب من المدينة B ، و 20 % بالقرب من المدينة C . وبسبب أن المتجر I أكبر من وله سمعة طيبة عن المتجر II ، فإن المتجر I سيتحكم فى معظم الأعمال إذا قارنا وضعيهما . ويخشى كلا المتجرين من اهتمامات الآخر فى المنطقة ، وكل منهما قد استكمل دراسة التسويق التى تعطى دلالات متشابهة . فإذا وقع كل من المتجرين فى نفس المدينة أو على مسافة متساوية من مدينة ما ، فإن المتجر I سيتحكم فى 65 فى المئة من حجم الأعمال فى هذه المدينة . وإذا كان المتجر I أقرب إلى مدينة ما من II ، فإن المتجر I سيتحكم فى 90 فى المئة من حجم أعمال هذه المدينة . وإذا كان المتجر I أبعد عن مدينة ما من المتجر II ، فإنه سيأخذ 40 فى المئة من حجم أعمال هذه المدينة . ويذهب باق حجم الأعمال فى كل الحالات إلى المتجر II . بالإضافة إلى ذلك .. فإن كلا المتجرين يعلم أن سياسة المتجر هى عدم التواجد فى المدن الصغيرة ، وتقع المدينة C داخل هذه الفئة .



شكل ١٦ــ٣

هناك لاعبان لهذه المباراة ، المتجر I والمتجر II . للاعب I استراتيجيتان مطلقتان : A_1 (التواجد فى المدينة A) ، A_2 (التواجد فى المدينة B) ؛ اللاعب II له ثلاث استراتيجيات : B_1 (التواجد فى المدينة A) ؛ B_2 (التواجد فى المدينة B) ؛ B_3 (التواجد فى المدينة C) نأخذ العائد للمتجر I لتكون نسبة حجم الأعمال فى المنطقة التى سيحصل عليها I ، طبقاً لدراسات التسويق . وحيث إن أى نقطة زيادة أو انخفاض فى النسبة تمثل انخفاضاً أو زيادة مماثلة للمتجر II على التوالى ، فإن المباراة تكون ذات لاعبين صفرية .

إذا وقع المتجران فى نفس المدينة ، فإن اللاعب I سيحصل على 65 فى المئة من حجم العمل فى المنطقة كلها . لذلك .. $g_{11} = g_{22} = 65$. إذا وقع المتجر I فى المدينة A ، بينما يقع المتجر II فى المدينة B ، فإن اللاعب يكون أقرب إلى المدينة A من اللاعب II ، ولكن اللاعب II يكون أقرب إلى المدينتين B ، C من اللاعب I . وبالتالى اللاعب I يحصل على :

$$(0.90)(0.45) + (0.40)(0.35) + (0.40)(0.20) = 0.625$$

، أو 62.5 فى المئة من حجم أعمال المنطقة . لذلك . $g_{12} = 62.5$. وإذا وقع المتجر I فى المدينة B ، والمتجر II فى المدينة C ، فإن اللاعب I يكون أقرب إلى المدن A, B ، بينما اللاعب II يكون أقرب إلى المدينة C . وبالتالى يحصل اللاعب I على :

$$(0.90)(0.45) + (0.90)(0.35) + (0.40)(0.20) = 0.80$$

أو 80 فى المئة من حجم أعمال المنطقة . لذلك .. $g_{23} = 80$. وبالمثل $g_{13} = 80$ ، $g_{21} = 67.5$. وتجمع هذه النتائج فى الجدول ١٦ - ٣ الذى يبين مصفوفة الربحية للمباراة .

جدول ١٦ – ٣

اللاعب II

اللاعب I	B_1	B_2	B_3
A_1	65	62.5	80
A_2	67.5	65	80

١٦ – ٢ انشيء مصفوفة الربحية للمباراة التالية : يحتوى برميل على عدد متساوٍ من الكرات الحمراء والخضراء . يختار اللاعب I عشوائياً كرة واحدة ، ويفحص لونها دون أن يراها اللاعب II . إذا كانت الكرة حمراء يقول اللاعب I « حصلت على كرة حمراء » ، ويطلب من اللاعب II دولاراً واحداً . وإذا كانت الكرة خضراء يقول اللاعب I « الكرة خضراء » ويدفع للاعب II دولاراً واحداً ، أو يقوم اللاعب I بالخداع بقوله « الكرة حمراء » ، ويطلب دولاراً من اللاعب II ، وعندما يطلب اللاعب I دولاراً ، فإن اللاعب II يمكنه أن يدفع أو يتحدى اللاعب I في معرفة لون الكرة إذا ما كانت حمراء أم لا . عند التحدى يجب أن يظهر اللاعب I الكرة للاعب II . وإذا كانت حمراء فعلاً ، يدفع اللاعب II للاعب II دولارين ، وإذا لم تكن حمراء يدفع اللاعب I للاعب II دولارين .

اللاعب I عنده استراتيجيتان مطلقتان فقط هما :

: أن يعلن اللون الحقيقى للكرة

: أن يعلن أن لون الكرة أحمر ، سواء أكانت كذلك أم لا .

[لاحظ أن الاستراتيجيات المطلقة لـ I لا تنطبق مع تحركاته ، وهى (أ) أن يعلن أن الكرة حمراء ، (ب) أن يعلن أن الكرة خضراء] . وللاعب II أيضاً استراتيجيتان مطلقتان هما :

A_1 : أن يصدق اللاعب I

A_2 : أن يصدقه إذا أعلن أن الكرة خضراء ، وأن يتحداه إذا أعلن أن الكرة حمراء . وحيث إنه إذا كسب أحد الأشخاص ، فإن الآخر يخسر ، فإن المباراة تكون صفرية ذات لاعبين .

فى هذه المباراة نجد أن مصفوفة الربحية المرتبطة بالاستراتيجيات المطلقة تكون متغيرات عشوائية ، ونستبدلها بقيمها المتوقعة . لذلك .. تكون g_{11} هى الربح المتوقع للاعب I إذا أعلن اللاعب I اللون الحقيقى للكرة المختارة ويصدقه اللاعب II ، وحيث إن نصف عدد المرات تكون الكرة حمراء ، والنصف الآخر تكون خضراء ، فإن

$$g_{11} = \tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{2}(-1) = 0$$

العائد g_{12} هو العائد المتوقع للاعب I عندما يعلن اللاعب I اللون الحقيقى للكرة ويتحداه اللاعب II عند إعلان أن الكرة حمراء . وحيث إن الكرة لها احتمال $1/2$ لتكون بأحد اللونين ، فإن نصف عدد المرات لن يكون هناك تحدٍّ ، واللاعب II سيتحدى نصف عدد المرات ويخسر . لذلك ..

$$g_{12} = \tfrac{1}{2}(-1) + \tfrac{1}{2}(2) = \tfrac{1}{2}$$

بالمثل

$$g_{21} = 1 \qquad g_{22} = \tfrac{1}{2}(-2) + \tfrac{1}{2}(2) = 0$$

تجمع هذه النتائج بالجدول ١٦ – ٤ الذى يمثل مصفوفة العائد للمباراة

جدول ١٦ – ٤

اللاعب II

اللاعب I	B_1	B_2
A_1	0	1/2
A_2	1	0

١٦ – ٣ حدد ما إذا كانت أى استراتيجية مطلقة فى المباراة فى جدول ١٦ – ٣ يمكن أن تستبعد من خلال التفضيل .

اللاعب I يمكن أن يستبعد A_1 (التواجد فى المدينة A) ، حيث إن العائد من هذه الاستراتيجية يكون دائماً أقل من ، أو يساوى العائد المناظر من A_2 . واللاعب II يمكن أن يستبعد كلاًّ من B_1 ، B_3 كتداخل مع B_2 (لاحظ أن العائد للاعب II هو القيم السالبة فى الجدول ١٦ – ٣ للاعب I) . وبحذف الصف الأول ، والعمودين الأول ، الثالث ، فإن مصفوفة العائد تتكون من مدخل واحد . لذلك .. تكون A_2 ، B_2 استراتيجيات مثلى . لذلك يجب أن يتواجد كل من المتجرين فى المدينة B ، وسيتحكم المتجر I فى 65 فى المئة من حجم أعمال المنطقة ، والباقى 35 فى المئة سيذهب إلى المتجر II .

١٦ – ٤ دع G' تمثل مصفوفة المباراة الناتجة من المصفوفة G بحذف الصفوف والأعمدة المفضلة . بين أن G تكون مستقلة إذا كانت G' مستقلة .

يكفى أن نعتبر الحالة التى فيها الصف الأول فى G يفضل عن الصف الثانى . إذا كان g_{1p} ، g_{2q} هما أقل قيمة فى الصفين (موضحين بدوائر)

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & \boxed{g_{1p}} & \cdots & g_{1q} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2p} & \cdots & \boxed{g_{2q}} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

فإن $g_{1p} \leq g_{1q}$ ، وأيضاً $g_{1q} \leq g_{2q}$ (بالتفضيل) . لذلك ..

$$g_{1p} \leq g_{2q}$$

وهذا يعنى أن أعلى حد أدنى فى G هو نفسه أعلى حد أدنى فى G' ، أى أن $m_I = m'_I$

وبالإضافة إلى ذلك .. إذا احتوى الصف 1 على عمود حد أعلى فى G ـــ مثلا g_{1s} يتبع من أن $g_{2s} = g_{1s}$ هى حد أعلى فى العمود ، وبالتالى أقل حد أعلى فى العمود فى G هو نفسه أقل حد أعلى فى G' ، أى أن $m_{II} = m'_{II}$ نستنتج أن $m_I = m_{II}$ إذا كانت فقط $m'_I = m'_{II}$

١٦ – ٥ هل المباراة فى جدول ١٦ – ٣ مستقرة ؟
نعم ، من المسألة ١٦ – ٣ ، ١٦ – ٤

١٦ – ٦ هل المباراة فى الجدول ١٦ – ٤ مستقرة ؟
هنا $m_I = 0 < 1/2 = m_{II}$ المباراة غير مستقرة .

١٦ – ٧ أوجد الاستراتيجيات المثلى لكل من اللاعبين للمباراة فى الجدول ١٦ – ٤ .

كما تحدد فى المسألة ١٦ – ٦ المباراة غير مستقرة ، وبالتالى لا تحل بالاستراتيجيات المطلقة . وحيث إن هذه المباراة تتضمن استراتيجيتين مطلقتين بالتحديد لكل لاعب ، فإن الاستراتيجيات المثلى (المختلطة) هما كما فى (١٦ – ٨) ، (١٦ – ٩) مثل

$$x_1^* = \frac{0-1}{0+0-(1/2)-1} = \frac{2}{3} \qquad x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{1}{3}$$

$$y_1^* = \frac{0-(1/2)}{0+0-(1/2)-1} = \frac{1}{3} \qquad y_2^* = 1 - y_1^* = \frac{2}{3}$$

وتبعاً لذلك .. فإن اللاعب II يجب أن يصدق اللاعب I ثلث عدد المرات ، بينما يتحدى اللاعب I الثلثين الثانيين من عدد المرات إذا أعلن اللاعب I أن الكرة حمراء . ويجب أن يعلن اللاعب I اللون الحقيقى للكرة ثلثى عدد المرات ، بينما يخدع الثلث الثالث من عدد المرات . وإذا كانت الكرة خضراء ، تكون النتيجة النهائية من (١٦ — ١٠) هى عائد متوقع

$$G^* = \frac{(0)(0) - (1/2)(1)}{0 + 0 - (1/2) - 1} = \frac{1}{3} \quad \text{دولار}$$

للاعب I فى كل مرة تلعب المباراة . والعائد المتوقع للاعب II هو القيمة السالبة لهذه الكمية .

١٦ — ٨ أوجد الاستراتيجيات المثلى لكلا اللاعبين للمباراة المعرفة بمصفوفة العائد ، والمعطاة فى الجدول ١٦ — ٥ .

جدول ١٩ — ٥

اللاعب II

اللاعب I	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	−2	−4	0	6
A_2	−4	2	−1	7	−8
A_3	2	−5	−4	1	−1
A_4	0	−3	−2	−1	−1

جدول ١٩ — ٦

اللاعب II

اللاعب I	B_1	B_2	B_3	B_5
A_1	3	−2	−4	6
A_2	−4	2	−1	−8
A_4	0	−3	−2	−1

الاستراتيجية المطلقة B_4 مسيطر عليها بـ B_3 (وكذلك B_2) ، لذلك يمكن أن تحذف ، وبمجرد ذلك ، فإن A_3 يسيطر عليها بـ A_1 ، ومن ثم A_3 أيضاً يمكن أن تستبعد . وتكون مصفوفة العائد الناتجة هى جدول ١٦ — ٦ الذى فيه

$$m_I = -3 < -1 = m_{II}$$

وحيث إن المباراة غير مستقرة ، تكون الاستراتيجيات لكلا اللاعبين مختلطة ومفصلة فى حل البرنامج (١٦ — ٧) . وللعائد فى جدول ١٦ — ٦ يصبح هذا البرنامج

تعظيم : $z = -y_6$

علماً بأن :

$$\begin{aligned} 3y_1 - 2y_2 - 4y_3 + 6y_5 - y_6 &\leq 0 \\ -4y_1 + 2y_2 - y_3 - 8y_5 - y_6 &\leq 0 \\ -3y_2 - 2y_3 - y_5 - y_6 &\leq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_5 &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

عند $y_1, y_2, y_3, \text{and } y_5$ لا سلبية

وحيث إن y_6 غير مقيدة ، اجعل $y_6 = y_7 - y_8$ ، حيث إن كلاً من y_7 ، y_8 متغيران غير سلبيين (انظر الفصل ٢) . ويكون جدول السمبلكس المبدئ هو الجدول 1 ، بمتغيرات كاسدة $y_9, y_{10}, \text{and } y_{11}$ ومتغير صناعى y_{12} . وتؤدى خمس محاولات لطريقة السمبلكس إلى جدول 6 . ويتبع ذلك أن الاستراتيجية المثلى للاعب II (عند $y_4^* = 0$ ، ولأن B_4 لم تستخدم) هى

$$Y^* = [y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*]^T = [0, 7/60, 7/10, 0, 11/60]^T$$

الاستراتيجية المثلى للاعب I (عند $x_3^o = 0$ ، ولأن A_3 لم تستخدم) معطاة بدلالة حل الازدواج (انظر الفصل ٥) مثل

$$X^o = [x_1^o, x_2^o, x_3^o, x_4^o]^T = [1/15, 1/5, 0, 11/15]^T$$

وتكون قيمة المباراة هى

$$G^o = y_6^o = y_7^o - y_6^o = 0 - \frac{29}{15} = -\frac{29}{15}$$

بمعنى أن اللاعب I يمكن أن يتوقع خسارة 15 /29 وحدة للاعب II فى كل مرة يلعب ، على أن كلا اللاعبين يستخدم استراتيجيته المثلى .

جدول 1

		y_1 0	y_2 0	y_3 0	y_5 0	y_7 −1	y_8 1	y_9 0	y_{10} 0	y_{11} 0	y_{12} $-M$	
y_9	0	3	−2	−4	6	−1	1	1	0	0	0	0
y_{10}	0	−4	2	−1	−8	−1	1	0	1	0	0	0
y_{11}	0	0	−3	−2	−1	−1	1	0	0	1	0	0
y_{12}	$-M$	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
$(z_j - c_j)$:		0	0	0	0	1	−1	0	0	0	0	0
		−1	−1	−1	−1	0	0	0	0	0	0	−1

جدول 6

	y_1	y_2	y_3	y_5	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	
y_5	7/12	0	0	1	0	0	1/15	−1/20	−1/60	11/60
y_2	−1/12	1	0	0	0	0	4/15	3/20	−17/20	7/60
y_8	4/3	0	0	0	−1	1	1/15	1/5	11/15	29/15
y_3	1/2	0	1	0	0	0	−1/5	−1/10	3/10	7/10
	4/3	0	0	0	0	0	1/15	1/5	11/15	29/15

١٦ – ٩ (أ) اشتق البرنامج الخطى للاستراتيجية المثلى للاعب I فى مباراة المصفوفة المحددة بالجدول ١٦ – ١ . (ب) بيّن أن هذا البرنامج هو ازدواج متماثل لـ (١٦ – ٧) ، برنامج الاستراتيجية المثلى للاعب II .

(أ) دع X^* تمثل تعظيم X فى (١٦ – ٥) ، فإن (١٦ – ٥) تكون مكافئة للشرطين التاليين :

(١) $E(X^*, Y) \geq M_I$ لكل متجهات الاحتمال Y .

(٢) إذا كانت $x_{m+1} > M_I$ ، فلا يوجد متجه احتمال X يحقق $E(X, Y) \geq x_{m+1}$ لكل متجهات الاحتمال Y .

يقول الشرط (١) أن اللاعب I يضمن عائداً متوقعاً M_I على الأقل إذا لعب X^* ، ويقول الشرط (٢) أنه لا توجد استراتيجية أخرى تعطى اللاعب I حداً أدنى أكبر للعائد المتوقع . من (١) ، (٢) يتبع أن البرنامج

$$\text{تعظيم :} \quad z = x_{m+1} \qquad (1)$$

$$\text{علماً بأن :} \quad E(X, Y) \geq x_{m+1}$$

فى المتغيرات $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}$ لها الحل $[x_1^o, \ldots, x_m^o, M_I]^T$ ومهما كان (٢)

$$E(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i \right) y_j \geq x_{m+1} \qquad \left(y_j \geq 0, \quad \sum y_j = 1 \right)$$

لو وفقط لو

(٣)

$$\sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i \geq x_{m+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

فى الحقيقة ، العلاقة (٢) هى التكوين المقعر (فصل ٣) ، بالأوزان y_j للعلاقة (٣) . وبالتالى يمكن كتابة البرنامج (١)

تصغير :

$$z = -x_{m+1}$$

علماً بأن :

(٤)

$$\begin{aligned}
g_{11}x_1 + g_{21}x_2 + \cdots + g_{m1}x_m - x_{m+1} &\geq 0 \\
g_{12}x_1 + g_{22}x_2 + \cdots + g_{m2}x_m - x_{m+1} &\geq 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_{1n}x_1 + g_{2n}x_2 + \cdots + g_{mn}x_m - x_{m+1} &\geq 0 \\
x_1 + \quad x_2 + \cdots + \quad x_m \qquad &= 1
\end{aligned}$$

عند $x_1, x_2, \ldots, x_m$ لا سلبية

حيث إننا غيرنا التعظيم إلى تصغير ، وأضفنا القيد على الاحتمالات x_i .

(ب) فى البرنامج (٤) استبدل x_{m+1} بـ $x_{m+1} - x_{m+2}$، حيث إن x_{m+1} and x_{m+2} متغيرات لا سلبية ، وأيضاً استبدل متساوية القيد بـ

$$\begin{aligned}
-x_1 - x_2 - \cdots - x_m &\geq -1 \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_m &\geq \ \ 1
\end{aligned}$$

قم بالاستبدال المناظر فى البرنامج (١٦ – ٧) ، فيصبح البرنامج (٤) من الصيغة (٥ – ١) ، والبرنامج (١٦ – ٧) من الصيغة (٥ – ٢) حيث إن ،

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}, x_{m+2}]^T \qquad \mathbf{W} = [y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}, y_{n+2}]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} & -1 & +1 \\ g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{m2} & -1 & +1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{1n} & g_{2n} & \cdots & g_{mn} & -1 & +1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & \cdots & +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

١٦ – ١٠ استخدم طريقة الرسم لتحديد الاستراتيجية المثلى للاعب I فى المباراة المعرفة فى الجدول ١٦ – ٧

جدول ١٦ – ٧

	اللاعب II		
اللاعب I	B_1	B_2	B_3
A_1	2	−3	−4
A_2	−6	−1	1

يصبح البرنامج (٤) لهذه المباراه فى المسألة ١٦ - ٩ (أ)

تصغير : $z = -x_3$

علماً بأن : $2x_1 - 6x_2 - x_3 \geq 0$

$-3x_1 - x_2 - x_3 \geq 0$

$-4x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$

$x_1 + x_2 = 1$

عند x_2 و x_1 لا سلبية

قبل حل هذا البرنامج بالرسم يجب أن يختصر إلى نموذج يحتوى على متغيرين فقط . ويمكن كتابة متساوية القيد

$$x_2 = 1 - x_1 \qquad (٢)$$

وبالتالى نضمن لا سلبية x_2 بجعل

$$x_1 \leq 1 \qquad (٣)$$

بتعويض (٢) فى القيود فى النموذج (١) ، واستبدال شرط اللاسلبية على x_2 بالقيد الجديد (٣) وبالذهاب إلى برنامج تعظيم نحصل على .

تعظيم : $z = x_3$

علماً بأن : $8x_1 - x_3 \geq 6$

$-2x_1 - x_3 \geq 1$

$5x_1 + x_3 \leq 1$

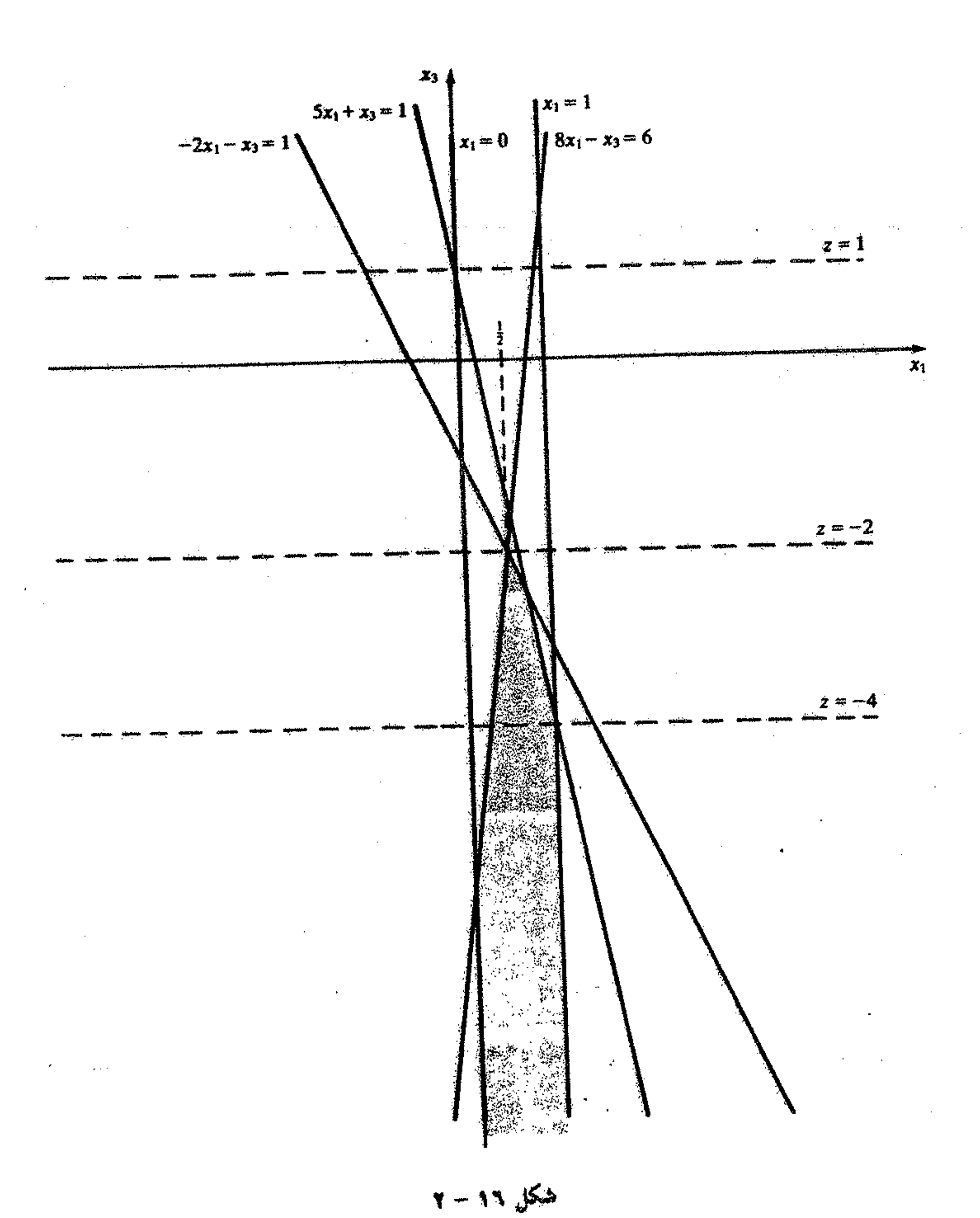
$x_1 \leq 1$

عند $x_1 \geq 0$

والحل بالرسم للبرنامج (٤) يوضح فى شكل ١٦ - ٢

$$x_1^\circ = 1/2 \qquad x_2^\circ = 1 - x_1^\circ = 1/2$$

وقيمة المباراة تكون $z^\circ = x_3^\circ = -2$



شکل ۱۶ - ۲

مسائل مكملة :

Supplementary Problems

١٦ – ١١ حدد ما إذا كانت كل مباراة مصفوفة ، معرفة بأسفل بعائد لاعب الصف ، مستقرة ، ثم أوجد كلًّا من الاستراتيجية المثلى ، وقيمة المباراة .

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	−1	−2	−1
A_2	0	−2	8	6

(أ)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	−1	1	0
A_2	−1	1	0	1

(ب)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−2	−1	−2	8
A_2	1	0	−1	−1
A_3	−3	1	−3	1

(جـ)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	0	−6
A_2	−1	−1	2
A_3	−2	0	0

(د)

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	6	1
A_2	8	4	6
A_3	1	2	1

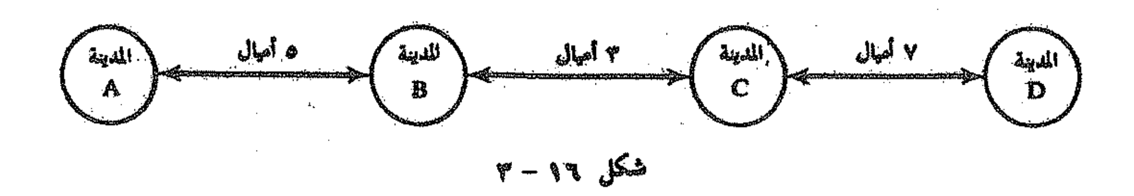
(هـ)

	B_1	B_2
A_1	−1	−2
A_2	0	2
A_3	−1	−5
A_4	−2	1

(و)

١٦ – ١٢ حل المسألة ١٦ – ١ : إذا كان المتجر I يتحكم في 70 في المئة من حجم أعمال المدينة أينما يتواجد كلا المتجرين في نفس المدينة ، أو يكونا على مسافة متساوية من مدينة ما .

١٦ – ١٣ حل المسألة ١٦ – ١ : إذا كانت المنطقة تخدم بأربع مدن تقع على طريق سريع ، كما هو مبين في شكل ١٦ – ٣ يعيش 15 في المئة من السكان تقريباً بالقرب من المدينة A ، و 30 في المئة بالقرب من المدينة B ، و 20 في المئة بالقرب من المدينة C ، و 35 في المئة بالقرب من المدينة D ، وكل المدن كبيرة بشكل كافٍ يسمح لكلا المتجرين بالتواجد بها .



شكل ١٦ – ٣

١٦ – ١٤ اقترح طريقة لتنفيذ الاستراتيجية X^* للمسألة ١٦ – ٨ .

١٦ – ١٥ يرغب أحد الجيوش فى شحن إمدادات لنقطة على الحدود ، مع توقع هجوم من الجيش B خلال ساعات . يتصل أقرب مخزن إمداد بالموقع بطريقين منفصلين : الأول خلال الغابات ، والثانى خلال الأرض المنبسطة . تسير قافلة الإمداد أسرع على الأرض المنبسطة ، ولكن تتمتع بإخفاء أكثر فى الغابات ، ولكن يجب أن تسلك القافلة طريقاً واحداً .

يتوقع الجيش B مجهود سداد على أحد الطرق ، ويخطط لمنعة بضربات جوية . عند الجيش B سرب منفرد من الطائرات لا يمكن تقسيمه . إذا أرسل الجيش B طائراته فوق طريق الغابة ، ووجد الجيش A هناك ، فإن الجيش B سيجد الوقت لأربع ضربات ضد القافلة . وإذا أرسل الجيش B طائراته فوق طريق الأرض المنبسطة ، وكان الجيش A يستخدم هذا الطريق ، فإن الجيش B سيجد وقت لثلاث ضربات . وإذا أرسل الجيش B طائراته إلى الطريق الخطأ ، فان الوقت سيضيع . وبمجرد أن يتحقق من الخطأ ويوجه القافلة على الطريق الآخر سيجد الجيش B وقت لضربتين على طريق الأرض المنبسطة ، وضربة واحدة على طريق الغابات (بسبب صعوبة العثور على القافلة بين الأشجار) . حدد الاستراتيجية المثلى للجيشين .

١٦ – ١٦ يتنافس جيش أزرق وجيش أحمر على مجالين جويين يساويان 20 ، 80 مليون دولار ، والاثنان تحت سيطرة الجيش الأحمر . يتولى الجيش الأزرق الهجوم على أى من أو كلًا من المجالين الجويين مع إحداث خسائر (بالدولار) فى الإمكانيات المتاحة . وواجب الجيش الأحمر هو تقليل الخسائر . لتحقيق أهدافهما فإن كل جيش يعين كل قوته لأحد المجالين الجويين ، أو تقسيم قوته لنصفين لتغطية المجالين الجويين بطاقة مخفضة .

ووجد بالتجربة أن موقع ما يتعرض لخسارة 25 فى المئة ، إذا هوجم ودوفع عنه بكامل القوة ، و 10 فى المئة خسائر إذا هوجم ودوفع عنه بنصف القوة . وإذا هوجم الموقع بالقوة الكاملة ودوفع عنه بنصف القوة ، فإنه سيحدث خسائر 50 فى المئة وأى موقع يُهاجم بالقوة الكاملة أو بنصف القوة سيتعرض للتدمير الكامل . والموقع الذى لا يُهاجم أو إذا هوجم بنصف القوة ودوفع عنه بالقوة الكاملة لن يتعرض لأى خسائر . حدد الاستراتيجية المثلى لكلا الجيشين .

١٦ – ١٧ يتنازع اثنان من أصحاب عزب المواشى على شريط من الأرض طوله 6 ياردات يفصل بين ممتلكاتهما . يدعى كل منهما أن شريط الأرض من ممتلكاته . يخشى الاثنان أن يسأل الحكم كل منهما بتقديم اقتراح سرى لإنهاء النزاع بعدالة ، ويقبل الاقتراح الذى يفيد أكثر إذا كان الاقتراحان متساويين أو غير متساويين على الإطلاق ، فإن الحكم سيفصل فى الاختلاف بجعل الحدود فى منتصف مساحه الـ 6 ياردات . حدد أحسن اقتراح لأصحاب العزب إذا كانت الاقتراحات كميات صحيحة .

١٦ – ١٨ يستخدم مهربو السجائر طريقين لنقل السجائر خارج نورث كارولينا ، وهما : طريق داخلى رقم 95 ، أو الطريق الخلفى . وكلا الطريقين معروف لدى البوليس ، ونظراً لقلة عدد أفراده ، فإنه يراقب أحد الطرق فقط بكفاءة فى أى وقت . وهذه الحقيقة معروفة لدى المهربين .

يقدر البوليس أن متوسط الحمولة المسافرة على الطريق الداخلى 95 تساوى 1000 دولار للمهربين إذا وصلت إلى نيويورك . ويحدد الطريق الخلفى حجم العربات إلى حد ما ، لذلك فإن متوسط الحمولة المسافرة على هذا الطريق يساوى 800 دولار إذا وصلت لمكان الوصول . وأى حمولة تكتشف بواسطة البوليس تصادر ويقبض على المهربين . بالنسبة للسجائر المسافرة على الطريق 95 تقدر الخسائر للمهرب بمتوسط 700 دولار ، والخسائر على الشحنة المسافرة على الطريق الخلفى بمتوسط 600 دولار . بالإضافة إلى ذلك .. فإن البوليس يقدر أنه يستطيع اعتراض 40 فى المئة من حمولة العربات المسافرة على الطريق 95 إذا كانوا يراقبون الطريق السريع ، و 25 فى المئة من العربات على الطريق الخلفى إذا كانوا يراقبون هناك . حدد استراتيجية عمل للبوليس إذا كان هدفه هو تقليل مكاسب المهربين .

١٦ - ١٩ قبل الانتخابات بيوم واحد وضع المرشحان لمنصب حاكم الولاية الهدف على أن هناك ثلاث مدن مهمة تستحق زيارة أخيرة . وحيث إنه لا تفيد أى زيارة دون الإعداد المسبق من معاونيهم ، فإن الخطط يجب أن توضع لكل مرشح قبل معرفة اختيار منافسه . ويوضح تقرير كلا الجانبين نفس المفاهيم . ويبين جدول ١٦ - ٨ العائد المتوقع (بالألف صوت) للمرشح I الناتج من كل زيارة فى اليوم الأخير . ما هى المدينة التى يجب أن يختارها كل مرشح للزيارة .

جدول ١٩ - ٨

		المرشح II		
		الى المدينة 1	الى المدينة 2	الى المدينة 3
المرشح I	الى المدينة 1	12	−9	14
	الى المدينة 2	−8	7	12
	الى المدينة 3	11	−10	10

١٦ - ٢٠ تكون المباراة عادلة إذا كانت $G^* = 0$. وتكون المباراة متماثلة إذا كان لكل من اللاعبين نفس العدد من الاستراتيجيات ، وإذا كان لكل i ، j العائد للاعب I من استراتيجيته المطلقة رقم i ، والاستراتيجية رقم j للثانى نفس العائد للاعب II من استراتيجيته رقم i ، رقم لـ I . اثبت أن أى مباراة متماثلة تكون عادلة .

١٦ - ٢١ فى إحدى ألعاب الورق المعروفة يمسك اللاعب I ورقة لعب لونها أحمر ، واثنتين لونهما أسود ، بينما يمسك اللاعب II اثنتين لونهما أحمر ، وثلاث لونهم أسود . فى نفس الوقت كلا اللاعبين يظهر ورقة واحدة باختياره . إذا تساوت الورقتان فى اللون ، يكسب اللاعب I ؛ وإلا يكسب اللاعب II . يتحدد العائد بالصيغه التالية : إذا أظهر اللاعب I الواحد (الآس) ؛ فإن اللاعبين يتبادلا الفرق (بالدولار) بين الكميات الظاهرة على الورقتين (الآس يعد بواحد) ؛ وإذا أظهر اللاعب I الاثنين ، يتبادل اللاعبان مجموع (بالدولار) الكميات الظاهرة على الكارتين . اللاعب I ، من الواضح أنه يمكن أن يكسب إما دولاراً أو 5 دولارات أو يخسر إما 2 دولار أو4 دولارات ، وهى من أسباب أن المباراة عادلة ، أليست كذلك ؟

الفصل السابع عشر

نظرية القرار
Decision Theory

عمليات القرار DECISION PROCESSES

عملية القرار هى عملية تتطلب لاستكمالها إما قراراً أو مجموعة متتالية من القرارات . وكل قرار مسموح به يرتبط به مكسب أو خسارة تتحدد بالأشتراك مع الظروف الخارجية المحيطة بالعملية . وهذه الخاصية تميز هذه العمليات من العمليات التى عولجت فى الفصل ١٤ . ومجموعة الظروف الممكنة ، المعروفة بحالات الطبيعة ، والتوزيع الاحتمالى الذى يحكم حدوث كل حالة منها ، من المفترض أن تكون معروفة . وسيفترض أن كلًا من حالات الطبيعة والقرارات المسموح بها محدودة (هذا الفرض لا يعمل فى حالة النظرية الأكثر تفضيلاً) .

نرمز للقرارات المسموحة بالرموز $D_1, D_2, \ldots, D_m$ ولحالات الطبيعة بالرموز $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ، والعائد المرتبط بالقرار D_i ، بحالة الطبيعة S_j هو g_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. والعملية التى تتطلب تنفيذ أحد هذه القرارات تعرف كاملةً فى جدول ١٧ – ١ . وهذا الجدول للعائد يعرف باسم مصفوفة العائد عندما تكون مدخلات المصفوفة هى عائد لصانع القرار . وتمثل الخسارة بالعائد السلبى .

جدول ١٧ – ١

حالات الطبيعه

القرارات	S_1	S_2	$\cdots$	S_n
D_1	g_{11}	g_{12}	$\cdots$	g_{1n}
D_2	g_{21}	g_{22}	$\cdots$	g_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
D_m	g_{m1}	g_{m2}	$\cdots$	g_{mn}

جدول ١٧ – ٢

حالات الطبيعه

القرارات	S_1	S_2
D_1	60	660
D_2	−100	2000

مثال ١٧ – ١ : تقدم إحدى شركات الطاقة إلى صاحب أرض مبلغ 60 000 دولار لحقوق الاستكشاف للغاز الطبيعى فى موقع معين ، وبدائل التطوير المستقبلى . وهذا البديل ، إذا تم ، يستحق مبلغاً إضافياً 600 000 دولار لصاحب الأرض ، ولكن هذا يتم إذا اكتشف الغاز فى مرحلة الاستكشاف . وصاحب الأرض معتقد أن اهتمامات شركة الطاقة هى مؤشر جيد على وجود الغاز ، لذا يحاول تطوير الحقل بنفسه . ولعمل هذا ، فإنه يجب أن يوقع عقداً مع أحد بيوت الخبرة المحلية فى الاستكشاف والتطوير . والتكلفة الأولية لذلك هى 100 000 دولار تفقد كلها فى حالة عدم اكتشاف غاز ، ومع ذلك .. فإن صاحب الأرض يتوقع عائداً قدرة 2 مليون دولار إذا اكتشف الغاز .

قرارات صاحب الأرض هى : D_1 (أن يقبل عرض شركة الغاز) ، D_2 (يستكشف ويطور بنفسه) . وحالات الطبيعة هى : S_1 (لا يوجد غاز فى الأرض) ، S_2 (هناك غاز فى الأرض) . يوضح الجدول ١٧ – ٢ العائد (بالألف دولار) لصاحب الأرض لكل مجموعة أحداث .

ويبقى أن نقدر الاحتمالات المرتبطة بكل حالة من حالتي الطبيعة $P(S_1)$ ، $P(S_2)$ رغم أن جدول ١٧ - ١ يشابه في الشكل جدول ١٦ - ١ ، ولكن يوجد فرق واضح بين عملية القرار ومباريات المصفوفات . ففي عملية القرار نجد أن صانع القرار فقط هو القادر على صنع القرارات الرشيدة ، أما الطبيعة فلا . والحالة الفعلية للطبيعة الموجودة في أي وقت محدد هي حدث عشوائي ، ولا يمكن اعتبار التوزيع الاحتمالي لهذه الأحداث « استراتيجية مختلطة » مصممة لإحداث خسائر على صانع القرار . وأكثر من ذلك ، فإننا نستبعد بوجه عام أي عشوائية في اختيارية صانع القرار ؛ فهو أو هي تكون مقيدة بواحدة أو أكثر من الاستراتيجيات المطلقة $D_1, \ldots, D_m$. وبسبب هذه الاختلافات تميل الاستراتيجيات المثلى للمباراة إلى عملية القرار لتكون أكثر تحفظاً .

مقياس القرار الساذج NAIVE DECISION CRITERIA

مقياس « الأقل أعلى » (المتشائم) هو أن نختار القرار الذي يقلل أعلى خسارة ممكنة لصانع القرار . وبدلالة مصفوفة العائد ، فإنه القرار الذي يعظم أقل عائد ممكن . والمقياس المتفائل هو أن نختار القرار الذي يعظم العائد الممكن . ومقياس نقطة منتصف الطريق هي أن نختار القرار الذي فيه يكون متوسط أعلى وأقل عائد أكبر ما يمكن (انظر المسألة ١٧ - ١ ، ١٧ - ٢) . وحيث إنه لا تبنى أي من هذه المقاييس على احتمال حالة الطبيعة ، فإنها تكون مقاييس داخلية لمقاييس أخرى . وسنعطى الآن مقياسين احتماليين .

أ ـ المقياس السابق *A PRIORI* CRITERION

المقياس السابق (أو بايز) هو أن نختار القرار الذي يعظم العائد المتوقع ، (انظر المسائل ١٧ - ٣ ، ١٧ - ٤) .

ب ـ المقياس اللاحق *A POSTERIORI* CRITERION

إذا أمكن عمل تجربة غير كاملة بحيث تعطي معلومات عن حالة الطبيعة الحقيقية ، فإن هذه البيانات من التجربة تجمع الاحتمالات الأولية لحالات الطبيعة المختلفة لتؤدي إلى توزيع احتمالي معدل . أطلق على ناتج التجربة θ ، وافرض أن صلاحية التجربة تعطى بالاحتمالات المشروطة $P(\theta \mid S_1)$، $P(\theta \mid S_2), \ldots, P(\theta \mid S_n)$. فإن الاحتمالات المعدلة (اللاحقة) لحالات الطبيعة $P(S_1 \mid \theta),\ P(S_2 \mid \theta), \ldots, P(S_n \mid \theta)$ تحدد من نظرية بايز (المسألة ١٧ - ٥) . ويكون المقياس اللاحق هو أن نختار القرار الذي يعظم العائد المتوقع بالنسبة للتوزيعات الاحتمالية المعدلة . (انظر المسألة ١٧ - ٦ ، ١٧ - ٧)

أشجار القرار DECISION TREES

شجرة القرار هي الشجرة الموجهة (انظر الفصل ١٥) التي تمثل عملية القرار . تمثل العقد نقط زمنية ، حيث إن : (١) يجب أن يصنع قراراً أو آخر بواسطة صانع القرار ، أو (٢) يواجه صانع القرار بحالة أو بأخرى من حالات الطبيعة ، أو (٣) تنتهي العملية . المتجه الخارج من (١) هو فرع لكل قرار ممكن ، والمتجه الخارج من (٢) هو فرع لكل حالة ممكنة من حالات الطبيعة . وتحت كل فرع يكتب الاحتمال المناظر لكل حدث ، عندما يحدد (انظر المسائل ٧ - ١٣ حتى ٧ - ١٦) .

وتفيد أشجار القرارات في تحديد القرارات المثلى للعمليات المعقدة . ويبدأ الأسلوب بعقد النهايات ، ثم التحرك للخلف خلال الشبكة ، وحساب العائد المتوقع في العقد المتوسطة ، ويكتب كل عائد فوق عقدته المناظرة . والقرار المفضل هو الذي يؤدي إلى أعلى عائد متوقع . والقرارات التي يظهر أنها غير مفضلة تشطب أفرعها المناظرة (انظر المسألة ١٧ - ٨ ، ١٧ - ٩) .

المنفعة UTILITY

المنفعة من العائد هي القيمة العددية لصانع القرار . وحيث إنه لا يمكن اختبار أي معيار للقرارات إذا لم يقدر عائدها الكلي بطريقة كمية ، بوحدات متماثلة ، فإن الخطوة الأولى في تحليل أي عملية قرار هي تحديد المنفعة للعائد الكلي غير الكمي . (انظر المسألة ١٧ - ١٢)

والمنفعة المشتركة هى القيمة النقدية ، حيث يستبدل كل عائد (مثلا : منزل جديد) بقيمته بالدولارات فى مصفوفة العائد . ومع ذلك .. فإن القيمة النقدية لا تكون دائماً مناسبة . فعائد 2 مليون دولار هو ضعف عائد 1 مليون دولار ، ولكن قد لا يساوى القرار الأول ضعف القرار الثانى بالنسبة لصانع القرار ، فقد يكون المليون الأول ذا قيمة أعلى من المليون الثانى . وفى الحالات التى لا تعكس فيها الدولارات القيمة الحقيقية لأى عائد بالنسبة لعائد آخر ، أو حينما لا تكون الدولارات مناسبة للتقييم الكمى ، فإن وحدات منفعة أخرى يجب أن تُستخدم .

لعب الحظ (اليانصيب) : LOTTERIES

لعبة الحظ $\mathscr{L}(A, B; p)$ هى حدث عشوائى له مخرجان ، A ، B ، يحدثان باحتمال p ، $1-p$ على التوالى .

وحدات المنفعة لفون نيومان VON NEUMANN UTILITIES

تستخدم الطريقة التالية ذات الأربع خطوات لتحديد وحدات المنفعة لفون نيومان لعدد محدد من العائد .

الخطوة *1* : رتب العائد ترتيباً تنازلياً طبقاً للرغبة : $e_1, e_2, \ldots, e_p$ وهنا e_i تكون على الأقل مطلوبة مثل e_j إذا كانت $i < j$.

الخطوة *2* : حدد إختيارياً قيمة عددية $u(e_1)$ ، $u(e_p)$ للعائد e_1 ، e_p على التوالى ، بحيث إن $u(e_1) > u(e_p)$.

الخطوة *3* : لكل عائد e_j مرتب بين e_1 ، e_p من حيث درجة الطلب ، حدد احتمال مكافىء p_j الذى له خاصية أن صانع القرار لا يفضل بين الحصول على e_j بالتأكيد أو باشتراكه فى لعبه الحظ $\mathscr{L}(e_1, e_p; p_j)$.

الخطوة *4* : دع $u(e_j) \equiv p_j u(e_1) + (1-p_j) u(e_p)$ لتكون المنفعة للعائد e_j .

الخطوة 3 موضوعية بدرجة كبيرة . فقيمة p_j لكل عائد $e_j \ (j = 2, 3, \ldots, p-1)$ هى تحديد فردى يمكن أن يتغير بشكل مؤثر من شخص لآخر ، وحتى لنفس الشخص فى وقتين مختلفين . والمنفعة الناتجة ، لذلك ، تحدد كمياً القيمة النسبية للعائد لصانع قرار معين فى لحظة معينة . ومع ذلك .. للفرد الرشيد فإنه من المتوقع دائماً أن ترتيب p's وكذلك ترتيب u's سيكون نفس الترتيب مثل e's (انظر المسائل ١٧ - ١٠ حتى ١٧ - ١٢) .

تكون المنفعة معدلة إذا كان $u(e_1) = 1$ ، $u(e_p) = 0$ ، مما يجعل المنفعة متماثلة للاحتمالات المتكافئة .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٧ - ١ حدد القرارات المفضلة فى ظل المعايير البسيطة للعملية الموضحة فى المثال ١٧ - ١ .

مصفوفة العائد لهذه العملية توضح بالجدول ١٧ - ٢ أقل عائد للقرار D_1 هو 60 ، بينما العائد للقرار D_2 هو 100 - . وبما أن أعلى $\{60, -100\} = 60$ هو العائد المرتبط D_1 ، تكون D_1 هى القرار المفضل فى ظل دلالة الأقل أعلى .

وأعلى مدخل فى المصفوفة هو 2000 ، وهو العائد المرتبط بـ D_2 . لذلك تكون D_2 هى القرار المفضل فى ظل المعيار المتفائل .

متوسط أعلى وأقل عائد لـ D_1 ، D_2 على التوالى هو

$$\frac{660+60}{2} = 360 \quad \text{و} \quad \frac{2000+(-100)}{2} = 950$$

وبما أن أعلى $950 = \{360, 950\}$ مرتبطة بـ D_2 ، D_2 يكون هو القرار المفضل فى ظل مقياس منتصف الطريق .

١٧ – ٢ حدد القرارات المفضلة فى ظل المعايير البسيطة (الساذجة) لعملية القرار التالية . يصدر أحد مشترى الأزياء لأحد المحلات الكبيرة أوامر الشراء للصناع قبل موعد طلب الأزياء بتسعة أشهر . وأحد القرارات يتعلق بعدد الأزياء القصيرة المطلوبة للمخزن . وأعلى عائد للمحل يعتمد على هذا القرار وعلى الطراز السائد بعد ٩ أشهر . وتعطى تقديرات العائد (بالألف دولار) فى جدول ١٧ – ٣ .

جدول ١٧ – ٣

	S_1 طول قصير طراز جيد	S_2 طول قصير طراز مقبول	S_3 طول قصير طراز غير مقبول
D_1: لا طلب	−50	0	80
D_2: طلب بسيط	−10	30	35
D_3: طلب متوسط	60	45	−30
D_4: طلب كميه كبيره	80	40	−45

وأقل عائد للقرارات D_1 وحتى D_4 على التوالى هو 50– ، 10– ، 30– ، 40– . وحيث إن أكبر هذه الكميات هى 10– ، العائد المرتبط بـ D_2 ، فإن D_2 هى القرار المفضل بدلالة الأقل أعلى .

أعلى عائد هو 80 مرتبط بكل من D_1 ، D_4 ومن ثم فإن أى من D_1 أو D_4 هو القرار المفضل فى ظل المعايير المتفائلة .

متوسط أعلى أقل عائد لـ D_1 وحتى D_4 على التوالى هى 15 ، 12.5 ، 15 ، 17.5 . وحيث إن أعلى هذه المتوسطات مرتبط بـ D_4، فإن D_4 تكون هى القرار المفضل فى ظل مقياس منتصف الطريق .

١٧ – ٣ حدد القرار المفضل تحت ظل المقياس السابق للعملية فى المثال ١٧ – ١ ، وإذا قدر صاحب الأرض احتمال وجود الغاز بـ 0.6 .

عند $P(S_1) = 1 - 0.6 = 0.4$ يتبع ذلك أن $P(S_2) = 0.6$. باستخدام البيانات فى جدول ١٧ – ٢ نحسب العائد المتوقع من D_1 كما يلى

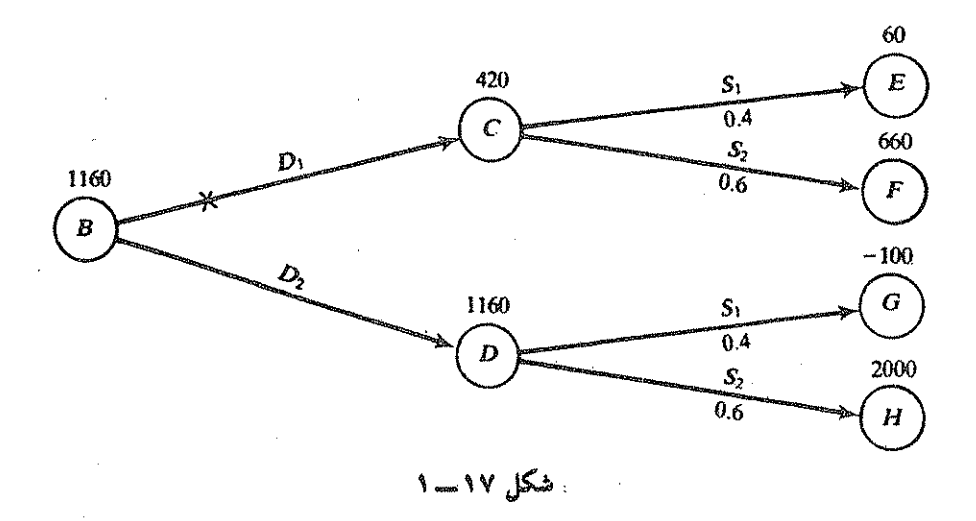
$$E(G_1) = (60)(0.4) + (660)(0.6) = 420$$

والعائد المتوقع من D_2 هو

$$E(G_2) = (-100)(0.4) + (2000)(0.6) = 1160$$

وحيث إن أعلى هاتين القيمتين هى 1160 مرتبطة بـ D_2 ، فإن D_2 تكون هى القرار المفضل فى ظل المقياس السابق .

تمثل هذه العملية بشجرة القرار فى شكل ١٧ – ١ . والعائد المتوقع للعملية 1160 عند العقدة B. يؤخذ بالعودة خلفياً من العقدة D .



شكل ١٧ ــ ١

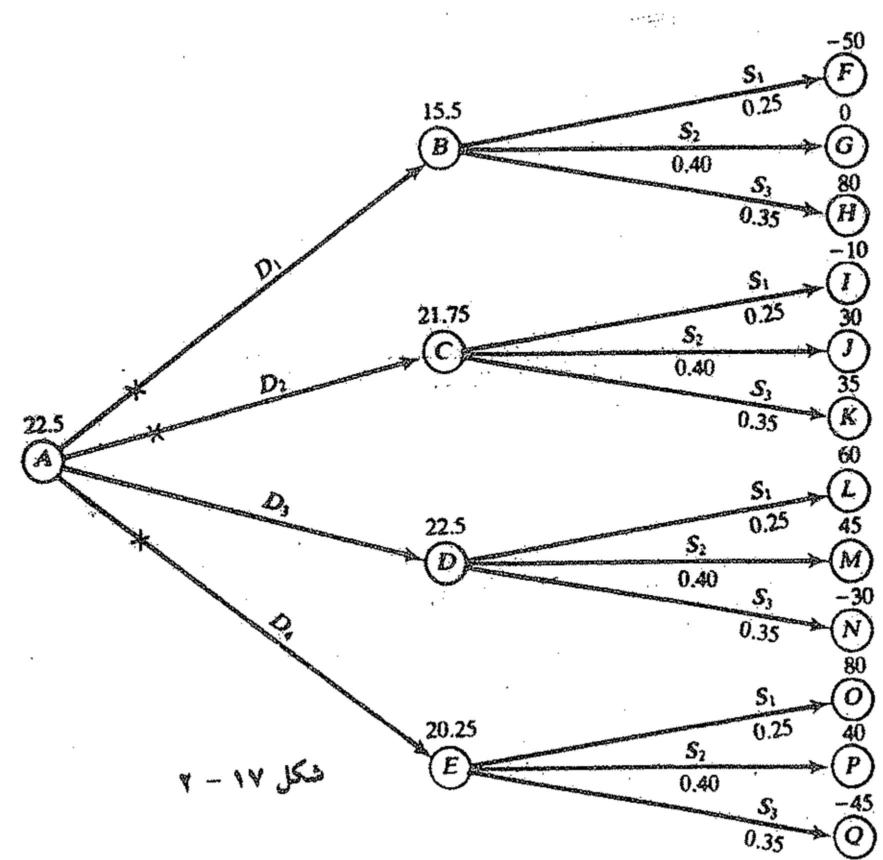
١٧ - ٤ حدد القرار المفضل فى ظل المقياس السابق لعملية القرار الموضحة فى المسألة ١٧ - ٢ ، إذا قدر المشترى

$$P(S_1) = 0.25,\ P(S_2) = 0.40,\ \text{and}\ P(S_3) = 0.35.$$

باستخدام البيانات فى الجدول ١٧ - ٣ نحسب العائد المتوقع للقرارات D_1 حتى D_4 على التوالى .

$$E(G_1) = (-50)(0.25) + (0)(0.40) + (80)(0.35) = 15.5$$
$$E(G_2) = (-10)(0.25) + (30)(0.40) + (35)(0.35) = 21.75$$
$$E(G_3) = (60)(0.25) + (45)(0.40) + (-30)(0.35) = 22.5$$
$$E(G_4) = (80)(0.25) + (40)(0.40) + (-45)(0.35) = 20.25$$

وحيث إن أكبر عائد من هذه الكميات هو 22.5 مرتبط بـ D_3 ، فإن D_3 هى القرار المفضل فى ظل المقياس السابق .
تمثل هذه العملية بشجرة القرار فى شكل ١٧ - ٢ .



شكل ١٧ - ٢

١٧ - ٥ اذكر واثبت نظرية بايز .

اعتبر عينة فراغ $\mathcal{S}$ تتكون من كل المخرجات لتجربة تصورية (بمعنى أن نتوقع حالة الطبيعة عند أى وقت محدد) . إذا كان A ، B حدثين (مجموعة فرعية) من $\mathcal{S}$ ، فإن الاحتمال المشروط لـ A بشرط حدوث B ، وكذلك الاحتمال المشروط لـ B بشرط حدوث A يُعرف كما يلى :

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = P(A)\,P(B \mid A) \qquad (١)$$

حيث إن $A \cap B$ هى تقاطع A ، B . بحل (١) نحصل على

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)\,P(B)}{P(A)} \qquad (٢)$$

وفيها يفترض أن $P(A) > 0$ المعادلة (٢) هى الصيغة البسيطة لنظرية بايز .

والصيغة الأكثر استخداماً نحصل عليها بإدخال مجموعة من الأحداث المشتركة فى خصوصيتها $\{H_1, H_2, \ldots, H_s\}$, واتحادها هو $\mathcal{S}$. لذلك

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_s) \\ &= P(A \mid H_1)\,P(H_1) + P(A \mid H_2)\,P(H_2) + \cdots + P(A \mid H_s)\,P(H_s) \end{aligned} \qquad (٣)$$

بالتعويض بـ (٣) فى (٢) واختيار $B = H_i$, نحصل على

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)\,P(H_i)}{\sum_{j=1}^{s} P(A \mid H_j)\,P(H_j)} \qquad (٤)$$

وبوجه عام .. فإن النظرية (٤) تقيِّم احتمال « السبب » H_i عند إعطاء التأثير A .

١٧ - ٦ صاحب الأرض فى المثال ١٧ - ١ أخذ بعض الاختبارات للموقع الذى اشتبه فى وجود غاز به ، وذلك بتكلفة 30 000 دولار . وتدل الاختبارات على أن الغاز غير موجود ، ولكن الاختبار ليس كاملاً . والشركة التى تقوم بالاختبار تسلم بأن 30 فى المئة من وقت الاختبار يدل على عدم وجود غاز ، بينما فى الحقيقة يوجد غاز . وإذا لم يوجد غاز يكون الاختبار صحيحاً 90 فى المئة من الوقت . باستخدام هذه البيانات ، عدل التقدير الأولى لصاحب الأرض ، وهو أن احتمال وجود الغاز هو 0.6 ، ثم حدد القرار المفضل بمفهوم المقياس اللاحق .

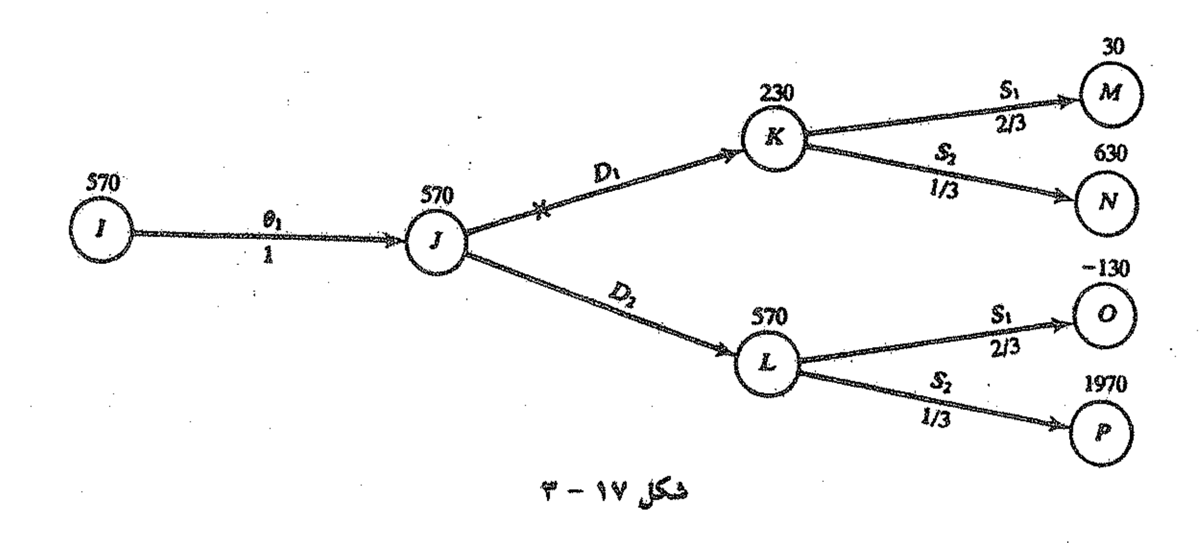
مبدئياً $P(S_2) = 0.6,\ P(S_1) = 0.4.$ دع θ_1 تمثل الحدث ، أنه لا يوجد غاز ، فتعطى صلاحية الاختبار بالاحتمال المشروط $P(\theta_1 \mid S_1) = 0.90$ and $P(\theta_1 \mid S_2) = 0.30.$ وتعطى نظرية بايز (٤) فى المسألة ١٧ - ٤ الاحتمالات المعدلة

$$P(S_1 \mid \theta_1) = \frac{P(\theta_1 \mid S_1)\,P(S_1)}{P(\theta_1 \mid S_1)\,P(S_1) + P(\theta_1 \mid S_2)\,P(S_2)} = \frac{(0.90)(0.4)}{(0.90)(0.4) + (0.30)(0.6)} = \frac{2}{3}$$

$$P(S_2 \mid \theta_1) = 1 - P(S_1 \mid \theta_1) = \frac{1}{3}$$

ونحصل على مصفوفة العائد بالمقياس اللاحق من الجدول ١٧ – ٢ بطرح 30 (ألف دولار) من كل مدخل فى المصفوفة ، لذلك نعكس تكلفة الاختبار . ويكون الربح المتوقع (بالألف دولار) للقرارات D_1 ، D_2 على التوالى بمعرفة الاحتمالات المعدلة هو

$$E(G_1 \mid \theta_1) = (60 - 30)(\tfrac{2}{3}) + (660 - 30)(\tfrac{1}{3}) = 230$$
$$E(G_2 \mid \theta_1) = (-100 - 30)(\tfrac{2}{3}) + (2000 - 30)(\tfrac{1}{3}) = 570$$



شكل ١٧ – ٣

حيث إن أكبر عائد متوقع يرتبط بـ D_2، فإن D_2 تكون هى القرار المفضل باعتبار المقياس اللاحق .

الشكل ١٧ – ٣ هو شجرة القرار لهذه العملية . واحتمال أن تدل الاختبارات على عدم وجود غاز $P(\theta_1)$، هى واحد ، حيث إن نتيجة التجربة معروفة .

١٧ – ٧ حل المسألة ١٧ – ٦ إذا دلت الاختبارات على وجود غاز .

أطلق على الحدث أن الاختبارات تدل على وجود غاز θ_2. من البيانات للمسألة ١٧ – ٦

$$P(\theta_2 \mid S_1) = 0.10 \qquad P(\theta_2 \mid S_2) = 0.70$$

الاحتمالات المبدئية هى $P(S_1) = 0.4,\ P(S_2) = 0.6$؛ لذلك يكون التوزيع الاحتمالى المعدل هو

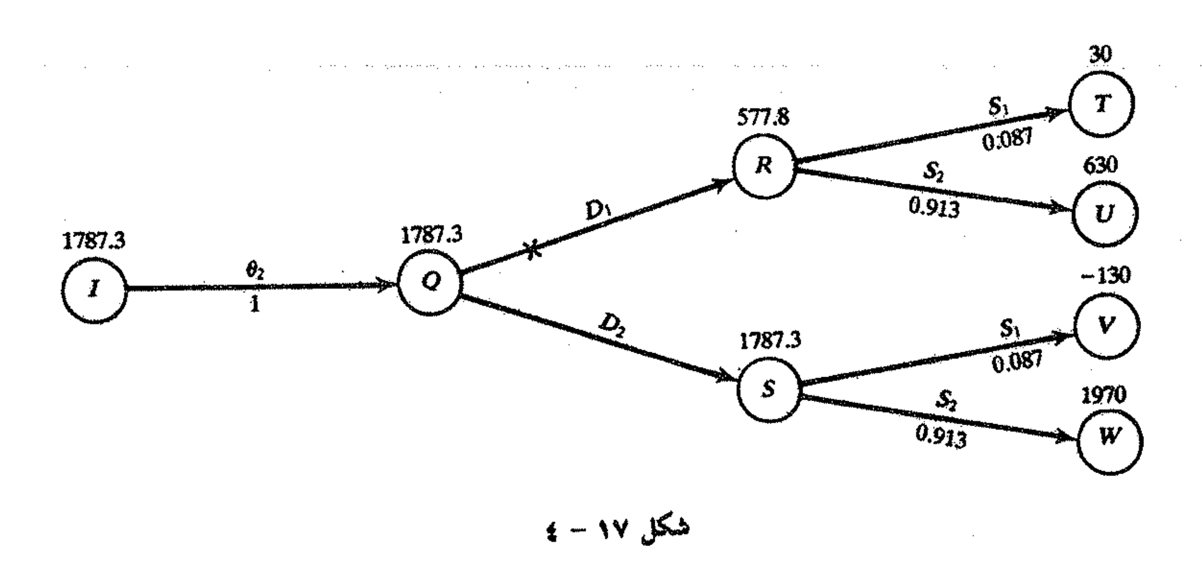
$$P(S_1 \mid \theta_2) = \frac{P(\theta_2 \mid S_1)\,P(S_1)}{P(\theta_2 \mid S_1)\,P(S_1) + P(\theta_2 \mid S_2)\,P(S_2)} = \frac{(0.10)(0.4)}{(0.10)(0.4) + (0.70)(0.6)} = 0.087$$
$$P(S_2 \mid \theta_2) = 1 - P(S_1 \mid \theta_2) = 0.913$$

ومرة أخرى يجب أن يخفض كل مدخل فى مصفوفة العائد الأصلية فى الجدول ١٧ – ٢ بـ 30 (ألف دولار) لتكلفة الاختبار . لذلك يكون العائد المتوقع (بالألف دولار) للقرارات D_1 ، D_2 بالنسبة إلى آخر توزيع احتمالى هو

$$E(G_1 \mid \theta_2) = (60 - 30)(0.087) + (660 - 30)(0.913) = 577.8$$
$$E(G_2 \mid \theta_2) = (-100 - 30)(0.087) + (2000 - 30)(0.913) = 1787.3$$

حيث إن أعلى عائد متوقع يرتبط بـ D_2 ، فإن D_2 يكون القرار المفضل بمفهوم المقياس اللاحق

الشكل ١٧ — ٤ هو شجرة القرار لهذه العملية . واحتمال أن تدل الاختبارات على وجود غاز $P(\theta_2)$ هو واحد ، حيث إن نتيجة التجربة معروفة .



شكل ١٧ — ٤

١٧ — ٨ ما هو القرار المفضل إذا كانت الاختبارات التى نوقشت فى المسائل ١٧ — ٦ ، ١٧ — ٧ لم تؤخذ كلية ، ولكن أخذت فى الاعتبار فقط .

هذه الحالة هى عملية قرار ذات مرحلتين . أولاً : يجب أن يقرر صاحب الأرض ما إذا كان سينفذ الاختبارات ، ثم بعد ذلك يجب أن يقرر ما إذا كان سيقبل عرض شركة الطاقة . اجعل .

قرار أن ينفذ الاختبارات $\equiv D_I$

قرار ألا ينفذ الاختبارات $\equiv D_{II}$

حالة أن الاختبارات تبين عدم وجود غاز $\equiv \theta_1$

حالة أن الاختبارات تبين وجود غاز $\equiv \theta_2$

شجرة القرار لهذه العملية هى شكل ١٧ — ٥ الذى يتكون أساساً من الأشكال ١٧ — ١ ، ١٧ — ٣ ، ١٧ — ٤ . والاختلافات الأساسية هى فى $P(\theta_1)$ ، $P(\theta_2)$. ولا تكون هذه الاحتمالات واحدة كما فى الأشكال ١٧ — ٣ ، ١٧ — ٤ ، وذلك لأن نتيجة التجربة غير معروفة . والحالات S_1 ، S_2 مع ذلك تكون غير مشتركة ، ولها مجموعة مخرجات مستنفدة ، ومن ثم .. من (٣) فى المسألة ١٧ — ٥ ومن البيانات المعطاة فى المسائل ١٧ — ٦ ، ١٧ — ٧ .

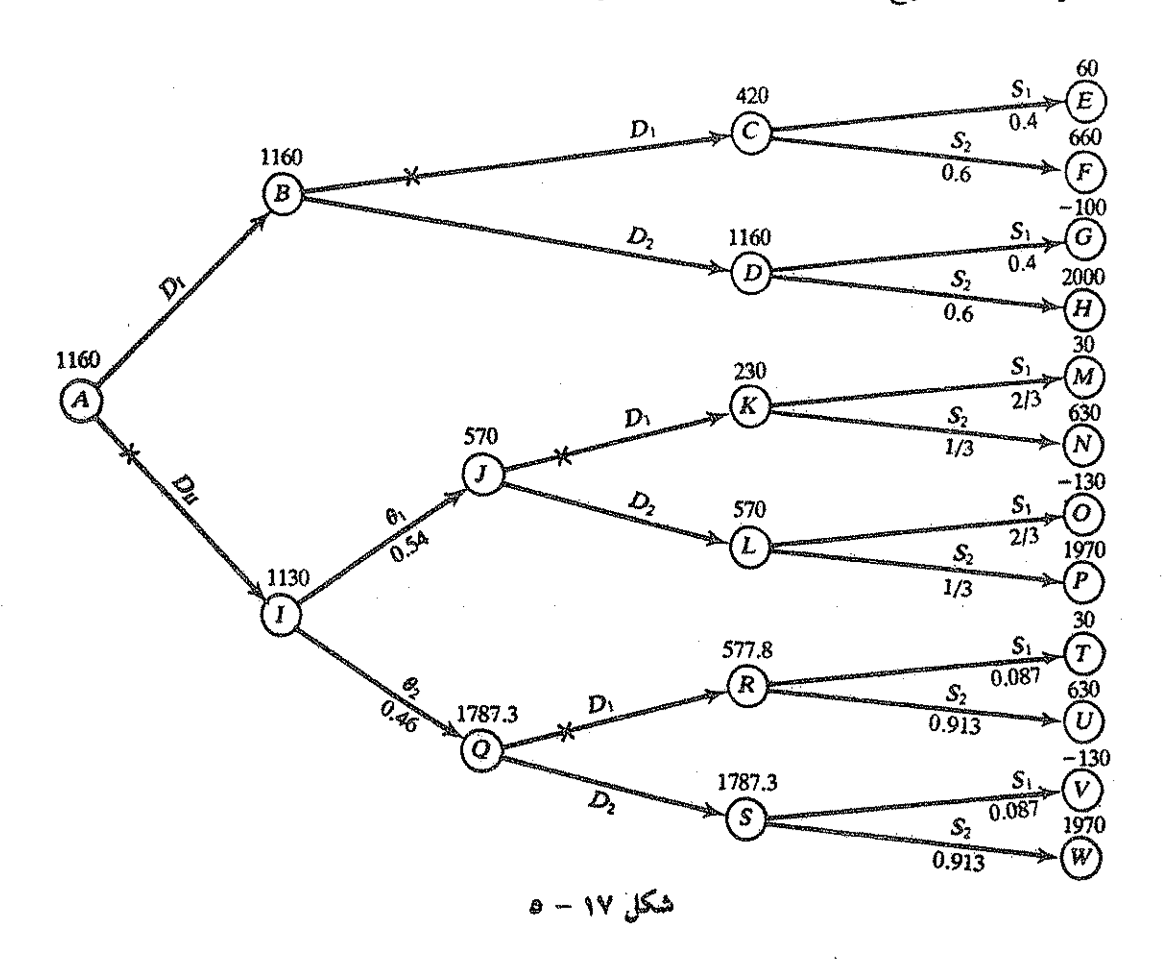
$$P(\theta_1) = P(\theta_1 \mid S_1)\,P(S_1) + P(\theta_1 \mid S_2)\,P(S_2) = (0.90)(0.4) + (0.30)(0.6) = 0.54$$
$$P(\theta_2) = P(\theta_2 \mid S_1)\,P(S_1) + P(\theta_2 \mid S_2)\,P(S_2) = (0.10)(0.4) + (0.70)(0.6) = 0.46$$

بهذه الاحتمالات يكون العائد المتوقع عند العقدة I هو

$$(570)(0.54) + (1787.3)(0.46) = 1130$$

وحيث إن العقدة B لها عائد متوقع أكبر من العقدة I، D_I تفضل على D_{II}. لذلك تكون القرارات المفضلة هى ألا ننفذ الاختبارات ، وألا نقبل عرض شركة الطاقة . والبديل لذلك أن يبدأ صاحب الأرض بالاستكشاف بمفرده فوراً .

لاحظ أن القرار المفضل هو D_2 ، بصرف النظر عما إذا تقرر عمل الاختبارات ، أو حتى بصرف النظر عن نتائج الاختبارات إذا تمت . لذلك .. فإن الاختبارات لا يكون لها أى تأثير على القرار النهائى ، وتمثل تكلفة فقط . وهذا يعكس الحقيقة ، وهى أن الفرق فى العائد المتوقع عند العقد B ، I فى شكل ١٧ ـــ ٥ هو بالتحديد تكلفة الاختبار .



شكل ١٧ – ٥

١٧ – ٩ تعتزم بلدية إحدى المدن استبدال أسطولها من العربات البنزين بعربات كهربية . ويدَّعى صانع العربات الكهربية أن البلدية ستوفر كثيراً خلال فترة استخدام العربات إذا غيرتها ، وتشك البلدية فى ذلك . إذا كان رأى الصانع صحيحاً ، فإن البلدية ستوفر مليون دولار . أما إذا كانت التكنولوجيا الجديدة غير سليمة (العربات الكهربية) ، كما يوعز بعض النقاد ، فإن هذا التحويل سيكلف المدينة 450,000 دولار. وهناك احتمال ثالث ، وهو ألا تحدث أى من الحالتين ، ولا تتكلف ، ولا توفر المدينة شيئاً نتيجة التحويل . وطبقاً لتقرير استشارى حديث ، فإن الاحتمالات لهذه الأحداث الثلاثة هى 0.25 ، 0.45 ، 0.30 . ولدى المدينة برنامج شامل إذا نفذته ، سيوضح التكلفة أو التوفير فى التحول إلى العربات الكهربية . يتضمن البرنامج تأجير ثلاث عربات لمدة 3 أشهر ، وتشغيلهم فى الظروف العادية . وتكلفة هذا البرنامج للمدينة ستكون 50,000 دولار . ويعتقد مستشار المدينة أن نتائج هذا البرنامج الشامل ستكون مرضية ، ولكن ليست نهائية . ويقدم المستشار جدول ١٧ – ٤ كترجمة للاحتمالات مبنية على خبرته فى المدن الأخرى ، وذلك لتأييد وجهة نظره . ما هى الأفعال التى تقرها المدينة لتعظيم الوفر المتوقع ؟

جدول ١٧ – ٤

يدل البرنامج الشامل على

عند التحويل يحدث	وفر	لا تغير	خساره
وفر النقود	0.6	0.3	0.1
نقطه التعادل	0.4	0.4	0.2
خسارة النقود	0.1	0.5	0.4

هذه العملية هى عملية ذات مرحلتين .أولًا يجب أن تقرر المدينة ما إذا كانت ستنفذ البرنامج الشامل أم لا ، ثم بعد ذلك يجب أن تقرر ما إذا كانت ستحول أسطولها إلى عربات كهربية أم لا . اجعل :

قرار ألا تنفذ البرنامج الشامل $D_I \equiv$

قرار أن تنفذ البرنامج الشامل $D_{II} \equiv$

حدث أن يدل البرنامج الشامل على توفير $\theta_1 \equiv$

حدث ألا يدل البرنامج الشامل على توفير أو خسارة $\theta_2 \equiv$

حدث ألا يدل البرنامج الشامل على خسارة $\theta_3 \equiv$

قرار التحول إلى العربات الكهربية $D_1 \equiv$

قرار عدم التحول إلى العربات الكهربية $D_2 \equiv$

حالة أن العربات الكهربية أرخص من عربات البنزين فى التشغيل $S_1 \equiv$

حالة أن العربات الكهربية لها نفس تكلفة تشغيل عربات البنزين $S_2 \equiv$

حالة أن العربات الكهربية أغلى من العربات البنزين فى التشغيل $S_3 \equiv$

مصفوفة العائد (بالألف دولار) هى

	S_1	S_2	S_3
D_1	1000	0	−450
D_2	0	0	0

التوزيع الاحتمالى الأولى للحالات هو $P(S_1) = 0.25,\ P(S_2) = 0.30, \text{ and } P(S_3) = 0.45.$

إذا لم ينفذ البرنامج الشامل ، فإن التوزيع الاحتمالى الأولى لن يعدل ، ويكون العائد المتوقع لـ D_1 ، D_2 هو على التوالى

$$E(G_1) = (1000)(0.25) + (0)(0.30) + (-450)(0.45) = 47.5$$

$$E(G_2) = (0)(0.25) + (0)(0.30) + (0)(0.45) = 0$$

وحيث إن أكبر عائد متوقع يرتبط بـ D_1 ، فإن D_1 تكون القرار المفضل بمفهوم المقياس السابق

إذا نفذ البرنامج الشامل تخفض كل المدخلات فى المصفوفة بـ 50 لتوضيح تكلفة الاختبار . ويتبع جدول ١٧ − ٤ أنه

$$P(\theta_1 | S_1) = 0.6 \qquad P(\theta_1 | S_2) = 0.4 \qquad P(\theta_1 | S_3) = 0.1$$
$$P(\theta_2 | S_1) = 0.3 \qquad P(\theta_2 | S_2) = 0.4 \qquad P(\theta_2 | S_3) = 0.5$$
$$P(\theta_3 | S_1) = 0.1 \qquad P(\theta_3 | S_2) = 0.2 \qquad P(\theta_3 | S_3) = 0.4$$

باستخدام نظرية بايز (٤) فى المسألة ١٧ − ٥ نحصل على

$$P(S_1 | \theta_1) = \frac{(0.6)(0.25)}{(0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45)} = 0.4762 \qquad (١)$$

$$P(S_2 | \theta_1) = \frac{(0.4)(0.30)}{(0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45)} = 0.3810 \qquad (٢)$$

$$P(S_3 | \theta_1) = \frac{(0.1)(0.45)}{(0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45)} = 0.1429 \qquad (٣)$$

(٤) $$P(S_1 | \theta_2) = \frac{(0.3)(0.25)}{(0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45)} = 0.1786$$

(٥) $$P(S_2 | \theta_2) = \frac{(0.4)(0.30)}{(0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45)} = 0.2857$$

(٦) $$P(S_3 | \theta_2) = \frac{(0.5)(0.45)}{(0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45)} = 0.5357$$

(٧) $$P(S_1 | \theta_3) = \frac{(0.1)(0.25)}{(0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45)} = 0.0943$$

(٨) $$P(S_2 | \theta_3) = \frac{(0.2)(0.30)}{(0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45)} = 0.2264$$

(٩) $$P(S_3 | \theta_3) = \frac{(0.4)(0.45)}{(0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45)} = 0.6792$$

وفى حدود التقريب للخطأ ، فإن كل مجموعة من الاحتمالات يكون مجموعها 1 .

إذا كانت نتيجة البرنامج الشامل ,θ_1 ، تعطى الاحتمالات المعدلة بالمعادلات (١) حتى (٣) ، ويكون العائد للقرارات D_1 ، D_2 هو على التوالى

$$E(G_1 | \theta_1) = (950)(0.4762) + (-50)(0.3810) + (-500)(0.1429) = 361.9 \qquad E(G_2 | \theta_1) = -50$$

ويكون القرار المفضل بمفهوم المعيار اللاحق هو ,D_1 .

وإذا كانت نتيجة البرنامج الشامل ,θ_2 ، تعطى الاحتمالات المعدلة بالمعادلات (٤) حتى (٦) ، ويكون العائد المتوقع للقرارات D_1 ، D_2 على التوالى

$$E(G_1 | \theta_2) = (950)(0.1786) + (-50)(0.2857) + (-500)(0.5357) = -112.5 \qquad E(G_2 | \theta_2) = -50$$

ويكون القرار المفضل بمفهوم المعيار اللاحق هو ,D_2 .

وإذا كانت نتيجة البرنامج الشامل ,θ_3 ، تعطى الاحتمالات المعدلة بالمعادلات (٧) حتى (٩) ، ويكون عائد القرارات D_1 ، D_2 على التوالى

$$E(G_1 | \theta_3) = (950)(0.0943) + (-50)(0.2264) + (-500)(0.6792) = -261.3 \qquad E(G_2 | \theta_3) = -50$$

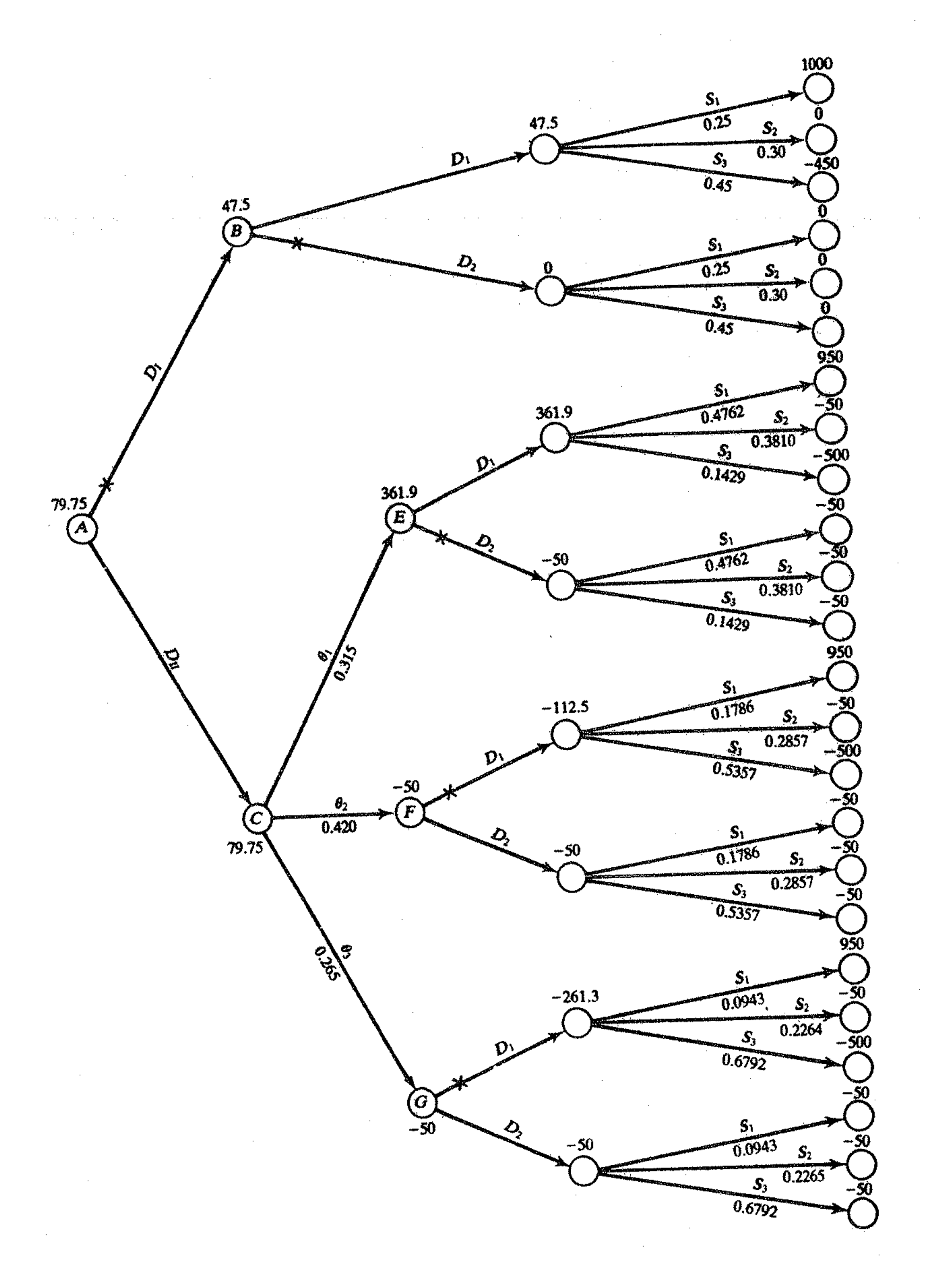
ويكون القرار المفضل بمفهوم المعيار اللاحق هو ,D_2 .

وشجرة القرار لهذه العملية هى شكل ١٧ – ٦ ، حيث تظهر النتائج التى حُصِلَ عليها على العقد غير الموضحة بحروف ، والأفرع المتجهة إلى والخارجة من هذه العقد . ويكون العائد المتوقع عند العقد ,B ,E ,F ,G هو العائد المرتبط بالعقد التالية لها إذا أخذت القرارات المفضلة .

يتبع (٣) فى المسألة ١٧ – ٥ أن

$$P(\theta_1) = P(\theta_1 | S_1)P(S_1) + P(\theta_1 | S_2)P(S_2) + P(\theta_1 | S_3)P(S_3)$$
$$= (0.6)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.1)(0.45) = 0.315$$
$$P(\theta_2) = P(\theta_2 | S_1)P(S_1) + P(\theta_2 | S_2)P(S_2) + P(\theta_2 | S_3)P(S_3)$$
$$= (0.3)(0.25) + (0.4)(0.30) + (0.5)(0.45) = 0.420$$
$$P(\theta_3) = P(\theta_3 | S_1)P(S_1) + P(\theta_3 | S_2)P(S_2) + P(\theta_3 | S_3)P(S_3)$$
$$= (0.1)(0.25) + (0.2)(0.30) + (0.4)(0.45) = 0.265$$

لذلك يكون العائد المتوقع عند العقدة C هو $(361.9)(0.315) + (-50)(0.420) + (-50)(0.265) = 79.75$



79.75
A
D1
DII
47.5
B
D1
D2
47.5
0
S1
0.25
S2
0.30
S3
0.45
1000
0
-450
0
0
0
C
79.75
θ1
0.315
θ2
0.420
θ3
0.265
E
361.9
F
-50
G
-50
361.9
-50
-112.5
-50
-261.3
-50
0.4762
0.3810
0.1429
0.1786
0.2857
0.5357
0.0943
0.2264
0.2265
0.6792
950
-50
-500

شكل ١٧ - ٦

وحيث إن هذه القيمة أكبر من العائد المتوقع عند العقدة B، فإن القرار المؤدى إلى العقدة C، بالتحديد D_{11}، هو القرار المفضل . ويجب أن تنفذ الشركة البرنامج الشامل وتتحول إلى العربات الكهربية فقط فى حالة حدوث توفير من البرنامج الشامل . ويمثل هذا الحل للمسألة فى شكل ١٧ – ٦ بالشجرة الفرعية المكونة من كل المسارات من العقدة A غير المقفلة بعلامة × :

١٧ – ١٠ اقترح موقفاً يكون فيه العائد الموضح بالجدول ١٧ – ٢ لا يعكس حقيقة القيمة الفعلية للعائد بالنسبة لصاحب الأرض فى المثال ١٧ – ١ . بيّن كيف تستخدم دالة المنفعة لفون نيومان لتصحيح اللامتساويات .

العائد بترتيب تنازلى هو :

$e_1 =$ 2 000 000 دولار $e_2 =$ 660 000 دولار $e_3 =$ 60 000 دولار $e_4 = -$ 100 000 دولار

إذا كانت 100,000 دولار تمثل الوفر الكلى لصاحب الأرض ، فإن فقدها يعتبر كارثة . وتجنب هذه الخسارة قد يكون له أهمية أكثر لدى صاحب الأرض من مكسب 2 مليون دولار . وهذا التفضيل لا ينعكس فى صف أرقام الدولارات فى العائد . وأكثر من ذلك .. 660,000 دولار قد تكون نقوداً كافية لتحقيق كل احتياجات الأرض لصاحبها . ومن الواضح أن مبلغ مليونى دولار أحسن ، ولكنها لا تساوى ثلاثة أمثال قيمتها كما هو موضح بصف الأرقام

يمكن لصاحب الأرض تحديد المنفعة من e_1 بـ 100 ، من e_4 بـ 1000 لتعكس خوفها من فقد مدخرات حياتها ، وبعد هذا التجزىء ، فإنها قد تجد نفسها فى حالة لا خلاف بين استلام e_2 بالتأكيد ، والاشتراك فى لعبة الحظ $\mathscr{L}(e_1, e_4; 0.999)$. عندئذ فإن e_2 تصبح

$$u(e_2) = (0.999)u(e_1) + (1 - 0.999)u(e_4) = (0.999)(100) + (0.001)(-1000) = 98.9$$

وقد يجد صاحب الأرض أيضاً أنه لا خلاف بين استلام e_3 بالتأكيد والاشتراك فى لعبة الحظ $\mathscr{L}(e_1, e_4; 0.95)$. عندئذ فإن تصبح

$$u(e_3) = (0.95)u(e_1) + (1 - 0.95)u(e_4) = (0.95)(100) + (0.05)(-1000) = 45$$

يوضح جدول ١٧ – ٥ مصفوفة العائد لعملية القرار بمعرفة هذه المنفعات

جدول ١٧ – ٥

	S_1	S_2
D_1	45	98.9
D_2	−1000	100

١٧ – ١١ حدد القرار المفضل فى ظل المعيار السابق لصاحب الأرض فى المثال ١٧ – ١ ، إذا كانت مصفوفة العائد موضحة بالجدول ١٧ – ٥ . ويقدر صاحب الأرض احتمال وجود غاز بـ 0.6 .

عند $P(S_1) = 0.4$ ، $P(S_2) = 0.6$، فإن العائد المتوقع لـ D_1 ، D_2 على التوالى هو

$$E(G_1) = (45)(0.4) + (98.9)(0.6) = 77.34 \qquad E(G_2) = (-1000)(0.4) + (100)(0.6) = -340$$

القرار المفضل هو D_1. وهو على النقيض من هذه النتيجة ، ونتيجة المسألة ١٧ – ٣ كذلك .

١٧ – ١٢ تمتلك سيدة تذكرة مباراة كرة قدم فى يوم تتوقع فيه مصلحة الأرصاد سقوط الأمطار باحتمال 40 فى المئة . يمكن للسيدة البقاء بالمنزل لمشاهدة التليفزيون ، وهو الاختيار المفضل تحت ظروف المطر ، أو الذهاب إلى الاستاد ، وهو القرار المفضل فى ظروف الجفاف . ما هوالقرار الذى يجب أن تتخذه ؟

أطلق على قرار الذهاب إلى الاستاد D_1، وقرار البقاء بالمنزل D_2. وحالات الطبيعة هى S_1 (ستمطر) ، S_2 (لن تمطر) ، عند $P(S_1) = 0.4,\ P(S_2) = 0.6.$ الأربع تكوينات الممكنة هى كما هو موضح ، مرتبة طبقاً للأهمية بالنسبة للسيدة :

e_1: تذهب إلى الاستاد ولا تمطر
e_2: تبقى بالمنزل وتمطر
e_3: تبقى بالمنزل ولاتمطر
e_4: تذهب إلى الأستاد وتمطر

يمكن تقييم مستوى رضاها كمياً بالنسبة لـ e_1 ، e_4 بالأرقام 100 ، 0 على التوالى وبعد عناية فى التفكير ،فإنها تشعر أنها لا تختلف عن حدوث e_2 بالتأكيد أوالإشتراك فى لعبة الحظ $\mathcal{L}(e_1, e_4; 0.85)$. وتحدد السيدة الاحتمالات المكافئة لـ e_3 عند $p_3 = 0.5$. لذلك .

$$u(e_2) = (0.85)(100) + (0.15)(0) = 85 \qquad u(e_3) = (0.5)(100) + (0.5)(0) = 50$$

وتصبح مصفوفة العائد بمعرفة المنفعة لهذه العملية

	S_1	S_2
D_1	0	100
D_2	85	50

ويكون العائد المتوقع للقرارات D_1 ، D_2 على التوالى

$$E(G_1) = (0)(0.4) + (100)(0.6) = 60$$
$$E(G_2) = (85)(0.4) + (50)(0.6) = 64$$

وحيث أن $E(G_2)$ أكبر من $E(G_1)$، فيكون القرار المفضل بمفهوم المعيار السابق هو D_2 ، وتبقى السيدة بالمنزل .

١٧ – ١٣ حل المسألة ١٧ – ٤ إذا كانت منفعة المحل بالنقود كما فى شكل ١٧ – ٧ حيث أن كميات النقود فى جدول ١٧ – ٣ لاتعكس القيمة النسبية للمحل من مختلف العائد ، فإننا نستبدل كل كمية بالمنفعة منها ونحصل على جدول١٧ – ٦ .

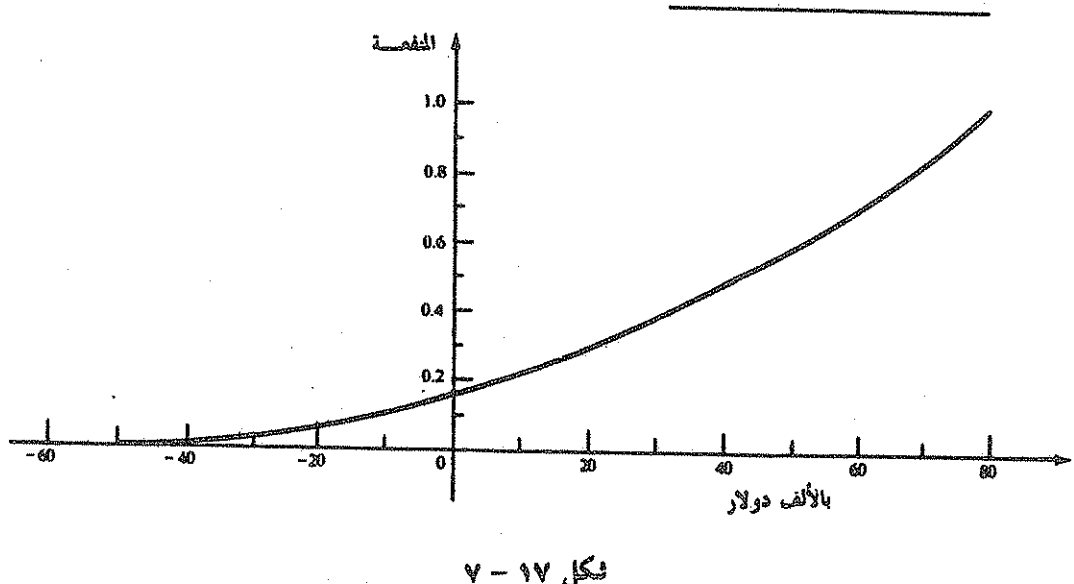
عند $P(S_1) = 0.25,\ P(S_2) = 0.4,\ P(S_3) = 0.35,$

جدول ١٧ – ٦

	S_1	S_2	S_3
D_1	0	0.15	1
D_2	0.09	0.38	0.43
D_3	0.72	0.53	0.02
D_4	1	0.48	0

$$E(G_1) = (0)(0.25) + (0.15)(0.4) + (1)(0.35) = 0.410$$
$$E(G_2) = (0.09)(0.25) + (0.38)(0.4) + (0.43)(0.35) = 0.325$$
$$E(G_2) = (0.72)(0.25) + (0.53)(0.4) + (0.02)(0.35) = 0.399$$
$$E(G_4) = (1)(0.25) + (0.48)(0.4) + (0)(0.35) = 0.442$$

ويكون القرار المفضل بمفهوم المقياس السابق هو D_4 .



شكل ١٧ - ٧

١٧ - ١٤ المكافىء المؤكد للقرار ذو العائد النقدى هو كمية الدولارات C التى لها منفعه تساوى المنفعة المتوقعة لهذا القرار . حدد المكافئات المؤكدة لكل من القرارات فى المسألة ١٧ - ٣ .

المنفعة المتوقعة لـ D_1 تحددت فى المسألة ١٧ - ١٣ لتكون 0.410 . باستخدام شكل ١٧ - ٧ نقدر $u(33\,000) = 0.410;$ ؛ ومن ثم $C_1 = 33\,000$ دولار .

بالمثل ، نقدر المكافئات المؤكدة لـ D_2, D_3, and D_4 بـ $C_2 = 24\,000$, ، $C_3 = 32\,000$, ، $C_4 = 36\,000$, دولاراً على التوالى .

١٧ - ١٥ المجازفة الأولية للقرار الذى له عائد نقدى هى الكمية R التى يزيد بها العائد بالدولار لهذا القرار عن المكافىء المؤكد للقرار . حدد المجازفة الأولية لكل من القرارات فى المسألة ١٧ - ١٣ .

تم الحصول على العائد المتوقع بالدولار لكل من D_1 حتى D_4 فى المسائل ١٧ - ٤ بالقيم 15 500, 17.4 as 22 500, and 20 250, دولار على التوالى . بأخذ الفروق بين هذه الكميات وبين مكافئيها المؤكدين كما تحدد فى المسألة ١٧ - ١٤ ، نجد أن

$$R_1 = 15\,500 - 33\,000 = -17\,500 \text{ دولار}$$
$$R_2 = 21\,750 - 24\,000 = -2250 \text{ دولار}$$
$$R_3 = 22\,500 - 32\,000 = -9500 \text{ دولار}$$
$$R_4 = 20\,250 - 36\,000 = -15\,750 \text{ دولار}$$

مسائل مكملة

Supplementary Problems

١٧ - ١٦ حدد القرارات المفضلة فى ظل المقاييس البسيطة لعمليات القرار التالية تلقى أحد الزراع فى الخريف 50000 دولار نظير محصول البرتقال الذى سيُحصد فى بداية العام التالى . إذا قبل الزارع هذا العرض ، فإن النقود تكون له بصرف النظر عن جودة أو كمية المحصول ، وإذا لم يقبل الزارع العرض ، فإنه يجب أن يبيع المحصول فى السوق بعد حصاده . وتحت الظروف العادية فإن الزارع يتوقع الحصول على 70 000 دولار نظير محصوله من السوق . وإذا تعرض المحصول للصقيع ، فإن جزءاً كبيراً من المحصول سيتلف ؛ ويتوقع الحصول على 15 000 دولار فقط من السوق .

١٧ - ١٧ يجب أن يقرر أحد الصناع ما إذا كان سيمد ضمان متعهد يرغب فى فتح حساب مع الشركة . من الخبرة السابقة بالحسابات الجديدة فإن 50 فى المئة منها يقع تحت المجازفة البسيطة ، و 30 فى المئة مجازفة متوسطة ، و 20 فى المئة مجازفة كبيرة . إذا امتد الضمان ، فإن الصانع يتوقع خسارة 30 000 دولار بمجازفة قليلة ، ومكسب 25 000 دولار بمجازفة متوسطة ، و 50 000 دولار بمجازفة كبيرة . وإذا لم يمتد الضمان ، فإن الصانع لا يكسب ولا يخسر ، حيث إنه لن يتم أى عمل مع المتعهد . حدد القرار المفضل بمفهوم المقاييس السابقة

١٧ - ١٨ تفكر إحدى الشركات فى عمليات إنتاج جديد بحيث إذا ثبتت كفاءتها ، فإنها ستوفر للشركة 350 000 دولار كل عام للسنوات الخمس القادمة ، وإذا لم تثبت كفاءتها ، فإن تكلفة الخسارة فى المبيعات بالإضافة إلى مصروفات التحويل إلى العمليات الجديدة ، وإعادة التحويل إلى العمليات القديمة قد تصل إلى 925 000 دولار . حدد القرار المفضل بمفهوم المعيار السابق إذا كانت الشركة تشعر بأن احتمال نجاح العمليات الجديدة 80 فى المئة .

١٧ - ١٩ حدد القرار المفضل بمفهوم المعيار السابق للمسألة ١٧ - ١٦ إذا كان الزارع فى الماضى ، قد خسر كثيراً من محصوله نتيجة الصقيع مرة واحدة كل سبع سنوات .

١٧ - ٢٠ افترض أنه قبل اتخاذ القرار يدفع الصانع فى المسألة ١٧ - ١٧ 1000 دولار رسوم تقرير الضمان على المتعهد . ويضع التقرير على المتعهد مجازفة قليلة ، ولكن الصانع يعلم بأن طريقة التقرير لا يُعتمد عليها كليةً . ويعترف مكتب الضمان بأن هناك مجازفة متوسطة 30 فى المئة من الوقت ، وتقدر المجازفة العالية على أنها ضعيفه 5 فى المئة من الوقت . وتقدر المجازفة الضعيفه بالضبط 90 فى المئة من الوقت . وبناء على هذه البيانات .. حدد القرار المفضل للصانع بمفهوم المعيار اللاحق .

١٧ - ٢١ للشركة فى المسألة ١٧ - ١٨ بديل ثالث هو أن تستكمل مرحلة الاعتماد على نفسها فى العملية الجديدة ، وتختبر كفاءتها قبل أن تقرر التحويل . وتكلفة فترة اختبار اعتمادها على نفسها تقدر بـ 75 000 دولار تسترد إذا نفذت العملية الجديدة . وإذا كانت فترة الاعتماد على نفسها ليست ذات كفاءة ، فإن خسائر مبيعات قيمتها 25 000 دولار ستحدث خلال الاختبار .

إذا كانت العملية الجديدة ذات كفاءة ، فإن فترة الاعتماد ستعمل بكفاءة باحتمال 99 فى المئة . وإذا كانت العملية الجديدة ليست ذات كفاءة على الإطلاق ، فإن فترة الاعتماد على النفس يمكن أن تستمر بكفاءة ، وتقدر الشركة احتمال حدوث ذلك بنسبة 60 فى المئة . انشىء شجرة القرار لعملية القرار الكلية ، وحدد التصرفات المفضلة .

١٧ - ٢٢ يعتقد رؤساء إحدى الشركات لصناعة منافسة أن أحد الموظفين يمد المنافسين بمعلومات سرية عن الشركة ويعتقد الرئيس بدرجة تأكد 90 فى المئة أن هذا الموظف هو أمين صندوق الشركة ، والذى أدت علاقاته إلى الحصول على تمويل كبير للشركة . إذا فصلته الشركة وكان هو المبلغ ، فإن الشركة تكسب 100 000 دولار . وإذا فصلته الشركة ولم يكن هو المُبلغ فستخسر الشركة خبرته ، ويظل المُبلغ بين موظفيها بخسارة للشركة 500 000 دولار . وإذا لم تفصل الشركة أمين الصندوق ، فإن الشركة ستخسر 300 000 دولار ، سواء أكان هوَ المُبلغ أم لا ، حيث إنه فى كلتا الحالتين سيظل المُبلغ داخل الشركة . وقبل تقرير مصير أمين الصندوق ، فإن رئيس الشركة يمكنه طلب اختبار كذب . ولعدم الوقوع فى المسئولية ، فإن هذا التفتيش يجب أن يشمل كل موظفى الشركة بتكلفة كلية 30 000 دولار . وهناك مشكلة أخرى ، وهى أن اختبارات الكذب ليست مؤكدة تماماً ، فإذا كان الشخص كاذباً ، فإن الاختبار يكشفه بنسبة 90 فى المئة من الحالات ، ولكن إذا لم يكن الشخص كاذباً ، فإن الاختبار سيقرر ذلك فى 75 فى المئة من الحالات . ما هى الإجراءات التى يجب أن يتخذها رئيس الشركة ؟

١٧ - ٢٣ يعتزم أحد مصانع الأغذية تقديم خط جديد للوجبات الجاهزة على المستوى القومى ، وتقدر الشركة ربحاً 30 مليون دولار إذا كان الإنتاج ناجحاً بدرجة كبيرة ، و 20 مليون دولار إذا كان ناجحاً بدرجة معتدلة ، وخسارة 14 مليون دولار إذا لم يكن ناجحاً . وإذا لم تقدم الشركة هذا الخط ، فإن مصروفات البحوث والتطوير ، وتقدر بـ 3 مليون دولار ، يجب أن تحتسب من الخسائر . وتشير التقديرات أن احتمال النجاح الكبير 10 فى المئة ، والنجاح العادى 40 فى المئة .

وقبل تقديم هذا الخط على المستوى القومى ، فإن الشركة تختبره على المستوى المحلى . وتكلفة هذا الاختبار هى 1 مليون دولار . وبالرغم من أن نتائج الاختبار قد تكون مرضية ، إلا أنها ليست قاطعة ، والاعتماد على هذا الاختبار يعطى بالاحتمالات المشروطة الموضحة بالجدول ١٧ - ٧ . ماهو قرار المصنع الذى يجب أن يكون ؟

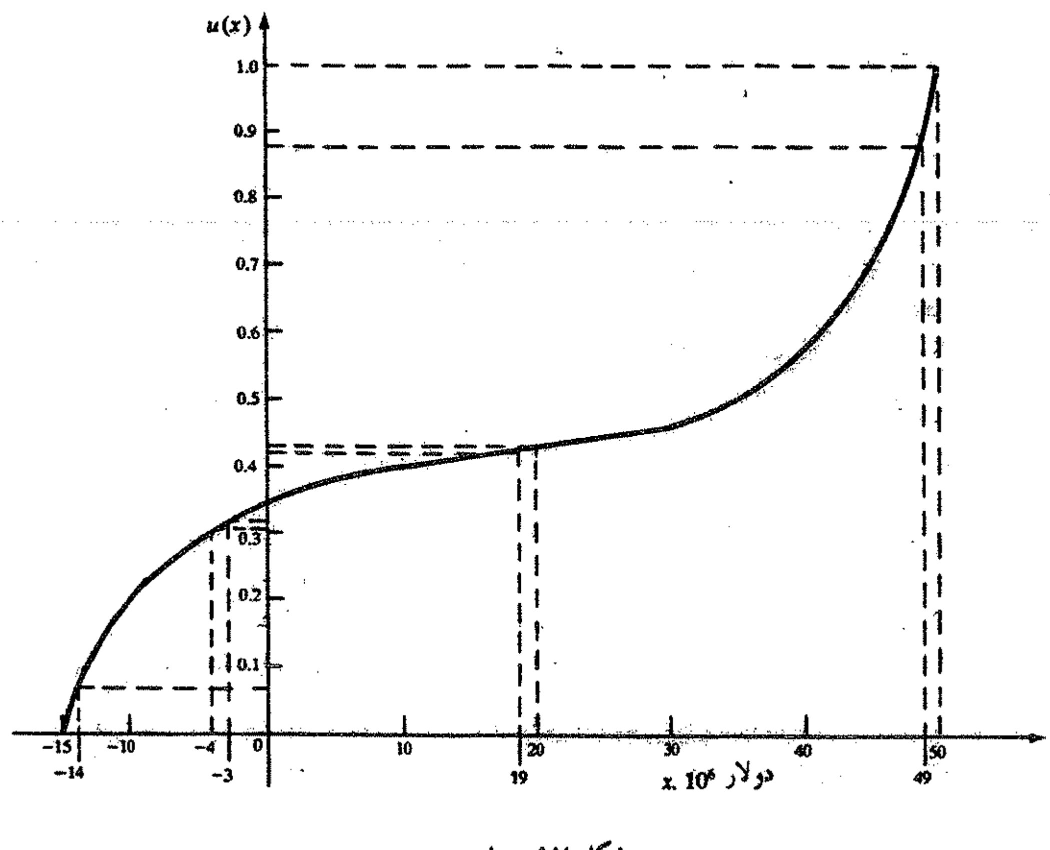
جدول ١٧ - ٧

		نتائج الاختبار تدل على		
		نجاح كبير	نجاح عادى	لا نجاح
النتيجة الفعلية	نجاح كبير	0.6	0.4	0
	نجاح عادى	0.2	0.6	0.2
	لا نجاح	0.1	0.3	0.6

١٧ - ٢٤ حدد أكبر كمية نقود يجب أن تدفعها المدينة فى المسألة ١٧ - ٩ للبرنامج الشامل . (ملحوظة : تقدر قيمة الاختبار بالفرق بين العائد المتوقع للعملية إذا نفذ الاختبار بدون تكلفة ، والعائد المتوقع من العملية يتحقق بدون اختبار) .

١٧ - ٢٥ حدد أقصى كمية من النقود يجب أن يدفعها رئيس الشركة فى المسألة ١٧ - ٢٢ لاختبارات الكذب . انشىء شجرة للعملية .

١٧ - ٢٦ حل المسألة ١٧ - ٢٣ إذا كانت منفعة مصنع الأغذية بالنقود توضح بالشكل ١٧ - ٨ .



شكل ١٧ – ٨

١٧ – ٢٧ اشتق المنفعة بالدولار للمخرجات $e_1 = 5000,\ e_2 = 4000,\ e_3 = 3000,\ e_4 = 2000, \text{ and } e_5 = 1000$ إذا كانت $u(e_1) = 100,\ u(e_5) = -50,$ ، والاحتمالات المكافئة هى $p_2 = 0.9,\ p_3 = 0.7, \text{ and } p_4 = 0.2.$

١٧ – ٢٨ حدد المكافىء المؤكد ، والمجازفة الأولية للقرارات المفضلة فى المسألة ١٧ – ٢٦ .

١٧ – ٢٩ يبحث أحد متخذى القرارات عن مجازفة بالنسبة لاتخاذ قرار عملية على مدى محدد للعائد دالة المنفعة $u(x)$ مقعرة بالتحديد (بمعنى $u''(x) > 0$ على هذا المدى) . ويتجنب المجازفة إذا كانت $u(x)$ محدبة بالتحديد(أى ان $u''(x) < 0$ على هذا المدى) . إذا كانت $u(x)$ خط مستقيم (بمعنى $u''(x) < 0$ على هذا المدى ، فإن متخذ القرار لا يتأثر بالمجازفة . حدد اتجاهات المجازفة لمتخذ القرار فى المسألة ١٧ – ٢٦ .

١٧ – ٣٠ من تعريف الدوال المحدبة والمقعرة المعطاة فى الفصل 11 ، ومن حقيقة أن دوال المنفعة تزيد على وتيرة واحدة ، بينّ أن المجازفة الأولية تكون موجبة لمتخذ القرار الذى يتجنب المجازفة ، وسالبة لمتخذ القرار الذى يبحث عن المجازفة .

١٧ – ٣١ مصفوفة الاعتذار هى مصفوفة عائد تتلاشى فيها عناصر كل عمود بواسطة أكبر عنصر فى العمود . أوجد مصفوفة الاعتذار المناظرة للجدول ١٧ – ٣٠ .

١٧ – ٣٢ حل المسألة ١٧ – ١ ، ١٧ – ٣ باستخدام مصفوفة الاعتذار ، بدلًا من الجدول ١٧ – ٢ ، ثم تحقق من أن القرارات المفضلة بمصفوفة الاعتذار ليس من الضرورى أن تكون هى نفسها مثل قرارات مصفوفة العائد فى ظل المعايير البسيطة ، ولكن كلتا المصفوفتين تؤدى إلى نفس القرارات المفضلة بمفهوم المعيار السابق .

الفصل الثامن عشر

البرمجة الديناميكية التصادفية
Stochastic Dynamic Programming

عمليات القرار التصادفية المتعددة المراحل
STOCHASTIC MULTISTAGE DECISION PROCESSES

تكون عملية القرار المتعددة المراحل « تصادفية » إذا كان العائد المرتبط بقرار واحد على الأقل فى العملية عشوائياً . وتدخل هذه العشوائية عموماً بإحدى طريقتين ، إما أن تحدد الحالات بشكل لا بديل له بواسطة القرارات ، ولكن العائد المرتبط بحالة أو أكثر يكون غير مؤكد (انظر الفصل ١٤) ، (انظر المسألة ١٨ – ١) أو يحدد العائد بشكل لا بديل له بواسطة الحالات ، ولكن الحالات الناتجة من واحد أو أكثر من القرارات تكون غير مؤكدة (انظر المسألة ١٨ – ٢) .

وإذا كان التوزيع الاحتمالى الذى يحكم الأحداث العشوائية معروفاً ، وكان عدد المراحل وعدد الحالات محدداً ، فإن مدخل البرمجة الديناميكية المقدم فى فصل ١٤ يكون مفيداً فى جعل عملية القرار التصادفية المتعددة المراحل مُثلى . والطريقة العامة هى أمثلية قيمة العائد المتوقع . (وكاستثناء ، انظر المسألة ١٨ – ٣) . وفى الحالات التى تحدث فيها العشوائية بطريقة استثنائية فى العائد المرتبط بالحالات ، وليس فى الحالات الناتجة من القرارات ، فإن هذه الطريقة يكون لها تأثير فى تحويل العملية التصادفية إلى عملية ثابتة .

جداول السياسة POLICY TABLES

فى العمليات التى توجد فيها العشوائية ، فى الحالات المرتبطة بالقرارات ، نجد أن السياسة — وبالأخص السياسة المثلى — يمكن أن تعرض فى صورة « جدول السياسة » الذى يشابه جدول ١٨ – ١ . وهنا $d_j(a_k)$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, r)$ تدل على القرار عند المرحلة j إذا وجدت العملية نفسها عند الحالة a_k

جدول ١٨ – ١

مراحل \ حالات	a_1	a_2	$\cdots$	a_r
1	$d_1(a_1)$	$d_1(a_2)$	$\cdots$	$d_1(a_r)$
2	$d_2(a_1)$	$d_2(a_2)$	$\cdots$	$d_2(a_r)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$d_n(a_1)$	$d_n(a_2)$	$\cdots$	$d_n(a_r)$

مسائل محلولة

Solved Problems

١٨ – ١ ثمان كميات من البرتقال يجب أن توزع على ثلاثة مخازن . والاحتياج من البرتقال عند كل مخزن عشوائى . وطبقاً للتوزيعات الاحتمالية الموضحة فى جدول ١٨ – ٢ ، فإن الربح من الكمية المباعة فى المخازن 3 ، 2 ، 1 هو 21 ، 20 ، 18 دولار على التوالى . حدد عدد الكميات (بشرط أن تكون عدد صحيح) التى يجب أن تخصص لكل مخزن لتعظيم الربح الكلى المتوقع .

جدول ١٨ – ٢

الكميات	احتمالات الطلب		
	المخزن 1	المخزن 2	المخزن 3
0	0.1	0	0.1
1	0.2	0.2	0.3
2	0.3	0.6	0.2
3	0.2	0	0.2
4	0.1	0.2	0
5	0.1	0	0.2

هذه العملية هى عملية ذات ثلاث مراحل ، وفيها تمثل المرحلة j تسليم البرتقال إلى المخزن j . والحالات لكل مرحلة $u = 0, 1, \ldots, 8$ تمثل عدد كميات البرتقال المتاحة للتسليم للمخزن . لا توجد عشوائية فى الحالة الناتجة عن أى قرار — إذا خصص 2 كمية إلى مخزن ، فإن هذا المخزن سيخزن 2 كمية ، ولكن هناك عشوائية فى عائد كل حالة . وعند وجود كميتين فى المخزن ، فإن المخزن يمكن أن يبيع 0 ، 1 أو 2 كمية ، وفى كل احتمال ينتج عائد مختلف . وبالتالى نعظم العائد الكلى المتوقع ، فضلاً عن العائد الكلى . نحدد :

الربح المتوقع من تخصيص x كمية للمخزن j = $f_j(x)$

أعلى ربح متوقع ابتداءً من المرحلة j فى الحالة u = $m_j(u)$

القرار المتخذ عن المرحلة j الذى يحقق $m_j(u)$ = $d_j(u)$

وتعرض قيم دوال الربحية (بالدولار) فى جدول ١٨ – ٣ . وبحسابات مماثلة — مثلاً $f_1(3)$ تتبع : إذا خصص لها 3 كميات ، فإن المخزن 1 يربح 0 دولار إذا بيعت 0 كمية ؛ و 18 دولاراً إذا بيعت واحدة ؛ و 36 دولاراً إذا بيعت إثنتان ؛ و 54 دولاراً إذا بيعت ثلاث . والاحتمالات المناظرة للثلاثة أحداث الأولى هى : من جدول ١٨ – ٢ ؛ 0.1 ، 0.2 ، 0.3 والاحتمال للحدث الرابع هو : أن الطلب سيساوى أو يزيد عن 3 كميات ، $0.4 = 0.2 + 0.1 + 0.1$.

لذلك

$$f_1(3) = (0)(0.1) + (18)(0.2) + (36)(0.3) + (54)(0.4) = 36$$

وبدلالة $f_j(x)$ مسألة بصيغة ثابتة تتحقق بالنموذج (١٤ – ١) . وبتطبيق أساليب الفصل ١٤ ، نوجد الجدول ١٨ – ٤ . وتكون السياسة المثلى هى تخصيص 3 كميات من البرتقال للمخزن 1 ، وكميتين للمخزن 2 ، وثلاث كميات للمخزن 3 ، بربح متوقع كلى 111.90 دولار .

جدول ١٨ – ٣

f \ x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(x)$	0	16.20	28.80	36.00	39.60	41.40	41.40	41.40	41.40
$f_2(x)$	0	20.00	36.00	40.00	44.00	44.00	44.00	44.00	44.00
$f_3(x)$	0	18.90	31.50	39.90	44.10	48.30	48.30	48.30	

جدول ١٨ – ٤

	u								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_3(u)$	0	18.90	31.50	39.90	44.10	48.30	48.30	48.30	48.30
$d_3(u)$	0	1	2	3	4	5	5	5	5
$m_2(u)$	0	20.00	38.90	54.90	67.50	75.90	80.10	84.30	88.30
$d_2(u)$	0	1	1	2	2	2	2	2	3
$m_1(u)$	...	...	...	...	...	...	...	...	111.90
$d_1(u)$	...	...	...	...	...	...	...	...	3

١٨ – ٢ يمتلك أحد الأشخاص ثلاث وحدات نقدية (ألف دولار) متاحة للاستثمار فى إحدى فرص العمل التى تثمر فى عام واحد . والعمل بهذه الفرصة مجازفة ، حيث إن العائد إما أن يتضاعف ، أو يكون لا شيء . ومن الخبرة السابقة .. فإن احتمال مضاعفة نقود الشخص هى 0.6 ، بينما فرصة خسارة الاستثمار 0.4 . حدد استراتيجية للاستثمار للسنوات الأربع التالية التى تعظم الرصيد الكلى المتوقع فى نهاية هذه الفترة ، إذا كان الربح خلال عام يمكن إعادة استثماره فى العام التالى ، وكانت الاستثمارات مقيدة بالوحدة الكاملة .

هذه العملية ذات أربع مراحل ، حيث تمثل كل مرحلة سنة كاملة . وتكون الحالات هى الكميات المتاحة للاستثمار $u_4 = 0, 1, \ldots, 24$ (نحصل على الأخيرة باستثمار كل الأموال المتاحة كل عام ، ويتضاعف الاستثمار كل مرة) للمرحلة 4 ، $u_3 = 0, 1, \ldots, 12$ للمرحلة 3 ، $u_2 = 0, 1, \ldots, 6$ للمرحلة 2 ، $u_1 = 3$ للمرحلة 1 ، وتحدث العشوائية هنا فى الحالة التى تدخل بقرار خاص . فمثلاً ، إذا امتلك أحد الأشخاص 3 وحدات (بمعنى الحالة الحالية هى 3) ، وصمم على استثمار وحدتين ، فإن الحالة التالية تكون إما 5 أو 1 متوقفة على ما إذا كانت الكمية المستثمرة ستضاعف أو تخسر . اكتب

$m_j(u_j) \equiv$ أعلى رصيد متوقع فى نهاية العملية ابتداءً من الحالة u_j عند المرحلة j
$d_j(u_j) \equiv$ الكمية المستثمرة عند المرحلة j التى تحقق $m_j(u_j)$ إذا دخل أحد المرحلة j بـ u_j وحدة ، فإن x وحدة $(x = 0, 1, \ldots, u_j)$ يمكن أن تستثمر ، تاركة $u_j - x$ وحدة كاحتياطى . إذا تضاعفت الكمية المستثمرة ؛ فسيكون هناك .

$$2x + (u_j - x) = u_j + x$$

وحدة متاحة للمرحلة التالية ؛ وإذا خسرت الوحدات المستثمرة ، فإن الاحتياطى $(u_j - x)$ وحدة سيكون متاحاً للمرحلة التالية فقط . وأحسن عائد من هذه النقطة هو إما $m_{j+1}(u_j + x)$ ، أو $m_{j+1}(u_j - x)$. والقيمة المتوقعة لهذا العائد تكون

$$0.6\, m_{j+1}(u_j + x) + 0.4\, m_{j+1}(u_j - x)$$

والاختيار الأمثل لـ x هى تلك الكمية التى تعظم التعبير الرياضى السابق

$$m_j(u_j) = \underset{x=0,1,\ldots,u_j}{\text{أعلى}} [0.6\, m_{j+1}(u_j + x) + 0.4\, m_{j+1}(u_j - x)] \qquad (١)$$

المعادلة (١) هى صيغة عكسية للعملية ، وتتحقق عند $j = 1, 2, 3$ ، كما تتحقق أيضاً عند $j = 4$ بالشرط النهائى $m_5(u) \equiv u$. ومن الواضح أنه حيث إن m_5 دالة خطية متزايدة ، فكذلك $m_4, \ldots, m_1$. والحقيقة أنه ، بتنفيذ التعظيم فى (١) نحصل على

$$m_4(u_4) = 1.2\,u_4 \qquad m_3(u_3) = (1.2)^2 u_3 \qquad m_2(u_2) = (1.2)^3 u_2 \qquad m_1(u_1) = (1.2)^4 u_1$$

عند $d_j(u_j) = u_j \;\; (j = 4, 3, 2, 1)$. ، لذلك فإن الرصيد الأمثل المتوقع يكون

$$m_1(3) = (1.2)^4(3) = 6.2208 \text{ وحدة}$$

نحصل عليها باستثمار كل الوحدات المتاحة فى كل عام من العملية . لاحظ أن هذه السياسة المثلى يمكن أن تنتج إما 48 وحدة ، أو 0 وحدة فى نهاية 4 سنوات ، متوقفةً على ما إذا تضاعفت كل الاستثمارات ، أو أن أحد الاستثمارات يخسر كليةً . وبالرغم من ذلك .. فإن العائد المتوقع بهذه السياسة هو

$$(48)(0.6)^4 + (0)[1 - (0.6)^4] = 6.2208 \text{ وحدة}$$

حيث إن $(0.6)^4$ هى احتمال أن كل الاستثمارات الأربعة ناجحة ، و $1 - (0.6)^4$ هى احتمال أن استثماراً واحداً يفشل على الأقل .

١٨ - ٣ حل المسألة ١٨ - ٢ إذا كان الهدف هو تعظيم احتمال تجميع أرصدة على الأقل 5 وحدات (ألف دولار) بعد 4 سنوات .

هذه المسألة لا تتعامل مع القيمة المتوقعة للعائد ، ولكن إلى حد ما مع احتمال أن العائد يكون بحجم معين . وكمثال : إذا نفذ المستثمر سياسة الاستثمار لكل الوحدات المتاحة فى كل مرحلة ، وكما هو واضح فى المسألة ١٨ - ٢ ، فإن الاحتمال أن تنتهى العملية بـ 5 وحدات أو أكثر هو $(0.6)^4 = 0.1296$. . ويكون السؤال هو : هل يمكن تحسين هذه القيمة بأى اختيار لسياسة أخرى ؟ وتكون الحالات والمراحل كما هى موضحة فى المسألة ١٨ - ٢ . اكتب

$E \equiv$ حدث أن تنتهى العملية بـ 5 وحدات أو أكثر

$m_j(u_j) \equiv$ احتمال E بمعرفة أن الحالة عند المرحلة j هى u_j ، وأن السياسة المثلى ستتبع ابتداءً من المرحلة j

$d_j(u_j) \equiv$ الكمية المستثمرة عند المرحلة j التى تحقق $m_j(u_j)$

إذا استثمرت x وحدة $(x = 0, 1, \ldots, u_j)$ عند المرحلة j ، فإنه ، كما فى المسألة ١٨ - ٢

$$P(u_{j+1} = u_j + x) = 0.6 \qquad P(u_{j+1} = u_j - x) = 0.4$$

وبقاعدة الاحتمالات المشروطة [(٣) فى المسألة ١٧ - ٥ عند الضعف $\equiv H_1$ ، ولا شىء $\equiv H_2$] ، فإن التعبير الرياضى

$$0.6\, m_{j+1}(u_j + x) + 0.4\, m_{j+1}(u_j - x)$$

يمثل احتمال E بمعرفة u_j ، والقرار x ، والاستمرار الأمثل من المرحلة $j + 1$. ومن ثم

$$m_j(u_j) = \underset{x=0,1,\ldots,u_j}{\text{أعلى}} [0.6\, m_{j+1}(u_j + x) + 0.4\, m_{j+1}(u_j - x)] \qquad (١)$$

لكل $j = 1, 2, 3$. ورسمياً .. فإن هذه المعادلة تماثل معادلة الفرق التى حصلنا عليها فى المسألة ١٨ - ٢ ؛ ومع ذلك .. فإن شرطاً نهائياً جديداً ينطبق .

وبوضع شروط مخرجات قرار الاستثمار النهائي نحصل على

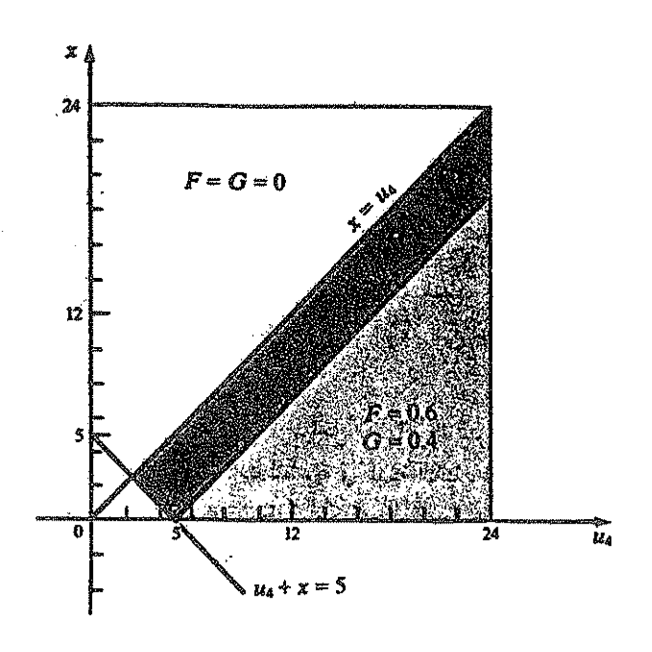
$$m_4(u_4) = \underset{x=0,1,\ldots,u_4}{\text{أعلى}} [0.6P(u_4 + x \geq 5) + 0.4P(u_4 - x \geq 5)]$$

$$\equiv \underset{x}{\text{أعلى}} [F + G]$$

بمساعدة الشكل ١٨ – ١ ننفذ التعظيم في (٢) ، ونحصل على

$$m_4(u_4) = \begin{cases} 0 & u_4 = 0, 1, 2 \\ 0.6 & u_4 = 3, 4 \\ 1 & u_4 = 5, 6, \ldots, 24 \end{cases} \quad \text{عند} \quad d_4(u_4) = \begin{cases} 0 & u_4 = 0, 1, 2 \\ 2 & u_4 = 3 \\ 1 & u_4 = 4 \\ 0 & u_4 = 5, 6, \ldots, 24 \end{cases} \qquad (٢)$$

حيث يوضح أصغر استثمار أمثل $d_4(u_4)$



شكل ١٨ – ١

يمثل الجدول ١٨ – ٥ حل (١) ، مع اعتبار الشرط النهائي (٣) . ومرة أخرى ، فإن أصغر قيمة $d_i(u_i)$ هي التي تذكر في حالة حدوث اشتراك . من الواضح أن أعلى احتمال بتجميع 5 وحدات على الأقل خلال 4 سنوات هو 0.7056 . ويمكن تكوين جدول السياسة من الصورة التي في الجدول ١٨ – ١ ، وذلك لتحقيق أقصى احتمال باستخراج الصفوف 8 ، 4 ، 6 ، 2 من الجدول ١٨ – ٥ . وأي من الجدولين يبين أنه تحت هذه السياسة المثلى الخاصة يتضح أن المستثمر ينتهي بـ 0 ، 1 أو 5 وحدات ، واحتمال الحدث الأخير هو 0.7056 . ويوجد بديل آخر للسياسة المثلى يسمح للمستثمر بتجميع أكثر من 5 وحدات ، ولكن دائماً باحتمال 0.7056 لـ 5 وحدات أو أكثر .

جدول ١٨ - ٥

	0	1	2	3	4	5	6	...	12	...	24
$m_4(u_4)$	0	0	0	0.6	0.6	1	1	...	1	...	1
$d_4(u_4)$	0	0	0	2	1	0	0	...	0	...	0
$m_3(u_3)$	0	0	0.36	0.6	0.84	1	1	...	1		
$d_3(u_3)$	0	0	1	0	1	0	0	...	0		
$m_2(u_2)$	0	0.216	0.504	0.648	0.84	1	1				
$d_2(u_2)$	0	1	2	1	0	0	0				
$m_1(u_1)$	...	...	...	0.7056							
$d_1(u_1)$	...	...	...	1							

١٨ - ٤ يمكن لأحد صناع سفن الفضاء أن يصنع مكوكين فضائيين فقط فى السنة لمؤسسة ناسا ، ويحتاج لعام كامل لتصنيع مكوك واحد ، ولكن حيث إن أوامر التشغيل لم تحددها ناسا حتى يوليو (للتسليم فى ديسمبر) ، فإن الصانع يجب أن يضع جدول الإنتاج قبل معرفة الاحتياج بالضبط . وهذا الاحتياج سيكون لمكوك واحد باحتمال 0.6 ، أو مكوكين باحتمال 0.4 . وأى مكوك يُطلب ولا يُسلم يحمل تكلفة جزائية 1.5 مليون دولار ، ويجب أن يسلم فى العام التالى بأسبقية عن أى أوامر تشغيل أخرى . وتكلفة الإنتاج تكون دالة بالنسبة لعدد المكوكات المصنوعة بتكلفة المكوك الواحد 10 مليون دولار ، وتكلفة المكوكين 19 مليون دولار . ويمكن تخزين الإنتاج الزائد للتسليم فى المستقبل بتكلفة 1.1 مليون دولار للمكوك فى السنة . وتحدد سياسة الشركة بحد أقصى مكوك واحد . حدد جدول الانتاج للثلاث سنوات المقبلة التى تجعل التكلفة الكلية المتوقعة حداً أدنى ، إذا كان المخزون الحالى من المكوكات صفراً .

ننظر إلى هذه المسألة على أنها عملية ذات أربع مراحل ، المراحل 3 ، 2 ، 1 تمثل الثلاث سنوات المقبلة فى التخطيط على التوالى ، والمرحلة الرابعة تمثل الإنتاج المتأخر لهذه المكوكات المطلوبة فى السنة الثالثة ولم تُسلم ، والحالات هى المخزونات الممكنة فى بداية المرحلة ، وهى تتراوح من منخفض 2- (بمعنى طلب مكوكين ولم يسلما) حتى عالى 1 . نجعل

$u \equiv$ عدد المكوكات بالمخزن $(u = -2, -1, 0, 1)$

$m_j(u) \equiv$ أقل تكلفة متوقعة لاستكمال العملية ابتداءً من المرحلة j فى الحالة u

$d_j(u) \equiv$ الإنتاج فى المرحلة j الذى يحقق $m_j(u)$

$D \equiv$ الطلب السنوى $[P(D=1)=0.6,\ P(D=2)=0.4]$

$f(x) \equiv$ تكلفة إنتاج x مكوك فى سنة واحدة

إذا دخلت الشركة المرحلة j $(j = 1, 2, 3)$ عند $u = 0, 1$ مكوك فى المخزن ، وقررت إنتاج x مكوك إضافى $(x = 0, 1, 2)$ ، فى هذه المرحلة ، تحدث تكلفة تخزين $1.1u$ على المخزن ، وتكلفة إنتاج $f(x)$ للمكوكات الجديدة بمصروفات سنوية

$$f(x) + 1.1u \tag{1}$$

والعدد الكلى من المكوكات المتاحة للتسليم فى نهاية السنة هو $x + n$ ، الذى يترك $u + x - D$ مكوك فى المخزن للمرحلة التالية . وأقل تكلفة لاستكمال العملية من هذه النقطة هى $m_{j+1}(u + x - D)$. حيث إن $D = 1$ باحتمال 0.6 ، و $D = 2$ باحتمال 0.4 . وأقل تكلفة متوقعة للاستكمال ابتداءً من المرحلة $j + 1$ هى

$$0.6\, m_{j+1}(u + x - 1) + 0.4\, m_{j+1}(u + x - 2) \tag{2}$$

لذلك .. فإن أقل تكلفة متوقعة للاستكمال من المرحلة j هى أقل ما يمكن بالنسبة لـ x ، بمجموع (١) ، (٢)

$$m_j(u) = 1.1u + \min_{x=0,1,2} [f(x) + 0.6 m_{j+1}(u+x-1) + 0.4 m_{j+1}(u+x-2)] \quad (٣)$$

عند $j = 1,2,3$ ، $u = 0,1$. وهنا نوافق على أن $m_j(3) = +M$ لكل قيم j .

إذا دخلت الشركة المرحلة j بـ $u = -2$ ، أو $u = -1$ ، فإنه يحدث عجز $u-$ مكوك من المرحلة السابقة ، وتتعرض لتكلفة جزائية $-1.5u$. وقرار إنتاج x مكوك ، حيث يجب أن تكون x على الأقل $u-$ لتغطى العجز السابق ، تنتج عنه تكلفة إنتاج $f(x)$. وتكون تكلفة الإنتاج للشركة فى المرحلة j هى

$$f(x) - 1.5u \quad (٤)$$

بتكملة التحليل ، كما فى حالة $u = 0,1$ ، نحصل على الصيغة العكسية

$$m_j(u) = -1.5u + \underset{x=-u,\ldots,2}{\text{أدنى}} [f(x) + 0.6 m_{j+1}(u+x-1) + 0.4 m_{j+1}(u+x-2)] \quad (٥)$$

عند $u = -2,-1$ ، $j = 1,2,3.$. يمكن استبدال (٣) ، (٥) بالعلاقة الفردية

$$m_j(u) = g(u) + \underset{x=-u,\ldots,2}{\text{أدنى}} [f(x) + 0.6 m_{j+1}(u+x-1) + 0.4 m_{j+1}(u+x-2)] \quad (٦)$$

عند $u = -2,\ldots,1$ ، $j = 1,2,3$ على أن نعرف

$$g(u) = \begin{cases} 1.1u & u \geq 0 \\ -1.5u & u < 0 \end{cases} \qquad f(-1) = +M$$

وحل (٦) فى خطوات حتى $j = 4$ بالشرط النهائى $m_5(u) = 0$ يعطى فى الجدول ١٨ - ٦ . وتكون أقل تكلفة متوقعة هى 42.24 مليون دولار ، وتتحقق بالسياسة المثلى المبنية فى جدول ١٨ - ٧ .

جدول ١٨ - ٦

	u			
	−2	−1	0	1
$m_4(u)$	22	11.5	0	1.1
$d_4(u)$	2	1	0	0
$m_3(u)$	37.7	25.1	14.6	5.7
$d_3(u)$	2	2	1	0
$m_2(u)$	52.14	39.3	28.26	19.9
$d_2(u)$	2	2	2	0
$m_1(u)$	...	...	42.24	...
$d_1(u)$	...	...	2	...

جدول ١٨ - ٧

	مستوى المخزون			
السنوات	−2	−1	0	1
1	...	...	2	...
2	2	2	2	0
3	2	2	1	0
4	2	1	0	0

١٨ - ٥ خفض أحد مرشحي الرئاسة مجال مرشحي نائب الرئيس إلى ثلاثة أشخاص ، كل مرشح من الثلاثة تم تقييمه بمقياس يتراوح بين 1 (أصغر قيمة) حتى 10 (أعلى قيمة) ؛ أخذ الشخص الأول 10 نقط ، والشخص الثانى 8 نقط ، والشخص الثالث 5 نقط .
واحتمال أن الشخص i $(i = 1, 2, 3)$ يقبل العرض j $(j = 1, 2, 3)$ للترشيح كنائب رئيس (بافتراض أن العروض $j - 1$ الأولى للأشخاص الآخرين قد سحبت) يرمز له بالرمز p_{ij} ، حيث إن

$$p_{11} = 0.5 \qquad p_{12} = 0.2 \qquad p_{13} = 0$$
$$p_{21} = 0.9 \qquad p_{22} = 0.5 \qquad p_{23} = 0.2$$
$$p_{31} = 1 \qquad p_{32} = 0.8 \qquad p_{33} = 0.4$$

بأى ترتيب يجب تقديم الثلاثة مرشحين لنائب الرئيس ، إذا أراد مرشح الرئاسة تعظيم عدد النقط المتوقع ؟

من المفترض ألا يُسأل أى شخص أكثر من مرة ، وفى أى مرة ينسحب الشخص يُسأل الشخص التالى ، حتى يقبل أحد الأشخاص أو ينسحبوا كلهم ، فيكون عندنا عملية ذات ثلاث مراحل ، حيث تمثل المرحلة j الترتيب j فى عملية السؤال . وتأخذ الحالات لتكون مجموعة الأشخاص الذين لم يسألوا بعد . لذلك تكون للمرحلة الأولى حالة واحدة

$$U_{11} = \{1, 2, 3\}$$

والمرحلة الثانية تكون لها الحالات الثلاث

$$U_{21} = \{1, 2\} \qquad U_{22} = \{1, 3\} \qquad U_{23} = \{2, 3\}$$

والمرحلة الثالثة تكون لها الحالات الثلاث

$$U_{31} = \{1\} \qquad U_{32} = \{2\} \qquad U_{33} = \{3\}$$

ننشىء

$m_j(U_{jk}) \equiv$ أعلى عدد متوقع من النقط يمكن تحقيقه ابتداءً من المرحلة j
فى الحالة U_{jk} بمعرفة أنه لم يكن هناك قبول فى المراحل السابقة .

$d_j(U_{jk}) \equiv$ الشخص الذى سيسأل فى المرحلة j لتحقيق $m_j(U_{jk})$

$V_i \equiv$ قيمة النقط للشخص i

تكون الصيغة العكسية لهذه المسألة

$$m_j(U_{jk}) = \max_{i \in U_{jk}} [V_i p_{ij} + (1 - p_{ij}) m_{j+1}(U_{jk} - \{i\})] \qquad (١)$$

بمعنى أنه إذا سئل الشخص j فى المرحلة i وقَبِل ، تكون الربحية V_i ؛ بينما إذا انسحب ، يكون أحسن استكمال من الحالة المكونة من الأشخاص الباقين الذين لم يسألوا . وتتحقق الصيغة (١) لكل $j = 1, 2, 3$ إذا عرفنا $m_4(U) \equiv 0$. ومن الواضح أن المسألة الحالية هى صيغة تصادفية للمسألة ١٤ - ٢٠ .

المرحلة ٣

$$m_3(U_{31}) = 10(0) = 0 \quad \text{عند} \quad d_3(U_{31}) = 1$$
$$m_3(U_{32}) = 8(0.2) = 1.6 \quad \text{عند} \quad d_3(U_{32}) = 2$$
$$m_3(U_{33}) = 5(0.4) = 2.0 \quad \text{عند} \quad d_3(U_{33}) = 3$$

المرحلة ٢

$$m_2(U_{21}) = \text{أعلى}\ \{10(0.2)+(1-0.2)m_3(U_{32}),\ 8(0.5)+(1-0.5)m_3(U_{31})\}$$
$$= \text{أعلى}\ \{2+(0.8)(1.6),\ 4+(0.5)(0)\} = 4 \quad \text{عند} \quad d_2(U_{21}) = 2$$
$$m_2(U_{22}) = \text{أعلى}\ \{10(0.2)+(1-0.2)m_3(U_{33}),\ 5(0.8)+(1-0.8)m_3(U_{31})\}$$
$$= \text{أعلى}\ \{2+(0.8)(2.0),\ 4+(0.2)(0)\} = 4 \quad \text{عند} \quad d_2(U_{22}) = 3$$
$$m_2(U_{23}) = \text{أعلى}\ \{8(0.5)+(1-0.5)m_3(U_{33}),\ 5(0.8)+(1-0.8)m_3(U_{32})\}$$
$$= \text{أعلى}\ \{4+(0.5)(2),\ 4+(0.2)(1.6)\} = 5 \quad \text{عند} \quad d_2(U_{23}) = 2$$

المرحلة ١

$$m_1(U_{11}) = \text{أعلى}\ \{10(0.5)+(1-0.5)m_2(U_{23}),\ 8(0.9)+(1-0.9)m_2(U_{22}),\ 5(1)+(1-1)m_2(U_{21})\}$$
$$= \text{أعلى}\ \{5+(0.5)(5),\ 7.2+(0.1)(4),\ 5+0(4)\}$$
$$= 7.6 \quad \text{عند} \quad d_1(U_{11}) = 2$$

وتكون السياسة المثلى هى سؤال الشخص رقم 2 أولاً ، وإذا انسحب هذا الشخص ، نسأل الشخص [$d_2(U_{22}) = 3$] 3 ، وإذا انسحب هذا الشخص نسأل الشخص 1 . ويكون العدد المتوقع للنقط من هذه السياسة هو 7.6 .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

١٨ – ٦ حل المسألة ١٨ – ١ بإضافة شرط أن البرتقال الذى لا يباع يفسد ، وبخسارة 15 دولاراً لكل كمية .

١٨ – ٧ يمتلك أحد الأشخاص 2000 دولار للاستثمار ، وعنده فرصتان B, A وكلتاهما فيهما مجازفة ؛ والعائد السنوى الممكن لكل منهما لكل 1000 دولار مستثمر ، واحتمال تحقيق هذا العائد موضح بالجدول ١٨ – ٨

جدول ١٨ – ٨

	العائد بالدولار	الاحتمال
A	3000	0.4
	0	0.6
B	2000	0.2
	1000	0.8

حدد استراتيجية الاستثمار للسنوات الثلاث المقبلة التى تعظم الرصيد النهائى المتوقع إذا كان الشخص مقيداً بـ 1000 دولار استثمار ، أو صفر لكل سنة

١٨ – ٨ حل المسألة ١٨ – ٧ إذا كان الهدف هو تعظيم احتمال تجميع 5000 دولار على الأقل بعد 3 سنوات .

١٨ – ٩ عند إحدى شركات البترول 8 وحدات نقدية متاحة للاستكشاف فى ثلاثة مواقع . إذا وجد البترول فى أحد المواقع ، فإن احتمال وجوده يكون دالة من الأموال المخصصة لاكتشافه ، كما هو موضح فى الجدول ١٨ – ٩

جدول ١٨ – ٩

	الوحدات المخصصة								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الموقع 1	0	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1
الموقع 2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8	1
الموقع 3	0	0.1	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	0.9	1

واحتمال تواجد البترول فى المواقع هو 0.4 ، 0.3 ، 0.2 على التوالى . ما هو المبلغ الذى يجب أن يخصص لاكتشاف كل موقع لتعظيم احتمال اكتشاف البترول ؟

١٨ – ١٠ عند مدير إحدى الإدارات 4 أسابيع لاستكمال أحد المشروعات الذى يحتاج إلى 10 وحدات عمل . ولدى الإدارة 6 أشخاص لتعيينهم فى العمل كل أسبوع . وتعتمد التكلفة والعمل الذى يتم (بالألف دولار) على عدد الأشخاص المعينين بالمشروع كل أسبوع كما يلى :

الأشخاص	0	1	2	3	4	5	6
وحدات العمل المُنفذ	0	2	4	6	7	9	10
التكلفة	0	1	2	4	8	16	32

وعند عمل التعيينات الأسبوعية ، فإن نائب الرئيس للعمليات يمكنه أن ينقل الأشخاص إلى أعمال أخرى خارج الإدارة . ويحدث هذا غالباً بحيث يجب أن يعمل مدير الإدارة حساب ذلك عند تعيين الأشخاص . ورغم أن نائب الرئيس لا يسحب أحداً من المشروع إطلاقاً ، فإن هناك فرصة 20 فى المئة فى فقد شخص واحد عندما يعين شخصان أو ثلاثة للمشروع ، وفرصة 10 فى المئة فى فقد شخصين عندما يعين ثلاثة أشخاص أو أكثر فى المشروع . وأى شخص ينقل من المشروع فى أسبوع يعود مرة أخرى إلى الإدارة فى نهاية الأسبوع . حدد السياسة المثلى لتعيين الأشخاص لهذا المشروع للأسابيع الأربعة التالية ، والتى تجعل التكلفة الكلية المتوقعة أقل ما يمكن للإدارة ، وتضمن إنهاء المشروع فى الوقت المحدد .

١٨ – ١١ أصدرت إحدى شركات التصنيع أمر تشغيل لوحدة إنتاج جديدة ستنشأ خلال 4 سنوات ، وحتى هذا الوقت يجب أن تستخدم الوحدة الحالية التى تحتوى على ماكينة متعبة . وفى كل عام يؤخذ قرار حول الاحتفاظ بالماكينة فى الوحدة أو استبدالها بأخرى جديدة . وبيانات التكلفة لهذه الماكينات هى : (١) تتكلف الماكينة التى عمرها u سنة $(500 + 10u^2)$ دولار للتشغيل لمدة عام واحد . (٢) الماكينة الصالحة وعمرها u سنة لها قيمة بيع فى نهاية الاستخدام $(200 - 30u)$ دولار ، أما غير الصالحة ،

فليس لها ثمن إعادة بيع (٣) ثمن الماكينة الجديدة بعد j سنة فى المستقبل هو $(300 + 100j)$ دولار (٤) احتمال أن تتعرض الماكينة إلى عطل جسيم غير قابل للإصلاح هو 0.75 ، بصرف النظر عن عمر الماكينة . ومن المفترض أن كارثة العطل يمكن أن تحدث فقط فى نهاية العام .

حدد سياسة الإحلال المثلى لهذه الماكينة خلال السنوات الأربع المقبلة إذا كان عمر الماكينة الحالية سنة واحدة .

١٨ – ١٢ تستطيع إحدى شركات الحاسبات إنتاج أربع حاسبات كل أسبوع . والطلب على الحاسبات متغير ، ويحكم بالتوزيع الاحتمالى المعطى بالجدول ١٨ – ١٠ .

جدول ١٨ – ١٠

الاحتياج

الأسابيع	0	1	2	3	4	5
1	0	0.1	0.2	0.5	0.2	0
2	0	0.1	0.1	0.2	0.5	0.1
3	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	0

وتكلفة الإنتاج دالة فى عدد الحاسبات المصنعة ، وتعطى (بالألف دولار) كما يلى :

الوحدات المنتجة	0	1	2	3	4
التكلفة	0	18	30	42	56

يمكن تسليم الحاسبات فى نهاية أسبوع الإنتاج ، أو تخزن للتسليم بعد ذلك بتكلفة تخزين 4000 دولار لكل حاسب فى الأسبوع . وأوامر التشغيل التى لا تنفذ خلال الأسبوع توقع عليها تكلفة جزائية 2000 دولار لكل حاسب فى الأسبوع . ويجب أن تستكمل بأسرع ما يمكن خلال الأسابيع التالية . كم حاسباً يجب أن تنتجة الشركة فى الأسابيع الثلاثة المقبلة لتقليل التكلفة الكلية المتوقعة ، وذلك لتغطية الطلبات إلى الحد الأدنى ، إذا كان المخزون الحالى صفراً ؟

١٨ – ١٣ يتكون أحد النظم الإلكترونية من ثلاثة عناصر على التوالى . تعمل العناصر مستقلة عن بعضها ، ولكن يجب أن يعمل كل عنصر إذا كان النظام كله يعمل . وصلاحية النظام (احتمال أن يعمل النظام) يمكن أن تحسن بإنشاء وحدات موازية لواحد أو أكثر من العناصر : واحتمال أن تعمل أحد العناصر يعتمد على عدد الوحدات الموازية المنشأة طبقاً للجدول ١٨ – ١١

جدول ١٨ – ١١

	الوحدات على التوازى				
	1	2	3	4	5
العنصر 1	0.40	0.64	0.78	0.87	0.92
العنصر 2	0.50	0.75	0.88	0.94	0.97
العنصر 3	0.60	0.84	0.94	0.97	0.99

وتكلفة كل وحدة هى 100 دولار للعنصر 1 ، و 200 دولار للعنصر 2 ، و 300 دولار للعنصر 3 .
حدد كم من هذه الوحدات يجب أن يصمم مع النظام لتعظيم الصلاحية ، إذا لم تزد تكلفة العناصر عن 1000 دولار .
(ملحوظة : هذه المسألة ثابتة ، برغم أن العائد فى الحقيقة احتمالى) . اختر كدالة هدف لوغاريتم الصلاحية ، وخذ كحالة عند المرحلة ، عدد مئات الدولارات كتكلفة الوحدات الممكن صرفها كوحدات للعنصر .

١٨ – ١٤ يحتاج أحد المقاولين إلى ثلاث مكونات لاستكمال مشروع فى الوقت المحدد . وهناك ثلاثة مقاولين من الباطن مستعدين لتصنيع هذه المكونات ، واحتمال أن المقاول من الباطن يسلم المكونة المطلوبة فى الوقت المحدد توضح فى الجدول ١٨ – ١٢ .

جدول ١٨ – ١٢

	العنصر 1	العنصر 2	العنصر 3
المقاول 1 من الباطن	0.83	0.92	0.91
المقاول 2 من الباطن	0.89	0.63	0.85
المقاول 3 من الباطن	0.91	0.93	0.93

حدد سياسة التعيين المثلى التى تجعل احتمال تسليم المكونات فى الوقت المناسب أعلى مايمكن ، مع العلم أن كل مقاول من الباطن لايأخذ أكثر من مكونة واحدة . (ملحوظة : عظم لوغاريتم الاحتمال ، واستمر كما فى المسألة ١٤ – ٢٠)

١٨ – ١٥ حدد الصيغة العكسية للمسألة التالية . يريد أحد الأطباء أن يرفع مستوى مناعة أحد المرضى 6 وحدات على الأقل خلال 4 أيام بوصف أقراص للمريض يأخذها كل مساء . كمية المناعة التى يمتصها جسم المريض ، وهى دالة فى عدد الأقراص المأخوذة ، تتحدد بثلاث وحدات فى اليوم كحد أقصى . ومعدل الامتصاص بالاحتمال أن يتعرض المريض لرد فعل يمنعه من العمل فى اليوم التالى موضح فى الجدول ١٨ – ١٣ . حدد جدول الجرعات للمريض الذى يحقق مستوى المناعة المطلوب بأقل عدد مفقود من الأيام .

جدول ١٨ – ١٣

الجرعة اليومية من الأقراص	0	1	2	3	4	5	6	7
عدد وحدات المناعة الممتصة	0	0.9	1.7	2.4	2.9	3.0	3.0	3.0
احتمال فقد العمل فى اليوم التالى	0	0.05	0.15	0.30	0.50	0.70	0.95	1

١٨ – ١٦ حدد الصيغة العكسية للمسألة التالية : عند أحد المقاولين مشروعان يجب أن ينتهيا خلال 5 أيام . مازال المشروع 1 يحتاج 16 وحدة عمل ، والمشروع 2 يحتاج 23 وحدة عمل . يستخدم المقاول خمسة أطقم كل الوقت بتكلفة 1000 دولار لكل يوم للطاقم الواحد ، وفى أى وقت يمكن العمل من الباطن بأطقم من الخارج بتكلفة 1500 دولار لكل يوم للطاقم الواحد . ووحدات العمل المنفذة فى كل مشروع هى دالة فى عدد الأطقم المعينة للمشروع ، كما فى الجدول ١٨ – ١٤ . ويوضح جدول الأطقم كل مساء

لليوم التالى ، ودائماً يشمل جدوله تشغيل الخمسة أطقم التى لدى المقاول . ومع ذلك .. فإن 10 فى المئة من الوقت يكون أحد أطقم المقاول مريضاً فى اليوم التالى ، وفى هذه الحالة لايدفع المقاول لهذا الطقم . والأطقم من الباطن لا تمرض أبداً . وللمشروع 1 أسبقية ، بحيث إذا مرض أحد الأطقم ، فيستكمل المشروع من أطقم المقاول ، إلا إذا كان جدول التشغيل أصلاً 5 أطقم ، ففى هذه الحالة ، فإن المشروع 1 يأخذ 4 أطقم من المقاول . ولايخصص أكثر من ستة أطقم لأى مشروع فى أى يوم . وإذا وصل أى طاقم إلى المشروع ، فإنه يبقى هناك طول اليوم . كيف يمكن للمقاول استكمال المشروعين فى الوقت المحدد بأقل تكلفة متوقعة ؟

جدول ١٨ – ١٤

عدد الأطقم المعيّن	0	1	2	3	4	5	6
العمل المنفذ بالمشروع 1	0	1	1.9	2.7	3.5	4.2	5.0
العمل المنفذ بالمشروع 2	0	1	1.9	2.8	3.7	4.5	5.2

١٨ – ١٧ استنتج الصيغة العكسية للمسألة التالية : يحتاج أحد المرشحين لحزب كبير إلى 100 صوت ناخب ليأخذ الترشيح . ومازالت هناك 5 أماكن يمكن كسبهم للفوز . ويمتلك المرشح 10 وحدات نقدية متاحة للصرف عليهم . واحتمال كسب أصوات هؤلاء دالة فى كمية النقود المنصرفة عليهم كما فى الجدول ١٨ – ١٥ .

جدول ١٨ – ١٥

	وحدات النقود المنصرفة							
	0	1	2	3	4	5	6	7
الصوت 1	0.10	0.15	0.25	0.38	0.44	0.48	0.54	0.60
الصوت 2	0.15	0.21	0.27	0.40	0.45	0.51	0.56	0.61
الصوت 3	0.05	0.12	0.17	0.22	0.27	0.31	0.35	0.38
الصوت 4	0.20	0.25	0.31	0.38	0.45	0.52	0.59	0.67
الصوت 5	0.17	0.22	0.29	0.30	0.38	0.44	0.51	0.55

لايزيد احتمال كسب أحد الأماكن إذا صرف أكثر من 7 وحدات نقدية عليها . ويوجد 89 صوتاً فى المكان 1 ، و 69 صوتاً فى المكان 2 ، و 52 صوتاً فى المكان 3 ، و 38 صوتاً فى المكان 4 ، و 21 صوتاً فى المكان 5 . حدد سياسة تعظيم فرصة المرشح لكسب 100 صوت على الأقل .



سلاسل ماركوف المحدودة

Finite Markov Chains

عمليات ماركوف MARKOV PROCESSES

تتكون عملية ماركوف من مجموعة من الأغراض ، ومجموعة من الحالات ، بحيث إن :

(١) عند أى وقت يجب أن يكون كل غرض فى حالة معينة (مميزة) ، والأغراض المميزة ليست فى حاجة لكى تكون فى حالة مميزة .

(٢) احتمال أن ينتقل أحد الأغراض من حالة إلى حالة أخرى (والتى قد تكون مماثلة للحالة الأولى) فى فترة زمنية واحدة يعتمد على هاتين الحالتين فقط .

الأعداد الصحيحة للفترات الزمنية التالية للحظة التى تبدأ فيها العملية تمثل مراحل العملية ، والتى قد تكون محدودة أو غير محدودة . إذا كان عدد الحالات محدوداً أو غير محدود عددياً ، فإن عملية ماركوف تسمى سلسلة ماركوف . وسلسلة ماركوف المحدودة هى سلسلة لها عدد محدود من الحالات .

نرمز لاحتمال الانتقال من حالة i إلى حالة j فى فترة زمنية واحدة بالرمز p_{ij} . ولسلسلة ماركوف ذات N حالة (حيث إن N عدد صحيح موجب ثابت) المصفوفة P ذات $N \times N = [p_{ij}]$ هى المصفوفة التصادفية أو الانتقالية المرتبطة بالعملية . وبالضرورة ، فإن عناصر كل صف من P مجموعها 1 . وأكثر من ذلك .

النظرية ١٩ ــ ١ : كل مصفوفة تصادفية تكون لها قيمة أيجن تساوى 1 (ربما متكررة) ، ولاتزيد أى من قيم أيجن عن 1 قيمة مطلقة .

(انظر المسائل ١٩ ــ ١٤ ، ١٩ ــ ٣٢) . بسبب طريقة تعريف P ، فإنها تثبت أنه من المناسب فى هذا الفصل تحديد المتجهات ذات الأبعاد N كصف متجهات ، بمصفوفات تعمل عليهم من اليمين . وطبقا للنظرية ١٩ ــ ١ ، فإنه يوجد متجه $X \neq 0$ بحيث إن $XP = X$ يسمى متجه الأيجن المتبقى هذا النقط الثابتة من P .

مثال ١٩ ــ ١ تقسم بيانات تعداد السكان إلى سكان مستقرين اقتصادياً ، وسكان مضطربين اقتصادياً . وفى خلال فترة 10 سنوات ، فإن احتمال السكان المستقرين اقتصادياً سيكون 0.92 ، بينما احتمال المستقرين الذين سيصبحون مضطربين اقتصادياً سيكون 0.08 . واحتمال أن يصبح المضطربون مستقرين اقتصادياً هو 0.03 ،بينما احتمال أن يبقى المضطربون على حالتهم هو 0.97 .

إذا رمزنا للاستقرار الاقتصادى كحالة برقم 1 ، الاضطراب الاقتصادى كحالة برقم 2 ، فإننا يمكن أن نصور هذه العملية بسلسلة ماركوف ذات مرحلتين ، ولها المصفوفة الانتقالية .

$$P = \begin{bmatrix} 0.92 & 0.08 \\ 0.03 & 0.97 \end{bmatrix}$$

قوى المصفوفات التصادفية POWERS OF STOCHASTIC MATRICES

ارمز للقوة رقم n للمصفوفة $\mathbf{P}$ بـ $\mathbf{P}^n \equiv [p_{ij}^{(n)}]$. إذا كانت $\mathbf{P}$ تصادفية ، فإن $p_{ij}^{(n)}$ تمثل احتمال أن يتحرك الغرض من الحالة i إلى الحالة j فى فترات زمنية عددها n (انظر المسألة ١٩ ــ ١٢) . ويتبع ذلك أن $\mathbf{P}^n$ تكون مصفوفة تصادفية .

ارمز إلى الجزء من الأغراض فى الحالة i فى نهاية الفترة الزمنية n بـ $x_i^{(n)}$ ، وارمز

$$\mathbf{X}^{(n)} \equiv [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_N^{(n)}]$$

وهو متجه التوزيع فى نهاية الفترة الزمنية رقم n . وتبعاً لذلك ..

$$\mathbf{X}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}]$$

تمثل الجزء من الأغراض فى كل حالة عند بداية العملية . وترتبط $\mathbf{X}^{(n)}$ بـ $\mathbf{X}^{(0)}$ بالمعادلة

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(0)}\mathbf{P}^n \qquad (١٩ - ١)$$

(انظر المسائل ١٩ ــ ٦ ، ١٩ ــ ٧) . وعند كتابة (١٩ ــ ١) نعرف ضمنياً احتمال p_{ij} بالتناسب مع الأغراض فى الحالة i التى تحدث الانتقال إلى الحالة j فى فترة زمنية واحدة .

المصفوفات التصادفية النهائية ERGODIC MATRICES

تكون المصفوفة التصادفية $\mathbf{P}$ تصادفية نهائية إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ موجودة ، بمعنى ، إذا كانت كل $p_{ij}^{(n)}$ لها نهاية عندما $n \to \infty$. ونرمز لمصفوفة النهايات ــ بالضرورة أن تكون تصادفية ــ بالرمز $\mathbf{L}$. وتكون عناصر $\mathbf{X}^{(\infty)}$ المعرفة بالمعادلة

$$\mathbf{X}^{(\infty)} = \mathbf{X}^{(0)}\mathbf{L} \qquad (١٩ - ٢)$$

هى توزيعات الحالات المحددة ، وتمثل الجزء التقريبى للأغراض فى الحالات المختلفة بسلسلة ماركوف بعد عدد كبير من الفترات الزمنية . (انظر المسائل ١٩ ــ ٦ ، ١٩ ــ ٨ ، ١٩ ــ ٩)

النظرية ١٩ ــ ٢ : تكون المصفوفة التصادفية تصادفية نهائية لو ــ وفقط لو ــ كانت قيمة أيجن λ بقيمة 1 هو 1 فى حد ذاته ، وإذا كانت $\lambda = 1$ لها مضروبات k ، ويوجد عدد k متجهات أيجن ومستقلة (يُسرَى) مرتبطة بقيمه الأيجن هذه . (انظر المسألة ١٩ ــ ٥) .

النظرية ١٩ ــ ٣ : إذا أدت كل قيمة أيجن فى المصفوفة $\mathbf{P}$ الى متجهات أيجن خطية ومستقلة (يُسرَى) بعدد يساوى مضروباتها ، فإنه توجد مصفوفة $\mathbf{M}$ محددها لايساوى صفراً ، تبقى صفوفها متجهات يسرى أيجن فى $\mathbf{P}$ ، بحيث إن $\mathbf{D} \equiv \mathbf{MPM}^{-1}$ تكون مصفوفة قطرية . وعناصر القطر فى $\mathbf{D}$ هى أيجن $\mathbf{P}$ المتكررة طبقاً للمضروبات .

(انظر المسألة ١٩ ــ ٣٣) نتبنى العرف المتبع فى وضع متجهات أيجن المناظرة لـ $\lambda = 1$ فوق كل متجهات أيجن الأخرى فى $\mathbf{M}$. لذلك للمصفوفة القطرية $\mathbf{P}$ التصادفية النهائية ذات العناصر $N \times N$ عند $\lambda = 1$ ، للمضروبات k يمكن حساب مصفوفة النهايات $\mathbf{L}$ كالى :

$$L = M^{-1}(\underset{n \to \infty}{\text{نهاية}} D^n)M = M^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} M \qquad (١٩ — ٣)$$

وتكون المصفوفة القطرية فى الجهة اليمنى عدد k من الأرقام 1 ، عدد $(N - k)$ من الأصفار على القطر الرئيسى . (انظر المسألة ١٩ — ٥) .

المصفوفات العادية REGULAR MATRICES

تكون المصفوفة التصادفية عادية إذا احتوت إحدى قواها على عناصر موجبة فقط . (انظر المسائل ١٩ — ٣ ، ١٩ — ٤) .

النظرية ١٩ — ٤ : إذا كانت المصفوفة التصادفية عادية فيكون 1 هو قيمة الأيجن مضروبة فى 1 وكل باقى قيم الأيجن λ_i تحقق $|\lambda_i| < 1$.

النظرية ١٩ — ٥ : المصفوفة العادية تكون تصادفية نهائية (أرجودية) .

إذا كانت $\mathbf{P}$ عادية ، بمصفوفة نهايات $\mathbf{L}$ ، فإن صفوف $\mathbf{L}$ تتطابق تماماً مع بعضها ، ويكون كل منها هو المتجه الأيجن الأيسر الأوحد فى $\mathbf{P}$ المرتبط بقيمة أيجن $\lambda = 1$ ، وله مجموع عناصر يساوى واحداً . (انظر المسألة ١٩ — ١٣) . ارمز لمتجه أيجن $\mathbf{E}_1$. ويتبع مباشرة من (١٩ — ٢) أن $\mathbf{P}$ تكون عادية ، لذلك ، وبصرف النظر عن التوزيع الأولى $\mathbf{X}^{(0)}$

$$\mathbf{X}^{(\infty)} = \mathbf{E}_1 \qquad (١٩ - ٤)$$

(انظر المسائل ١٩ — ٦ ، ١٩ — ٧ ، ١٩ — ١١) .

مسائل محلولة

Solved Problems

١٩ — ١ ضع العملية التالية فى صورة سلسلة ماركوف . يتحكم صانع فرش الأسنان هاى — جلو فى 60 فى المئة من السوق فى إحدى المدن . أظهرت بيانات السنة السابقة أن 88 فى المئة من عملاء شركة هاى — جلو ظلوا متمسكين بالشركة ، بينما 12 فى المئة من عملاء الشركة تحولوا إلى شركة أخرى . بالإضافة إلى 85 فى المئة من عملاء المنافسين تمسكوا بشركاتهم المنافسة ، بينما 15 فى المئة تحولوا إلى شركة هاى — جلو . بافتراض أن هذه الاتجاهات ستستمر ، حدد نسبة مشاركة هاى — جلو بالسوق (أ) فى خمس سنوات ، (ب) فى المدى البعيد .

نأخذ الحالة 1 تمثل استهلاك شركة هاى — جلو من فرش الأسنان ، والحالة 2 تمثل استهلاك الشركة الأخرى . ونأخذ p_{11} ، احتمال أن عملاء هاى — جلو يتمسكون بشركتهم 0.88 ، p_{12} احتمال أن عملاء هاى — جلو يتحولون إلى الشركة الأخرى 0.12 ، p_{21} احتمال أن مستهلكى الشركة الأخرى يتحولون الى هاى — جلو 0.15 ، p_{22} احتمال أن يتمسك مستهلكو الشركة الأخرى بشركتهم 0.85 . وتكون المصفوفة التصادفية بهذه الاحتمالات الانتقالية هى :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

ويكون متجه التوزيع الاحتمالى الأولى هو $\mathbf{X}^{(0)} = [0.60, 0.40]$ بينما العناصر $x_2^{(0)} = 0.40$ ، $x_1^{(0)} = 0.60$ تمثل الجزء من الناس فى الحالتين 1 ، 2 على التوالى .

١٩ ــ ٢ صغ العملية التالية فى صورة سلسلة ماركوف . يتكون البرنامج التدريبى لمشرفى الإنتاج فى إحدى شركات الإنتاج من مرحلتين . المرحلة 1 تتضمن 3 أسابيع من الدروس النظرية ، تتبعها المرحلة 2 التى تتكون من 3 أسابيع تدريب عملى تحت إشراف المشرفين العاملين . من الخبرة السابقة .. فإن الشركة تتوقع أن 60 فى المئة فقط من هؤلاء المتدربين الذين سيبدأون التدريب النظرى سينقلون إلى التدريب العملى ، بينما يحذف 40 فى المئة تماماً من برنامج التدريب ، وذلك من بين الذين سينقلون إلى التدريب العملى ، 70 فى المئة فقط سيتخرجون كمشرفين ، 10 فى المئة قد سألوا لإعادة المرحلة الثانية ، 20 فى المئة سيحذفون كلية من البرنامج . كم مشرفاً تتوقعهم الشركة من برنامج التدريب الحالى ، إذا كان لديها 45 شخصاً فى مرحلة التدريب النظرى ، و 21 شخصاً فى مرحلة التدريب العملى ؟ .

تعتبر الفترة الزمنية الواحدة ثلاثة أسابيع ، ونحدد المراحل من 1 حتى 4 كشروط للحذف (الشطب) ، والتدريب النظرى ، والتدريب العملى والعمل كمشرف ، على التوالى . إذا افترضنا أن الأشخاص الذين يحذفون لايدخلون التدريب مرة أخرى ، وأن المشرفين يظلون مشرفين ، فإن الاحتمالات الانتقالية تعطى بالمصفوفة التصادفية .

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هناك 66 = 21 + 45 شخصاً حالياً فى التدريب ، لذلك فإن متجه الاحتمال الأولى هو

$$\mathbf{X}^{(0)} = [0, 45/66, 21/66, 0]$$

١٩ ــ ٣ هل المصفوفة التصادفية

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix}$$

عادية ؟ تصادفية نهائية (أرجودية) ؟ احسب $\mathbf{L} = \underset{n\to\infty}{\text{نهاية}}\, \mathbf{P}^n$ إذا وجدت .

وحيث إن كل مدخل فى القوة الأولى من $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}$ نفسها) موجب ، $\mathbf{P}$ عادية ، لذلك فهى تصادفية نهائية (أرجودية) . ومن ثم توجد لها نهاية . ومتجه أيجن الأيسر المناظر لـ $\lambda = 1$ يعطى بـ

$$[x_1, x_2]\begin{bmatrix} 0.88 & 0.12 \\ 0.15 & 0.85 \end{bmatrix} = [x_1, x_2] \qquad \text{أو} \qquad 0.12x_1 - 0.15x_2 = 0$$

وبضم الشرط $x_1 + x_2 = 1$ ، وبالحل نجد أن

$$\mathbf{E}_1 = [x_1, x_2] = [5/9, 4/9]$$

ويتبع ذلك أن

$$\mathbf{L} = \underset{n\to\infty}{\text{نهاية}}\, \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 5/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

١٩ ــ ٤ هل المصفوفة التصادفية

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

عادية ؟ تصادفية نهائية (أرجودية) ؟ احسب $\mathbb{L} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n$ إذا وجدت ،
حيث إن كل مدخل فى

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.40 & 0.60 \\ 0.24 & 0.76 \end{bmatrix}$$

يكون موجباً ، $\mathbb{P}$ نفسها عادية ، لذلك فهى تصادفية نهائية ، ومن ثم توجد $\mathbb{L}$. وبالحل فإن

$$[x_1, x_2]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = [x_1, x_2] \quad \text{، أو} \quad x_1 - 0.4x_2 = 0$$

وبالإضافة إلى $x_1 + x_2 = 1$ نجد $\mathbb{E}_1 = [2/7, 5/7]$ ، و

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & 5/7 \end{bmatrix}$$

١٩ – ٥ هل المصفوفة التصافية

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عادية ؟ تصادفية نهائية (أرجودية) ؟ احسب $\mathbb{L} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n$ إذا وجدت ،

وبدلاً من رفع $\mathbb{P}$ إلى القوى التالية لها لتأكيد ما إذا كانت عادية ، دعنا نحدد قيم أيجن لها بحل معادلة التمييز :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & -\lambda & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1-\lambda & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(0.1-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

وبذلك $\lambda_1 = 1$ (جذر مضاعف) $\lambda_2 = 0.1, \lambda_3 = 0$ من نظرية ١٩ – ٤ ، فإن $\mathbb{P}$ ليست عادية . ومع ذلك ..
من نظرية ١٩ – ٢ ، $\mathbb{P}$ تكون تصادفية نهائية(أرجودية)حيث إن لها متجهين أيجين خطيين ومستقلين .

$$[1, 0, 0, 0] \quad \text{و} \quad [0, 0, 0, 1]$$

مناظرين لـ $\lambda_1 = 1$. وبالحساب السهل نجد المتجهين الأيجنين الأيسرين هما

$$[-2, 0, 9, -7] \quad \text{و} \quad [4, 5, -30, 21]$$

تناظر على التوالى λ_2 ، λ_3.

وتقول النظرية ١٩ – ٣ إن $\mathbb{P}$ يمكن أن تكون قطرية ، وفيها

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 9 & -7 \\ 4 & 5 & -30 & 21 \end{bmatrix}$$

وبحساب

$$\mathbb{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/15 & 7/15 & 10/15 & 3/15 \\ 2/9 & 7/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نحصل على (١٩ – ٣)

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\8/15&7/15&10/15&3/15\\2/9&7/9&1/9&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\-2&0&9&-7\\4&5&-30&21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\8/15&0&0&7/15\\2/9&0&0&7/9\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

١٩ – ٦ حل المسألة المصاغة فى المسألة ١٩ – ١

(أ) $$\mathbf{X}^{(5)}=\mathbf{X}^{(0)}\mathbf{P}^5=[0.60,0.40]\begin{bmatrix}0.6477&0.3523\\0.4404&0.5596\end{bmatrix}=[0.5648,0.4352]$$

بعد خمس سنوات تنخفض نسبة مشاركة هاى ـــ جلو فى السوق إلى 56.48 فى المئة .

(ب) ويتبع من نتائج المسألة ١٩ – ٣ أن **P** تصادفية نهائية (أرجودية) ، بمصفوفة نهايات **L** ، حيث إن

$$\mathbf{X}^{(\infty)}=\mathbf{X}^{(0)}\mathbf{L}=[0.60,0.40]\begin{bmatrix}5/9&4/9\\5/9&4/9\end{bmatrix}=[5/9,4/9]=\mathbf{E}_1$$

فى المدى الطويل ، وتستقر نسبة مشاركة هاى ـــ جلو فى السوق عند 5/9 ، أو 55.5 فى المئة تقريباً .

١٩ – ٧ حل المسألة المصاغة فى المسألة ١٩ – ١ إذا كانت هاى ـــ جلو تتحكم فى 95 فى المئة من السوق

(أ) $$\mathbf{X}^{(5)}=\mathbf{X}^{(0)}\mathbf{P}^5=[0.90,0.10]\begin{bmatrix}0.6477&0.3523\\0.4404&0.5596\end{bmatrix}=[0.6270,0.3730]$$

بعد خمس سنوات سوف تتحكم هاى ـــ جلو فى نسبة 63 فى المئة من السوق تقريباً .

(ب) وحيث إن **P** عادية ، فإن التوزيع النهائى يحفظ متجه الأيمن الأيسر فى **P** المرتبط بـ $\lambda = 1$ هو

$$\mathbf{X}^{(\infty)}=\mathbf{E}_1=[5/9,4/9]$$

١٩ – ٨ حل المسألة المصاغة فى المسألة ١٩ – ٢
باستخدام (١٩ – ٢) ، ونتائج المسائل ١٩ – ٢ ، ١٩ – ٥ نحصل على

$$\mathbf{X}^{(\infty)}=\mathbf{X}^{(0)}\mathbf{L}=[0,45/66,21/66,0]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\8/15&0&0&7/15\\2/9&0&0&7/9\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[0.4343,0,0,0.5657]$$

لذلك .. وبالتحديد فإن 43.43 فى المئة من هؤلاء المتدربين الحاليين (حوالى ٢٩ شخصاً) سيشطبون من البرنامج ، و 56.57 فى المئة (حوالى ٣٧ شخصاً) سيصبحون مشرفين .

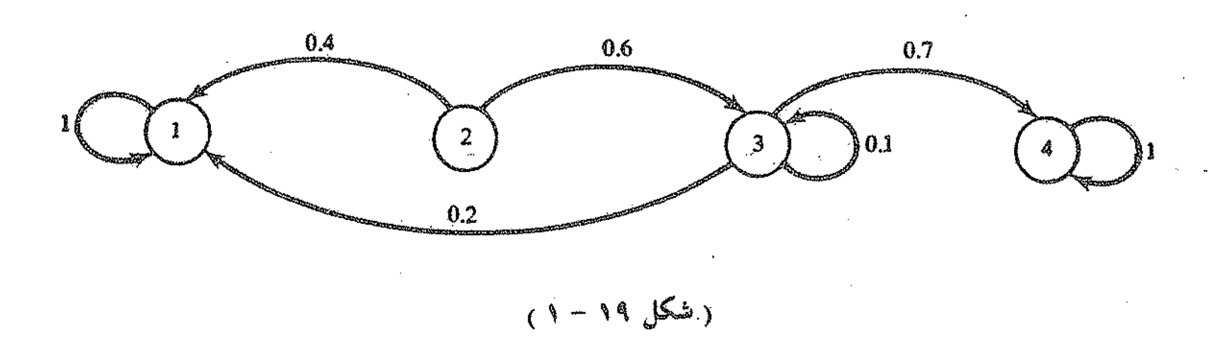
١٩ – ٩ حل المسألة المصاغة فى ١٩ – ٢ إذا كان 66 شخصاً جمعهم فى التدريب النظرى حالياً .
الآن $\mathbf{X}^{(0)}=[0,1,0,0]$.

$$\mathbf{X}^{(\infty)}=\mathbf{X}^{(0)}\mathbf{L}=[0,1,0,0]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\8/15&0&0&7/15\\2/9&0&0&7/9\\0&0&0&1\end{bmatrix}=[8/15,0,0,7/15]$$

لذلك .. 15 / 8 من الـ 66 شخصاً فى التدريب (حوالى 35 شخصاً) سيشطبون بالتأكيد من البرنامج التدريبى ، وبقاء 31 شخصاً سيصبحون مشرفين . بمقارنة هذه النتيجة بنتيجة المسألة ١٩ – ٨ نرى أن التوزيعات النهائية تتأثر بالتوزيعات الأولية ، وهو الوضع العادى عندما تكون المصفوفة التصادفية تصادفية نهائية (أرجودية) ، ولكن ليست عادية .

١٩ – ١٠ انشىء شكل الحالة الانتقالية لسلسلة ماركوف فى المسألة ١٩ – ٢ .

شكل الحالة الانتقالية هو شبكة موجهة (انظر فصل ١٥) ، وفيها تمثل الحالات بالعقد ، وتمثل الانتقالات الممكنة بالمنحنيات ، وبتسمية الحالات ، كما فى المسألة ١٩ – ٢ ، نحصل على شكل الحالة الانتقالية ، كما فى شكل ١٩ – ١ . وتمثل الأرقام التى على المنحنيات احتمال الانتقال .



(شكل ١٩ – ١)

١٩ – ١١ يعمل أحد عمال الخياطة بمفرده على ماكينة فى مرحلة من عملية إنتاجية لإنتاج الملابس . تتطلب هذه المرحلة نصف ساعة لكل قطعة لكى تتم . وكل 30 دقيقة يصل أحد السعاة لمكان العامل لأخذ القطع المنتهية وتسليمه القطع الجديدة للخياطة . وعدد القطع التى يحملها الساعى غير مؤكدة : 30 فى المئة من الوقت لا يكون مع الساعى أى قطع ؛ و 50 فى المئة من الوقت يحمل الساعى قطعة واحدة يتركها للخياطة ؛ و 20 فى المئة من الوقت يكون مع الساعى قطعتين يتركهما للخياطة . ومع ذلك .. فإن الساعى عنده تعليمات ألا يترك أكثر من ثلاث قطع لعامل الخياطة (القطع غير المنتهية عند عامل الخياطة والزائدة تؤخذ لعامل آخر) . حدد نسبة الوقت الذى يكون فيه العامل بدون عمل ، بإفتراض أن القطع التى ستبقى بدون خياطة فى نهاية وردية العمل ستبقى لليوم التالى .

يمكن صياغة هذه المسألة فى صورة سلسلة ماركوف ذات ثلاث مراحل ، وذلك بجعل عدد القطع غير المنتهية عند العامل قبل حضور الساعى مباشرة تمثل الحالات . وتكون إما 1 ، 2 ، 3 على التوالى ممثلة 0 ، 1 ، أو 2 قطعة غير منتهية ، أما المراحل ، فهى فترات النصف ساعة لمعدل وصول الساعى .

إذا كان لدى العامل قطعة واحدة غير منتهية فى بداية المرحلة (قبل حضور الساعى مباشرة) ، وإذا ترك الساعى قطعة واحدة (باحتمال 0.5) ، فإن قطعة واحدة ستستكمل ببداية المرحلة التالية ، تاركة العمل مرة أخرى بقطعة واحدة غير مستكملة ؛ ومن ثم $p_{22} = 0.5$ ، وإذا كان لدى العامل قطعتان غير مستكملتين فى بداية المرحلة ، وحضر الساعى ومعه إما 1 ، أو 2 قطعة (باحتمال $0.7 = 0.2 + 0.5$) ، فإن الساعى سيترك قطعة واحدة فقط ؛ وفى نهاية الفترة التالية سيكون لدى العامل قطعتان غير مستكملتين باقيتان ، حيث ستستكمل واحدة خلال هذه الفترة . لذلك $p_{33} = 0.7$ ، باعتبار أن كل الاحتمالات الأخرى بنفس الطريقة ، نوجد المصفوفة التصادفية .

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

حيث إن كل عناصر $\mathbf{P}^2$ موجبة ، لذلك تكون $\mathbf{P}$ موجبة . ويكون متجه أيجن الأيسر المرتبط بـ $\lambda_1 = 1$ ، وله مجموع عناصر يساوى 1 هو

$$\mathbf{E}_1 = \left[\frac{9}{19}, \frac{6}{19}, \frac{4}{19}\right]$$

وحيث إن $\mathbf{P}$ عادية ، فإن هذا المتجه هو أيضاً $\mathbf{X}^{(\infty)}$. وفى المدى البعيد ، يبدأ العامل مرحلة فى الحالة 1 (لا تتبقى أى قطع غير مستكملة) 9/19 من المرات . ويصل الساعى بعد ذلك ، ولا يترك أى قطع للخياطة ، وذلك باحتمال 0.3 ، لذلك فإن العامل يكون بلا عمل . لذلك يكون العامل عاطلاً .
أو 14 فى المئة من الوقت تقريباً .

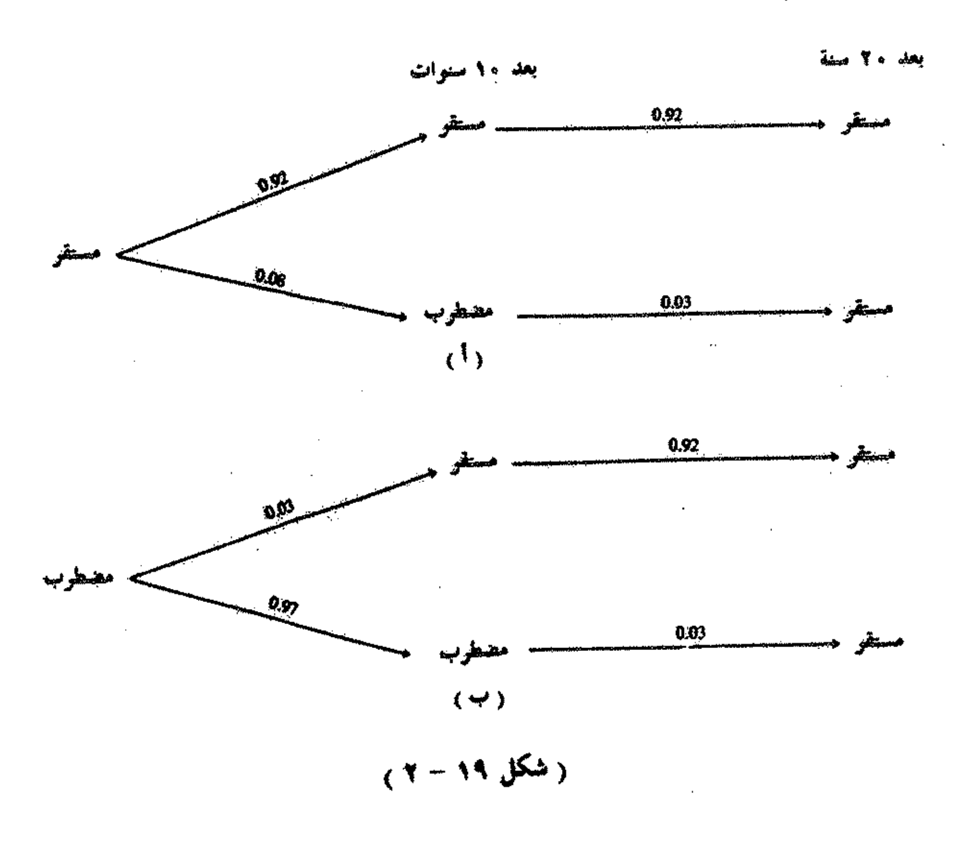
$$\frac{9}{19}(0.3) = 0.1421$$

١٩ - ١٢ تحقق من أنه فى المصفوفة التصادفية فى المثال ١٩ - ١ ، $p_{ij}^{(2)}$ تمثل احتمال الانتقال من الحالة i إلى الحالة j فى فترتين زمنيتين .

هناك طريقان للسكان المستقرين ليظلوا مستقرين بعد 20 سنة ؛ كما فى شكل ١٩ - ٢ . (أ) : إما أن يظلوا مستقرين خلال الـ 10 سنوات الأولى ، وفى خلال الـ 10 سنوات الثانية ، أو يصبحون مضطربين بعد 10 سنوات ، ثم يعودون إلى الاستقرار بعد 10 سنوات أخرى . واحتمال أن يبقى المواطن المستقر مستقراً خلال فترة زمنية واحدة هو 0.92 ، ومن ثم ، فاحتمال أن يبقى المواطن المستقر مستقراً خلال فترتين زمنيتين هو (0.92) (0.92) . واحتمال أن يصبح المواطن المستقر مضطرباً فى 10 سنوات هو 0.08 ، واحتمال أن يصبح المواطن المضطرب مستقراً فى 10 سنوات هو 0.03 ؛ لذلك فإن احتمال حدوث الحدثين مع بعضهما لنفس المواطن هو (0.03) (0.08) ، لذلك فإن احتمال أن يبقى المواطن المستقر مستقراً بعد فترتين زمنيتين هو

$$(0.92)(0.92) + (0.08)(0.03)$$

وهو بالضبط العنصر (1,1) فى $\mathbf{P}^2$



(شكل ١٩ - ٢)

يوضح شكل ١٩ – ٢ (ب) الطرق التى يمكن للمواطن المضطرب بواسطتها أن يصبح مستقراً خلال فترتين زمنيتين . واحتمال أن يصبح مستقراً فى الفترة الزمنية الأولى ، ثم يبقى مستقراً فى الفترة الزمنية التالية هو $(0.3)(0.92)$. واحتمال أن يبقى مضطرباً خلال الفترة الزمنية الأولى ، ثم يصبح مستقراً خلال الفترة الزمنية الثانية هو $(0.97)(0.03)$. لذلك .. فإن احتمال حدوث أى من هذين الموقفين هو

$$(0.03)(0.92) + (0.97)(0.03)$$

وهو بالضبط العنصر $(2, 1)$ فى $\mathbb{P}^2$. ويمكن معاملة الحالتين الأخريين بالمثل .

١٩ – ١٣ اثبت أنه إذا كانت $\mathbb{P}$ عادية ، فإن كل الصفوف $\mathbb{L} = \underset{n\to\infty}{\text{نهاية}} \mathbb{P}^n$ تكون مماثلة .

بمعرفة أن $\mathbb{L} = \underset{n\to\infty}{\text{نهاية}} \mathbb{P}^n$ ، فإنه يكون صحيحاً أن $\mathbb{L} = \underset{n\to\infty}{\text{نهاية}} \mathbb{P}^{n-1}$ ، وبالتالى ،

$$\mathbb{L} = \underset{n\to\infty}{\text{نهاية}} \mathbb{P}^n = \underset{n\to\infty}{\text{نهاية}} (\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{P}) = (\underset{n\to\infty}{\text{نهاية}} \mathbb{P}^{n-1})\mathbb{P} = \mathbb{L}\mathbb{P}$$

والتى تتضمن أن كل صف فى $\mathbb{L}$ هو متجه أيجن أيسر فى $\mathbb{P}$ مناظر لـ $\lambda = 1$

والآن عندما تكون $\mathbb{P}$ عادية ، فإن كل متجهات أيجن تكون مضروبات مقياسية لمتجه مفرد . وعلى الوجه الآخر ، عندما تكون $\mathbb{L}$ تصادفية ، فإن كل صف منها يكون مجموعه واحداً . ويتبع ذلك أن كل الصفوف تكون متماثله .

١٩ – ١٤ إثبت أنه إذا كانت λ قيمة أيجن للمصفوفة التصادفية $\mathbb{P}$ ، فإن $|\lambda| \leq 1$.

دع $\mathbb{E} = [e_1, e_2, \ldots, e_N]^T$ ليكون متجه أيجن أيمن يتبع λ ، فإن $\mathbb{P}\mathbb{E} = \lambda\mathbb{E}$ وباعتبار العنصر رقم i لكلا الطرفين من المتساوية ، نستنتج أن

$$\sum_{k=1}^{N} p_{ik}e_k = \lambda e_i$$

دع e_i لتكون العنصر من $\mathbb{E}$ الذى له أكبر مقدار ؛ بمعنى

$$|e_i| = \max\{|e_1|, |e_2|, \ldots, |e_N|\}$$

من التعريف .. فإن $\mathbb{E} \neq 0$ ، لذلك $|e_i| > 0$ (١) . ويتبع ذلك من (١) وبوضع j تساوى i ومن (٢) أن

$$|\lambda||e_i| = |\lambda e_i| = \left|\sum_{k=1}^{N} p_{ik}e_k\right| \leq \sum_{k=1}^{N} p_{ik}|e_k| \leq |e_i| \sum_{k=1}^{N} p_{ik} = |e_i|$$

وتكون النتيجة هى $|\lambda| \leq 1$ مباشرة

مسائل مكملة

Supplementary Problems

فى المسائل ١٩ ــ ١٥ حتى ١٩ ــ ٢١ ، حدد ما إذا كانت المصفوفات المعطاة تصادفية ، وإذا كانت كذلك ، حدد ما إذا كانت عادية أو تصادفية نهائية ، أو ليست كذلك . حدد قيمتها النهائية إن وجدت .

١٩ – ١٥ **19.15** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.21 & 0.79 \end{bmatrix}$ **19.18** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **19.21** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.21 & 0.79 & 0 \\ 0.17 & 0.35 & 0.48 \end{bmatrix}$

١٩ – ١٦ **19.16** $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **19.19** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$

١٩ – ١٧ **19.17** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **19.20** $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$

١٩ – ٢٢ حدد النسبة من المواطنين الذين يمكن تصنيفهم فى النهاية كمستقرين اقتصادياً إذا كانت البيانات فى المثال ١٩ – ١ تظل محققة خلال المدى الطويل .

١٩ – ٢٣ بمراجعة كشف المشتركين فى مجلة السفر ، وجد أن 65 فى المئة منهم على الأقل لهم كارت ضمان لشركة طيران واحدة . وبالمقارنة بالمراجعة التى تمت منذ 5 سنوات مضت ، وجد أن 40 فى المئة من الذين لم يكن لديهم كارت ضمان أصبح لديهم الآن كارت ، بينما 10 فى المئة من الذين كان عندهم كارت لم يعد لديهم كروت حالياً . بافتراض أن هذه الاتجاهات ستستمر فى المستقبل ، حدد نسبة المشتركين الذين سيمتلكون كروت ضمان لشركة الطيران . (أ) فى عشر سنوات ، (ب) فى المدى الطويل .

١٩ – ٢٤ لا ترغب إحدى شركات الطيران بين مدينة نيويورك وواشنطن أن تقوم رحلة الساعة ١٥ر٧ صباحاً متأخرة يومين على التوالى . إذا بدأ الطيران متأخراً فى أحد الأيام ، فإن الشركة تبذل مجهوداً كبيراً فى اليوم التالى ليكون الطيران فى موعده ، وتنجح فى ذلك 95 فى المئة من المرات . وإذا لم يكن الطيران متأخراً فى اليوم السابق ، فإن الشركة لا تتخذ أى إجراءات ، ويبدأ الطيران طبقاً للجدول 60 فى المئة من المرات . ما هى النسبة المئوية من المرات التى عندها يكون الطيران متأخراً ؟

١٩ – ٢٥ يصنف العنب فى وادى سونوما إلى ممتاز ، وعادى ، وردىء . وعقب محصول ممتاز ، فإن احتمالات الحصول على عنب ممتاز ، وعادى ، وردىء فى العام التالى هى 0 ,0.8 ,0.2 على التوالى . وعقب محصول عادى ، فإن احتمال الحصول على عنب ممتاز ، وعادى ، وردىء هى 0.2 ,0.6 ,0.2 . وعقب محصول ردىء ، فإن احتمالات الحصول على عنب ممتاز ، وعادى ، وردىء هى 0.1 ,0.8 ,0.1 . حدد احتمالات المحصول الممتاز لكل سنة من السنوات الخمس التالية إذا كان أقرب أخر محصول عادياً .

١٩ – ٢٦ يقسم قسم الشيخوخة فى إحدى المستشفيات مرضاه إلى علاج داخلى ، وعلاج سريع . وتدل البيانات السابقة على أنه خلال أسبوع واحد 30 فى المئة من مرضى العلاج السريع يخرجون من المستشفى ، و 40 فى المئة يبقون تحت العلاج السريع ، و 30 فى المئة يحتاجون إلى علاج داخلى . وفى نفس الفترة 50 فى المئة من مرضى العلاج الداخلى يصبحون فى العلاج السريع ، و 20 فى

المئة منهم يبقون بالعلاج الداخلي ، و 30 في المئة يموتون . وحالياً لدى المستشفى 100 مريض في قسم الشيخوخة ، و 30 منهم علاج داخلي ، و 70 علاج سريع . حدد وضع هؤلاء المرضى . (أ) بعد 2 أسبوع (ب) في المدى الطويل . (لاتتغير حالة المريض الذي يخرج إذا مات هذا المريض)

١٩ - ٢٧ يعتبر أصحاب إحدى العمارات السكنية في شيكاجو أن وكيل التشغيل الذي يدير العمارة من المديرين الممتازين ، وله سجل ممتاز بمدينة بوسطن . وبالنسبة للتقديرات جيد ، ومتوسط ، ورديء للمباني التي تديرها الشركة ، فإن 50 في المئة من المباني التي كانت جيدة لعام كامل تظل جيدة حتى نهاية العام . وينحدر الباقي إلى المستوى المتوسط . وبالنسبة للمباني التي كانت في حالة متوسطة ، و 30 في المئة منها تبقى في المستوى المتوسط في نهاية السنة ، و 70 في المئة ترتفع إلى المستوى الجيد . وبالنسبة للمباني التي كانت في المستوى الرديء ، فإن 95 في المئة تبقى في المستوى الرديء بعد سنة واحدة ، بينما الـ 10 في المئة الباقية ترتفع إلى المستوى الجيد . بافتراض أن هذه الشروط ستنطبق على شيكاجو أيضاً ، حدد مستوى الشقق المتوقع تحت إدارة الشركة في المدى الطويل .

١٩ - ٢٨ إحدى حالات سلسلة ماركوف هي « الامتصاص » ، أي أن أي غرض يدخل أي حالة لا يمكن أن يخرج منها . أوجد كل حالات الامتصاص لسلاسل ماركوف المعرفة بالمحددات (أ) في المسألة ١٩ - ١٥ ، (ب) في المسألة ١٩ - ١٨ ، (ج) في المسألة ١٩ - ١٩ ، (د) في المسألة ١٩ - ٢١ .

١٩ - ٢٩ اثبت أن المصفوفة التصادفية لسلسة ماركوف التي لها على الأقل حالة امتصاص لايمكن أن تكون عادية .

١٩ - ٣٠ من تعريف مضروبات المصفوفات ، تحقق من أن مضروب مصفوفتين تصادفيتين من نفس الدرجة يكون هو نفسه تصادفياً .

١٩ - ٣١ اثبت $U=[1, 1, 1, \ldots, 1]$ هو متجه أيجن أيسر في P^T ومعكوس أي مصفوفة تصادفية اختيارية P .

١٩ - ٣٢ باستخدام نتيجة المسألة ١٩ - ٣١ ، إثبته أن كل مصفوفة تصادفية P لها $\lambda = 1$ كقيمة أيجن .

١٩ - ٣٣ اثبت النظرية ١٩ - ٣

١٩ - ٣٤ بين بمثال أن معكوس النظرية ١٩ - ٤ غير ممكن .



الآفاق الغير محدودة
Unbounded Horizons

السياسات المثلى فى ظل السكون OPTIMAL POLICIES UNDER STATIONARITY

عملية القرار التى لها أفق غير محدود ، هى التى لها مراحل كثيرة غير محدودة . وبالرغم من أن هذه المواقف لا تحدث كثيراً فى الحياة العملية فإنها تكون نماذج مناسبة لتحليل العمليات التى ليس لها نقط نهاية واضحة . ويفترض الشرط التالى لهذه العمليات .
فرض السكون ، القرارات ، العائد ، والحالات المرتبطة بالعملية تكون متماثلة فى كل حالة .

وفى الحالات التى تتطابق مع هذا الفرض فإن السياسات المثلى تعتمد فقط على الحالات وليست على المراحل . ومهما كان القرار أمثلاً للحالة u فى المرحلة 1 فإنه يكون أمثلاً للحالة u فى المرحلة 100 ، حيث تبقى كل الشروط الأخرى بدون تغير . سنستعمل الرمز $d^*(u)$ ليدل على أن القرار يكون أمثلاً عندما تكون العملية فى الحالة u .

وفرض السكون يكون مقيداً فى أنه لا يسمح بتغيير المعدلات ، والتكلفة ، والأثمان أو أى كمية أخرى عندما تستمر العملية فى المستقبل . وتبقى السياسة المثلى ، لذلك ، مثلى طالما يبقى فرض السكون قائماً فقط .

الخصم : DISCOUNTING

حيث الأموال المنصرفة أو الواردة فى المستقبل (المسافة) لا تتساوى فى القيمة مع الأموال من نفس المقام المنصرفة أو الواردة فى الحاضر ، ويستخدم الخصم غالباً لتعويض الفروق الزمنية (انظر ١٤ — ٥) . نرمز للقيمة الحالية للعائد الأمثل (أو العائد الأمثل المتوقع فى حالة العمليات التصادفية) بالأفق غير المحدود لعملية قرار مبتدأة بالحالة u بـ $m(u)$. وتسمى معادلة $m(u)$ المعادلة الدالة للعملية .

العمليات الثابتة مع الخصم DETERMINISTIC PROCESSES WITH DISCOUNTING

توجد المعادلة الدالة للعمليات الثابتة بسهولة غالباً باشتقاق الصيغة العكسية للعملية ، وذلك باستخدام مدخل البرمجة الديناميكية مع الخصم على عدد محدد من المراحل ، ثم شطب كل الرموز الدالة على المراحل .

مثال ٢٠ — ١ : من (١) فى المسألة ١٤ — ١٠ نحصل على

$$m(u) = \max\{I(u) - M(u) + \alpha m(u+1),\ I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m(1)\}$$

كمعادلة دالة لعملية إحلال المعدات بأفق غير محدود .

تستخدم الطريقة التالية ذات الخمس خطوات لحل المعادلات الدالة لـ $m(u)$ لتحديد السياسة المثلى .

الخطوة 1 : إختر سياسة أولية وأرمز للقرار فى كل حالة u بـ $d(u)$. إجعل هذه السياسة هى السياسة الحالية .

الخطوة 2 : تحت هذه السياسة الحالية ، إحسب لكل قيمة من u العائد الكلى من العملية التى تبدأ بالحالة u . إجعل القيمة المحسوبة الدالة $PV(u)$

الخطوة 3 : إستبدل الدالة $m\cdot$ بالدالة $\text{PV}\cdot$ فى الطرف الأيمن فى المعادلة الدالة ، فنحصل لذلك على $\hat{m}(u)$ ، الطرف الأيسر للمعادلة الجديدة ، $d(u)$ القرار المؤدى إلى $\hat{m}(u)$.

الخطوة 4 : إذا كانت $d(u) = \hat{d}(u)$ لكل حالة u ، فتكون السياسة الحالية مثلى ، بمعنى $d^*(u) = \hat{d}(u)$ ، $m(u) = \hat{m}(u) = \text{PV}(u)$. وإذا لم تكن كذلك ، إذهب إلى الخطوة 5 .

الخطوة 5 : إجعل $\hat{d}(u) = d(u)$ لكل حالة u ، لذلك إنشىء سياسة حالية معدلة ، ثم عُدْ إلى الخطوة 2 . (انظر المسألة ٢٠ -٣)

سلاسل ماركوف مع الخصم MARKOV CHAINS WITH DISCOUNTING

يمكن التعبير عن بعض عمليات القرارات فى صورة سلاسل ماركوف بمجرد أن توضع السياسة . فى هذه الحالات ، تعتمد الاحتمالات الانتقالية عموماً على كلا من الحالات والسياسة . (انظر المسائل ٢٠ - ٥ و ٢٠ - ٦) . إجعل

$d_i \equiv$ القرار الممكن عندما تكون العملية فى الحالة i $(i = 1, 2, \ldots, N)$

$C(i, d_i) \equiv$ التكلفة أو العائد (المتوقع) من تنفيذ القرار d_i ، والعملية تكون فى الحالة i

$p_{ij}(d_i) \equiv$ الاحتمال الانتقالى للتنقل من الحالة i إلى الحالة j إذا نُفذ القرار d_i فى الحالة

تحدث التكلفة $C(i, d_i)$ فى كل مرة تكون فيها العملية عند الحالة i وينفذ القرار d_i . ولكل i ، d_i تكون هذه التكلفة ، أو لا تكون متغير عشوائى . فإذا كانت كذلك ، نفهم أن $C(i, d_i)$ ترمز إلى القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى .

وتكون المعادلة الدالة لسلسلة ماركوف ذات $N\cdot$ مرحلة بمعامل خصم α هى

$$m(i) = \underset{d_i}{\text{optimum}}\left\{C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(d_i) m(j)\right\} \qquad (٢٠ - ١)$$

وتكون الأمثلية لكل القرارات d_i الممكنة عندما تكون العملية فى الحالة i . ويمكن حل المعادلة (٢٠ - ١) فى $m(i)$ بنفس الطريقة المعطاة للعمليات الثابتة (المؤكدة) مع الخصم ، بتعديل واحد . والقيم الحالية (المتوقعة) $\text{PV}(i)$ فى الخطوة 2 لا يمكن أن تحسب مستقلة لكل حالة i ، ولكن نحصل عليها لحل مجموعة المعادلات الآتية .

$$\text{PV}(i) = C(i, \hat{d}_i) + \alpha \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(\hat{d}_i) \text{PV}(j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (٢٠ - ٢)$$

وهنا فإن $\hat{d}_i$ هى القرار المرتبط بالحالة i تحت السياسة الحالية . وتكون الصيغة (٢٠ - ٢) بالطبع هى الأساس للصيغة (٢٠ - ١) .

ويجب أن يذكر إن القيم الحالية للعمليات المؤكدة أيضاً يمكن أن تُحسب من المعادلات المماثلة لـ (٢٠ - ٢) . ويمكن الحصول على هذه المعادلات بكتابة $\text{PV}(u)$ بدلاً من $m(u)$ فى المعادلة الدالة ، ثم أمثلية القيمة المفردة $d_i = \hat{d}_i$ (انظر المسألة ٢٠ -٤) .

العائد المتوقع لكل فترة EXPECTED RETURN PER PERIOD

فى الحالات التى يكون معروفاً فيها إن فرض السكون ينطبق للفترات الزمنية القصيرة ، ولكن الغير مؤكدة . أو حيث يكون معامل الخصم قريباً من 1 ، لذلك ينتج عنه قيم حالية كبيرة للأفق غير المحدودة — يمكن أن يكون العائد المتوقع (سواء ربح أو تكلفة) للفترة (المرحلة) مقياساً أكثر ملاءمة عن القيمة الحالية لتحديد السياسة المثلى .

نفترض أن المسألة تحت هذا التساؤل يمكن أن تصور فى صورة سلسلة ماركوف عندما توضع السياسة ، ويكون التوزيع النهائى للحالات

$$\mathbf{X}^{(\infty)} = [x_1^{(\infty)}, x_2^{(\infty)}, \ldots, x_N^{(\infty)}]$$

مستقلاً عن التوزيع الأولى للحالات $\mathbf{X}^{(0)}$.وهذا الشرط الأخير يتحقق ليس فقط إذا كانت المصفوفة الانتقالية $\mathbb{P}$ عادية ، ولكن لطبقة كبيرة من المصفوفات الغير عادية التصادفية النهائية ، والتى فيها يكون صفوف $\mathbb{L} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n$ مشابهة لبعضها البعض .

تعريف : العائد المتوقع للفترة هو

$$R \equiv C(1, d_1)x_1^{(\infty)} + C(2, d_2)x_2^{(\infty)} + \cdots + C(N, d_N)x_N^{(\infty)}$$

حيث $C(i, d_i)$ هى التكلفة المتوقعة أو الربح المتوقع من تنفيذ القرار d_i بينا تكون العملية فى الحالة i $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

يعتمد العائد المتوقع للفترة على السياسة المتبعة ، وتكون السياسة مثل إذا نتج عنها قيمة مثلى فى R . (انظر المسألة ٢٠ – ٧) .

وحيث أن R تحتوى على عناصر $\mathbf{X}^{(\infty)}$ ، فإنها تمثل متوسط عائد الفترة عندما تكون العملية فى حالتها المستقرة . وأكثر من ذلك ، حيث أن $\mathbf{X}^{(\infty)}$ من المفروض أنها لا تعتمد على $\mathbf{X}^{(0)}$ ، فإن R أيضاً ، تكون مستقلة عن الحالة الأولية للعملية ، ومع ذلك فإن الحالة الأولية تؤثر على المراحل الأولى للعملية . أرمز للعائد المتوقع (بدون خصم) للعملية خلال n – فترة إبتداءً بالحالة i بـ $w_n(i)$. فإن $w_i \equiv w_n(i) - nR$ تمثل التداخل خلال n فتره بين العائد الكلى المتوقع على أساس ان العملية بدأت بالحالة i ، وأن العائد الكلى المتوقع قد وصل إلى ظروف الحالة المستقرة التى وصلت إليها قبل ذلك ، وحيث أن ظروف الحالة المستقرة ستصبح مؤثرة تباعاً ، بصرف النظر عن الحالة الأولية ، فإن w_i يجب أن تتحول إلى عدد ثابت بزيادة n (انظر المسألة ٢٠ –١٠) . وتبعاً لذلك فإن w_i تكون ثابتة لقيم n الكبيرة .

ويمكن استخدام قيم w_i لكل حالة i ، وقيم n الكبيرة لإيجاد طريقة الخطوات الست لتحديد السياسات المثلى .

الخطوة *1* : اختار سياسة أولية ، وارمز للقرار لكل حالة i بالرمز $\hat{d}_i$. إجعل هذه السياسة هى الحالية .

الخطوة *2* : حدد المصفوفة الانتقالية $\mathbb{P} = [p_{ij}(\hat{d}_i)]$ المناظرة للسياسة الحالية ، والعائد $C(i, \hat{d}_i)$ المرتبط بالقرارات .

الخطوة *3* : حل مجموعة المعادلات التالية فى R ، w_i $(i = 2, 3, \ldots, N)$ ، عند w_1 تؤخذ صفر

$$w_i + R = C(i, \hat{d}_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(\hat{d}_i)w_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \qquad (٢٠ - ٣)$$

الخطوة *4* : لكل حالة i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ ، حدد القرار $\bar{d}_i$ الذى يؤدى الى

$$\underset{d_i}{\text{أمثلية}} \left\{C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(d_i)w_j\right\} \qquad (٢٠ - ٤)$$

حيث تؤخذ الامثلية لكل القرارت d_i فى هذه الحالة .

الخطوة *5* : إذا كانت $\bar{d}_i = \hat{d}_i$ لكل قيم i ، فإن السياسة الحالية تكون مثلى ، عند $R = R^*$ كا فى الخطوة 3 . إذا لم تكن كذلك ، إذهب إلى الخطوة 6

الخطوة *6* : إجعل $\hat{d}_i = \bar{d}_i$ لكل قيم i ، لذلك إنشىء سياسة حالية معدلة ، وعُدْ إلى الخطوة 2 .
(انظر المسائل ٢٠ – ٨ حتى ٢٠ – ١٢)

مسائل محلولة

Solved Problems

٢٠ – ١ حدد $PV(u)$ لكل حالة u بأفق غير محدود لعملية إحلال المعدات للمسألة ١٤ – ٨ تحت السياسة التالية

الحالة u	1	2	3	4	5	6
القرار $d(u)$	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

خذ معدل العائد الفعال ليكون 10 فى المئة سنوياً وتكلفة إحلال الماكينة ذات عمر 6 سنوات لتكون $R(6) = 7000$ دولار .

تتراوح الحالة u عند أى مرحلة من 1 حتى 6 . حيث أنه ، عند الأفق الغير محدود ، من الممكن الدخول فى مرحلة بماكينة عمرها 6 سنوات (التى يجب أن تستبدل فوراً) . معامل الخصم هو :

$$\alpha = \frac{1}{1 + 0.10} = 0.909091$$

لحساب $PV(1)$ ، لاحظ أنه ، عندما تبدأ العملية بماكينة عمرها عام واحد ، تتطلب السياسة الحالية أن تستبدل الماكينة بتكلفة 3500 دولار (انظر الجدول ١٤ – ١٢) . وتركب ماكينة جديدة تعطى دخلاً 10000 دولار بتكلفة صيانة 100 دولار . ويكون العائد الصافى فى السنة هو

$$10\,000 - 100 - 3500 = \$6400$$

وندخل السنة الثانية للعملية بماكينة عمرها سنة واحدة ، طبقاً للسياسة الحالية فإنها يجب أن تستبدل . ويكون العائد الصافى للسنة الثانية أيضاً هو 6400 دولار . وحيث أنه تحقق متأخراً سنة واحدة ، فإنه يجب أن يخصم بمعدل خصم α . ويستمر العائد الصافى السنوى بعد ذلك ليكون 6400 دولار ، ولكن كل قيمة يجب أن تخصم بشكل مناسب لإيجاد قيمتها الحالية . وكنتيجة لذلك ، فإن القيمة الحالية للعائد الكلى من العملية إبتداءً بماكينة عمرها سنة واحدة هى

$$PV(1) = 6400 + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \cdots = \frac{6400}{1-\alpha} = \$70\,400$$

لحساب $PV(2)$ القيمة الحالية للعائد الكلى إبتداءً بماكينة عمرها سنتين ، لاحظ أن السياسة الحالية تتطلب استبدال الماكينة ذات عمر السنتين مباشرة بماكينة جديدة . تكون تكلفة الاستبدال 4200 دولار ، وبمجرد تركيب الماكينة الجديدة تعطى دخلاً 10000 دولار وتكلفة صيانة 100 دولار . ويكون العائد الصافى للسنة الأولى هو

$$10\,000 - 100 - 4200 = \$5700 \quad \text{دولار}$$

وإبتداءً من السنة الثانية تكون الظروف المالية مماثلة للظروف التى حسبت بها $PV(1)$ لذلك فإن

$$PV(2) = 5700 + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \cdots = 5700 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$69\,700 \quad \text{دولار}$$

وبالمثل

$$PV(3) = (10\,000 - 100 - 4900) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \cdots = 5000 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$69\,000$$ دولار

$$PV(4) = (10\,000 - 100 - 5800) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \cdots = 4100 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$68\,100$$ دولار

$$PV(5) = (10\,000 - 100 - 5900) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \cdots = 4000 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$68\,000$$ دولار

$$PV(6) = (10\,000 - 100 - 7000) + 6400\alpha + 6400\alpha^2 + 6400\alpha^3 + \cdots = 2900 + \frac{6400\alpha}{1-\alpha} = \$66\,900$$ دولار

٢٠ - ٢ أعد حل المسألة ٢٠ - ١ إذا كانت السياسة الحالية هي

الحالة u	1	2	3	4	5	6
القرار $d(u)$	احتفظ	احتفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

لحساب $PV(1)$ ، فإن العائد الكلي مع الخصم إبتداءً بالماكينة ذات عمر سنة واحدة ، مع ملاحظة أن السياسة الحالية تتطلب الاحتفاظ بالماكينة ذات عمر سنة واحدة . من الجدول ١٤ - ١٢ ، فإن هذه الماكينة ستعطى عائد سنوى 9500 دولار وتكلفة صيانة 400 دولار ، بعائد صافى 9100 دولار . وتصبح الماكينة عمرها سنتين فى بداية المرحلة الثانية ، ومرة أخرى تتطلب السياسة الحالية الاحتفاظ بالماكينة . وتعطى الماكينة ذات عمر السنتين عائداً صافياً

$$9200 - 800 = \$8400$$ دولار

وحيث أن هذا يحدث فى المرحلة الثانية من العملية فإن هذه الكمية يجب أن تخصم بمعدل خصم α. وتدخل الشركة بعد ذلك المرحلة الثالثة بماكينة عمرها ثلاث سنوات والتى يجب أن تستبدل طبقاً للسياسة الحالية ، تكلفة الاستبدال 4900 دولار. تعطى الماكينة الجديدة دخلاً قدرة 10000 دولار وبمجرد تركيب وتكلفة صيانة 100 دولار ، لذلك فإن العائد الصافى فى المرحلة الثالثة يكون

$$10\,000 - 100 - 4900 = \$5000$$ دولار

ويجب أن يُخصم بمعدل خصم α^2. وتدخل الشركة المرحلة الرابعة بماكينة عمرها سنة واحدة ، حيث يجب الاحتفاظ بها طبقاً للسياسة الحالية . لذلك ،

$$\begin{aligned} PV(1) &= 9100 + 8400\alpha + 5000\alpha^2 + 9100\alpha^3 + 8400\alpha^4 + 5000\alpha^5 + \cdots \\ &= (9100 + 8400\alpha + 5000\alpha^2)(1 + \alpha^3 + \alpha^6 + \cdots) = \frac{9100 + 8400\alpha + 5000\alpha^2}{1-\alpha^3} = \$83\,916 \end{aligned}$$ دولار

لحساب $PV(2)$ ، العائد الكلي مع الخصم بابتداء العملية بماكينة عمرها سنتين ، مع ملاحظة الاحتفاظ بالماكينة ذات عمر سنتين طبقاً للسياسة الحالية ، ستعطى هذه الماكينة عائداً صافياً هو

$$9200 - 800 = \$8400$$ دولار

وتدخل الماكينة المرحلة 2 من العملية وعمرها ثلاث سنوات ، وتتطلب السياسة الحالية استبدال الماكينة . تكلفة الاستبدال هى 4900 دولار ، وبربطها مع تكلفة الصيانة والدخل الناتج منها يؤدى إلى عائد سنوى صافى .

$$10\,000 - 100 - 4900 = \$5000$$ دولار

وحيث أن هذه الكمية ستسلم فى المرحلة الثانية من العملية ، لذا يجب أن تُخصم بمعدل خصم α . وتدخل الشركة المرحلة الثالثة بماكينة عمرها سنة واحدة ويكون الموقف الآن مشابهاً للموقف الناتج عن $PV(1)$، ولكنه حدث متأخراً مرحلتين . وبالتالى

$$PV(2) = 8400 + 5000\alpha + \alpha^2 PV(1) = \$82\,298$$ دولار

وبالمثل

$$PV(3) = (10\,000 - 100 - 4900) + \alpha PV(1) = \$81\,287$$ دولار

$$PV(4) = (10\,000 - 100 - 5800) + \alpha PV(1) = \$80\,387$$ دولار

$$PV(5) = (10\,000 - 100 - 5900) + \alpha PV(1) = \$80\,287$$ دولار

$$PV(6) = (10\,000 - 100 - 7000) + \alpha PV(1) = \$79\,187$$ دولار

٢٠ - ٣ حل المسألة ١٤ - ١٠ بأفق غير محدود .
المعادلة الدالة لهذه العملية تحددت فى المثال ٢٠ - ١ لتكون

$$m(u) = \max\{I(u) - M(u) + \alpha m(u+1),\ I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m(1)\}$$

لضمان بيع الماكينات التى عمرها 6 سنوات تحت السياسة المثلى ، إجعل $I(6) = 0,\ M(6) = 10^9\ PV(7) = 0.$ باستخدام البيانات للمسألة ١٤ - ٨ ، ٢٠ - ١ ، نحل (١) بطريقة الخمس خطوات

الخطوة 1 : نختار كسياسة أولية

u	1	2	3	4	5	6
$\hat{d}(u)$	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

الخطوة 2 : باستخدام نتائج المسألة ٢٠ - ١ ، نحصل على نتائج هذه السياسة

$PV(1) = \$70\,400$ دولار — $PV(2) = \$69\,700$ دولار — $PV(3) = \$69\,000$ دولار

$PV(4) = \$68\,100$ دولار — $PV(5) = \$68\,000$ دولار — $PV(6) = \$66\,900$ دولار

الخطوة 3 : باستبدال $m(u)$ بـ $PV(u)$ فى الطرف الأيمن من (١) نحصل على .

$$\hat{m}(1) = \max\{I(1) - M(1) + \alpha PV(2),\ I(0) - M(0) - R(1) + \alpha PV(1)\}$$
$$= \text{اعلى}\ \{9500 - 400 + (0.909091)(69\,700),\ 10\,000 - 100 - 3500 + (0.909091)(70\,400)\}$$
$$= \text{اعلى}\ \{72\,464,\ 70\,400\} = \$72\,464 \quad \text{عند} \quad d(1) = \text{احتفظ}$$
$$\hat{m}(2) = \text{اعلى}\ \{I(2) - M(2) + \alpha PV(3),\ I(0) - M(0) - R(2) + \alpha PV(1)\}$$
$$= \text{اعلى}\ \{9200 - 800 + (0.909091)(69\,000),\ 10\,000 - 100 - 4200 + (0.909091)(70\,400)\}$$
$$= \text{اعلى}\ \{71\,127,\ 69\,700\} = \$71\,127 \quad \text{عند} \quad d(2) = \text{احتفظ}$$

$$\hat{m}(3) = \text{اعلى}\ \{68\,409,\ 69\,000\} = \$69\,000 \quad \text{عند} \quad d(3) = \text{اشترى}$$
$$\hat{m}(4) = \text{اعلى}\ \{66\,318,\ 68\,100\} = \$68\,100 \quad \text{عند} \quad d(4) = \text{اشترى}$$
$$\hat{m}(5) = \text{اعلى}\ \{63\,618,\ 68\,000\} = \$68\,000 \quad \text{عند} \quad d(5) = \text{اشترى}$$
$$\hat{m}(6) = \text{اعلى}\ \{-10^9,\ 66\,900\} = \$66\,900 \quad \text{عند} \quad d(6) = \text{اشترى}$$

بتجميع هذه النتائج فى جدول نحصل على

u	1	2	3	4	5	6
$d(u)$	احتفظ	احتفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

الخطوة 4, 5 : حيث أن هذه السياسة الجديدة تختلف عن الحالية ، لذا نأخذ السياسة الجديدة كسياسة حالية معدلة ونعود للخطوة 2 .

الخطوة 2 : باستخدام نتائج المسألة ٢٠ – ٢ نحصل للسياسة الحالية المعدلة على

$PV(1) = \$83\,916$ دولار $PV(2) = \$82\,298$ دولار $PV(3) = \$81\,287$ دولار

$PV(4) = \$80\,387$ دولار $PV(5) = \$80\,287$ دولار $PV(6) = \$79\,187$ دولار

الخطوة 3 : $\hat{m}(1) =$ اعلى $\{I(1) - M(1) + \alpha\, PV(2),\ I(0) - M(0) - R(1) + \alpha\, PV(1)\}$

$=$ اعلى $\{83\,916,\ 82\,687\} = \$83\,916$ عند $d(1) =$ احتفظ

$\hat{m}(2) =$ اعلى $\{82\,297,\ 81\,987\} = \$82\,297$ عند $d(2) =$ احتفظ

$\hat{m}(3) =$ اعلى $\{79\,579,\ 81\,287\} = \$81\,287$ عند $d(3) =$ اشترى

$\hat{m}(4) =$ اعلى $\{77\,488,\ 80\,387\} = \$80\,387$ عند $d(4) =$ اشترى

$\hat{m}(5) =$ اعلى $\{74\,788,\ 80\,287\} = \$80\,287$ عند $d(5) =$ اشترى

$\hat{m}(6) =$ اعلى $\{-10^9,\ 79\,187\} = \$79\,187$ عند $d(6) =$ اشترى

بتجميع هذه النتائج فى جدول نحصل على

u	1	2	3	4	5	6
$d(u)$	احتفظ	احتفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

الخطوة 4 : حيث أن هذه السياسة الجديدة مماثلة للسياسة الحالية ، فإنها تكون المثلى . ويجب الاحتفاظ بالماكينات ذات العمر سنة وسنتين ، ويجب استبدال الماكينات الأقدم بماكينات جديدة . وحيث أن العملية تبدأ بماكينة عمرها سنتين فيكون العائد الكلى للشركة مع الخصم تحت السياسة المثلى هو

$m(2) = PV(2) = \$82\,297$. دولار

٢٠ – ٤ إستخدم مدخل المعادلة الدالة لإعادة حساب القيم الحالية الناتجة فى المسألة ٢٠ – ٢ .

طريقة الحل هى استبدال $m(u)$ بـ $PV(u)$ فى كلا الطرفين من المعادلة الدالة ، ثم بعد ذلك ، ايجاد الأمثلية للقرارات الناتجة من السياسة الحالية لكل حالة . وتُعطى المعادلة الدالة لهذا النموذج فى المثال ٢٠ – ١ مثل :

$$m(u) = \max\{I(u) - M(u) + \alpha m(u+1),\ I(0) - M(0) - R(u) + \alpha m(1)\} \qquad (1)$$

وتكون السياسة تحت الاعتبار هى

u	1	2	3	4	5	6
$d(u)$	احفظ	احفظ	اشترى	اشترى	اشترى	اشترى

والتعظيم فى حالة قرارات « الاحتفاظ » يعنى اختيار الحد الأول من (١) ؛ والتعظيم فى حالة قرارات « الشراء » يعنى اختيار الحد الثانى من (١) . لذلك تؤدى السياسة الحالية إلى مجموعة المعادلات :

$$\begin{aligned} PV(1) &= I(1) - M(1) + \alpha\, PV(2) \\ PV(2) &= I(2) - M(2) + \alpha\, PV(3) \\ PV(3) &= I(0) - M(0) - R(3) + \alpha\, PV(1) \\ PV(4) &= I(0) - M(0) - R(4) + \alpha\, PV(1) \\ PV(5) &= I(0) - M(0) - R(5) + \alpha\, PV(1) \\ PV(6) &= I(0) - M(0) - R(6) + \alpha\, PV(1) \end{aligned} \quad (٢)$$

الأربع معادلات الأخيرة فى (٢) مماثلة للمعادلات المستخدمة فى تحديد $PV(3), \ldots, PV(6)$ فى المسألة ٢٠ - ٢ بربط المعادلتين الثانية والثالثة فى (٢) نحصل على :

$$PV(2) = I(2) - M(2) + \alpha[I(0) - M(0) - R(3)] + \alpha^2 PV(1) \quad (٣)$$

التى تشابه المعادلة فى $PV(2)$ فى المسألة ٢٠ - ٢ . وأخيراً ، بضم المعادلة الأولى فى (٢) مع (٣) نحصل على

$$PV(1) = \frac{I(1) - M(1) + \alpha[I(2) - M(2)] + \alpha^2[I(0) - M(0) - R(3)]}{1 - \alpha^3}$$

وهو التعبير عن $PV(1)$ الناتج من المسألة ٢٠ - ٢ بالضبط .

٢٠ - ٥ حل المسألة ١٨ - ٤ مع الخصم والأفق غير المحدود إذا كان معدل الفائدة الفعلى 8 فى المئة سنوياً .

بمعرفة سياسة الانتاج ، يمكن تصوير هذه المسألة فى سلسلة ماركوف ، وكما تحدد فى المسألة ١٨ - ٤ ، فإن الحالات لكل مرحلة هى المخزون الممكن فى بداية كل سنة — وبالتحديد ، 2— ، 1— ، 0 أو مكوك فضاء ويمثل المخزون السالب أوامر التشغيل الغير منفذة من السنة السابقة . والقرارات الممكنة هى مستويات الانتاج للمكوكات الجديدة ، وتحدد هذه المستويات فى 2 للحالة 2— ، 1 أو 2 للحالة 1— ، 1 ، 0 أو 2 للحالة 0 ، 0 أو 1 للحالة 1 . وتبين الاحتمالات الانتقالية والتكلفة (بالمليون دولار) المرتبطة بكل حالة وكل قرار فى الجدول ٢٠ - ١ . فمثلاً ، لتحديد السطر 3 من الجدول ، وهو الخط المناظر لمخزون 1— مكوك وقرار إنتاج مكوكين خلال العام الحالى ، مع ملاحظة أنه بمجرد أن تنفذ أحد الطلبات السابقة بمكوك واحد فسيتبقى مكوك آخر مطلوب للوفاء بالاحتياج الجديد . إذا كان هذا الاحتياج هو واحد (الذى سيحدث باحتمال 0.6) فإن الحالة عند بداية الفترة التالية تكون 0 ؛ ومن ثم $p_{-1,0}(2) = 0.6$. وإذا كان الاحتياج الجديد للمكوكات هو مكوكين (الذى سيحدث باحتمال 0.4) فإن الحالة عند بداية الفترة التالية ستكون 1—؛ ومن ثم $p_{-1,-1}(2) = 0.4$. وحيث أنه لا يمكن الوصول إلى حالات أخرى من الحالة 1— بقرار إنتاج مكوكين ، فإن كل الاحتمالات الانتقالية الأخرى ستكون صفراً . وتعنى الحالة الأولية 1— أن مكوكاً واحداً لم يسلم طبقاً لاحتياج العام الماضى ، ولذلك توقع غرامة 1.5 مليون دولار . وبضم هذه التكلفة مع تكلفة الإنتاج وهى 19 مليون دولار لتصنيع المكوكين الجدد ، ينتج عنها تكلفة سنوية 20.5 مليون دولار . لاحظ أن التكلفة السنوية محددة بالحالة والقرار ؛ ولا تعتمد على الاحتياج العشوائى .

عند $i = 0.08$ يكون معامل الخصم هو

$$\alpha = \frac{1}{1+0.08} = 0.92592593$$

والمعادلة الدالة هي (٢٠ - ١) وتكون الأمثلية هي تصغير ، وحيث تكون i ، j تتراوح فيما بين $-2,\ldots,1$ (ليس بين $4,\ldots,1$) . نحل المسألة لايجاد السياسة المثلى بطريقة الخمس خطوات .

جدول ٢٠ - ١

	الحالة i	القرار d_i	الاحتمالات الانتقالية $p_{ij}(d_i)$ $j=-2$	$j=-1$	$j=0$	$j=1$	التكلفة الجزائية	تكلفة الانتاج	تكلفة التخزين	التكلفة $C(i, d_i)$
1	−2	2	0.4	0.6	0	0	3.0	19	0	22
2	−1	1	0.4	0.6	0	0	1.5	10	0	11.5
3	−1	2	0	0.4	0.6	0	1.5	19	0	20.5
4	0	0	0.4	0.6	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0.4	0.6	0	0	10	0	10
6	0	2	0	0	0.4	0.6	0	19	0	19
7	1	0	0	0.4	0.6	0	0	0	1.1	1.1
8	1	1	0	0	0.4	0.6	0	10	1.1	11.1

الخطوة 1 : نختار السياسة الأولية

i	−2	−1	0	1
d_i	2	2	2	0

الخطوة 2 : للبيانات التي في السطور 7,6,3,1 من الجدول ٢٠ - ١ ، وهي البيانات المتعلقة بالسياسة الحالية ، تعطى (٢٠ - ٢)

$$PV(-2) = 22 + (0.92592593)[(0.4)PV(-2) + (0.6)PV(-1) + (0)PV(0) + (0)PV(1)]$$
$$PV(-1) = 20.5 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0.4)PV(-1) + (0.6)PV(0) + (0)PV(1)]$$
$$PV(0) = 19 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0)PV(-1) + (0.4)PV(0) + (0.6)PV(1)]$$
$$PV(1) = 1.1 + (0.92592593)[(0)PV(-2) + (0.4)PV(-1) + (0.6)PV(0) + (0)PV(1)]$$

والتي تكافىء النموذج

$$(0.62962963)PV(-2) - (0.55555556)PV(-1) = 22$$
$$(0.62962963)PV(-1) - (0.55555556)PV(0) = 20.5$$
$$(0.62962963)PV(0) - (0.55555556)PV(1) = 19$$
$$-(0.37037037)PV(-1) - (0.55555556)PV(0) + PV(1) = 1.1$$

بالحل فإن

$PV(-2) = 210.57768$ $PV(-1) = 199.05471$ $PV(0) = 188.69533$ $PV(1) = 179.65471$

الخطوة 3 : باستخدام هذه القيم الحالية والبيانات من الجدول ٢٠ -١ ، نجرى الحسابات المعروضة فى جدول ٢٠ - ٢ لكل حالة i فإن أصغر قيمة محسوبة هى $\hat{m}(i)$. لذلك تكون السياسة الجديدة هى

i	-2	-1	0	1
d_i	2	2	1	0

الخطوة 5, 4 : حيث أن هذه السياسة تختلف عن السابقة ، فإننا نأخذ هذه السياسة الجديدة كسياسة حالية ونعود إلى الخطوة 2 .

الخطوة 2 : للبيانات فى الأسطر 7,5,3,1 فى الجدول ٢٠ - ١ ، تعطى البيانات المناظرة لآخر سياسة (٢٠ - ٢)

جدول ٢٠ - ٢

الحالة i	القرار d_i	التكلفة المتوقعة مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=-2} p_{ij}(d_i)\text{PV}(j)$
−2	2	$22 + (0.92592593)[(0.4)(210.57768) + (0.6)(199.05471) + (0)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 210.578$
−1	1	$11.5 + (0.92592593)[(0.4)(210.57768) + (0.6)(199.05471) + (0)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 200.078$
−1	2	$20.5 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0.4)(199.05471) + (0.6)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 199.055$
0	0	$0 + (0.92592593)[(0.4)(210.57768) + (0.6)(199.05471) + (0)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 188.578$
0	1	$10 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0.4)(199.05471) + (0.6)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 188.555$
0	2	$19 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0)(199.05471) + (0.4)(188.69533) + (0.6)(179.65471)] = 188.695$
1	0	$1.1 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0.4)(199.05471) + (0.6)(188.69533) + (0)(179.65471)] = 179.655$
1	1	$11.1 + (0.92592593)[(0)(210.57768) + (0)(199.05471) + (0.4)(188.69533) + (0.6)(179.65471)] = 180.795$

$$\text{PV}(-2) = 22 + (0.92592593)[(0.4)\text{PV}(-2) + (0.6)\text{PV}(-1) + (0)\text{PV}(0) + (0)\text{PV}(1)]$$
$$\text{PV}(-1) = 20.5 + (0.92592593)[(0)\text{PV}(-2) + (0.4)\text{PV}(-1) + (0.6)\text{PV}(0) + (0)\text{PV}(1)]$$
$$\text{PV}(0) = 10 + (0.92592593)[(0)\text{PV}(-2) + (0.4)\text{PV}(-1) + (0.6)\text{PV}(0) + (0)\text{PV}(1)]$$
$$\text{PV}(1) = 1.1 + (0.92592593)[(0)\text{PV}(-2) + (0.4)\text{PV}(-1) + (0.6)\text{PV}(0) + (0)\text{PV}(1)]$$

والتى تكافىء النموذج

$$(0.62962963)\text{PV}(-2) - (0.55555556)\text{PV}(-1) = 22$$
$$(0.62962963)\text{PV}(-1) - (0.55555556)\text{PV}(0) = 20.5$$
$$-(0.37037037)\text{PV}(-1) + (0.44444444)\text{PV}(0) = 10$$
$$-(0.37037037)\text{PV}(-1) - (0.55555556)\text{PV}(0) + \text{PV}(1) = 1.1$$

بالحل نجد أن

$$\text{PV}(-2) = 209.64706 \qquad \text{PV}(-1) = 198 \qquad \text{PV}(0) = 187.5 \qquad \text{PV}(1) = 178.6$$

جدول ٢٠ – ٣

الحالة i	القرار d_i	التكلفة المتوقعة مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=-2}^{1} p_{ij}(d_i)\text{PV}(j)$
−2	2	22 + (0.92592593)[(0.4)(209.64706) + (0.6)(198) + (0)(187.5) + (0)(178.6)] = 209.647
−1	1	11.5 + (0.92592593)[(0.4)(209.64706) + (0.6)(198) + (0)(187.5) + (0)(178.6)] = 199.147
−1	2	20.5 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0.4)(198) + (0.6)(187.5) + (0)(178.6)] = 198.000
0	0	0 + (0.92592593)[(0.4)(209.64706) + (0.6)(198) + (0)(187.5) + (0)(178.6)] = 187.647
0	1	10 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0.4)(198) + (0.6)(187.5) + (0)(178.6)] = 187.500
0	2	19 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0)(198) + (0.4)(187.5) + (0.6)(178.6)] = 187.667
1	0	1.1 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0.4)(198) + (0.6)(187.5) + (0)(178.6)] = 178.600
1	1	11.1 + (0.92592593)[(0)(209.64706) + (0)(198) + (0.4)(187.5) + (0.6)(178.6)] = 179.767

الخطوة 3 : باستخدام هذه القيم الحالية ، والبيانات فى الجدول ٢٠ – ١ نجرى الحسابات المبينة فى الجدول ٢٠ – ٣ ويتضح أن السياسة الجديدة تكون

i	−2	−1	0	1
d_i	2	2	1	0

الخطوة 4 : حيث أن هذه السياسة مماثلة للسياسة الحالية ، فتكون مثلى . وتحت هذه السياسة وابتداءً من مخزون صفر ، تكون التكلفة المتوقعة لصانعى المكروكات هى

$$m(0) = \text{PV}(0) = 187.5 \quad \text{مليون دولار}$$

٢٠ – ٦ يقوم أحد المزراعين بزرع ذرة لبيعه فى السوق وتغطية احتياجات مزرعتة . يختلف محصول الذرة من سنة إلى أخرى طبقاً للتوزيع الاحتمالى التالى

وحدات المحصول	10	11	12	13	14
الاحتمال	0.10	0.20	0.30	0.25	0.15

يحتاج المزارع 10 وحدات من الذرة لتغطية احتياجات المزرعة شتاءً ويستطيع تخزين حتى 12 وحدة . وأى كمية تخزن ولا تستعمل كغذاء خلال الشتاء يمكن أن تباع فى الخريف التالى .

وإذا أراد أحد موزعى الأغذية أن يدفع مقدم ثمن نظير الذرة للمزارع فإنه يدفع طبقاً للجدول التالى إذا ضمن المزارع تسليمه الذرة بعد محصول الخريف .

وحدات الذرة المتعاقد عليها	0	1	2	3	4
الثمن الكلى بالدولار	0	400	900	1400	2000

إذا تعاقد المزارع على معظم المحصول لموزع الأغذية مع ترك أقل من 10 وحدات لاحتياجاته الخاصة ، فإن النقص يعوض بشراء ذرة من السوق مباشرة بسعر 700 دولار للوحدة . وأى كميات زيادة عن طاقة التخزين تباع بالسوق بسعر 300 دولار للوحدة . ويترك المزارع ما يتم بالسوق للضرورة فقط . ما هى كمية الذرة التى يتعاقد عليها المزارع لموزع الأغذية كل عام إذا أراد المزارع تعظيم الربح المتوقع مع الخصم فى المستقبل القريب بمعدل فائدة 7 فى المئة ؟

نأخذ بداية المرحلة لتكون فترة الحصاد بعد أى تعاقدات سابقة وأى عمليات تمت بالسوق مباشرة استعداداً للشتاء القادم . فى هذا الوقت فإن المزارع يكون لديه إما 11,10 أو 12 وحدة من الذرة فى المخزن ، لذلك نطلق على هذه المستويات ، الحالات 3,2,1 على التوالى . ويكون القرار بالنسبة للمزارع هو عدد الوحدات من الذرة التى يتعاقد عليها من محصول العام القادم مع موزع الأغذية . ويبين جدول ٢٠ - ٤ الاحتمالات الانتقالية والعائد السنوى المتوقع المرتبط بكل حالة وكل قرار . وعلى سبيل المثال ، لحساب السطر 4 من الجدول ٢٠ - ٤ المناظر لمستوى المخزون الحالى بمستوى 10 وحدات والقرار بالتعاقد على 3 وحدات من محصول العام التالى ، لاحظ أن هناك أربع طرق للبقاء فى الحالة 1 بعد سنة واحدة : بعد استهلاك 10 وحدات مخزنة خلال الشتاء ، يمكن : (١) حصاد 10 ويشترى 3 ، (٢) حصاد 11 ويشترى 2 ، (٣) حصاد 12 ويشترى 1 ، (٤) حصاد 13 . لذلك

$$p_{11} = 0.10 + 0.20 + 0.30 + 0.25 = 0.85$$

والطريقة الوحيدة للمزارع ليبدأ مرحلة بعشر وحدات والمرحلة التالية بـ 11 وحدة ، علماً بأن 10 وحدات تستهلك فى الحياة الخاصة ، 3 وحدات يجب أن تُسلم إلى موزع الغذاء ، هى أن يعطى المحصول ١٤ وحدة ؛ لذلك $p_{12} = 0.15$ ولا توجد طريقة (بدون تعامل مع السوق مباشرة) للانتقال من مخزون 10 وحدات إلى مخزون 12 وحدة $p_{13} = 0$

وبسبب أن أى من الخمس احتمالات الممكنة لا تترك أى ذرة للبيع فى السوق مباشرة . فيكون العائد من التعامل المباشر مع السوق هو صفر . وحيث أن عدد 1,2,3 وحدة تشترى من السوق مباشرة طبقاً للمحصول 12,11,10 وحدة فتكون تكلفة السوق المباشرة المتوقعة هى

$$(0.10)(2100) + (0.20)(1400) + (0.30)(700) = \$700$$

لاحظ أنه ، على النقيض من المسألة ٢٠ - ٥ فإن العائد الصافى للمرحلة لا يحدد بالتقيد بالمرحلة والقرار ؛ وبدلاً من ذلك فإنه يعتمد على العائد العشوائى ويكون معامل الخصم هو

$$\alpha = \frac{1}{1 + 0.07} = 0.934579$$

من الوجهة الفنية ، حيث أن كل التكلفة والعائد تحدث فى نهاية الفترة ، لذلك يجب أن تخصم بسعر خصم α قبل أن تستخدم . إذا إفترضنا أن هذا قد تم - على سبيل المثال ، تكلفة السوق المباشر الحقيقة 749 دولار فإنها بعد الخصم تصبح 700 دولار - فإن الدولارات الموضحة فى الجدول ٢٠ - ٣ تكون مخصومة أوتوماتيكياً بشكل مناسب .

جدول ٢٠ - ٤

	الحالة i	القرار d_i	الاحتمالات الانتقالية $p_{ij}(d_i)$			الدخل من التعاقد CI	الدخل من السوق المباشرة SI	تكلفة السوق المباشرة SC	الدخل السنوى المتوقع $CI + SI - SC = C(i, d_i)$
			$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$				
1	1	0	0.10	0.20	0.70	0	165	0	165
2	1	1	0.30	0.30	0.40	400	45	70	375
3	1	2	0.60	0.25	0.15	900	0	280	620
4	1	3	0.85	0.15	0	1400	0	700	700
5	1	4	1	0	0	2000	0	1295	705
6	2	0	0	0.10	0.90	0	375	0	375
7	2	1	0.10	0.20	0.70	400	165	0	565
8	2	2	0.30	0.30	0.40	900	45	70	875
9	2	3	0.60	0.25	0.15	1400	0	280	1120
10	2	4	0.85	0.15	0	2000	0	700	1300
11	3	0	0	0	1	0	645	0	645
12	3	1	0	0.10	0.90	400	375	0	775
13	3	2	0.10	0.20	0.70	900	165	0	1065
14	3	3	0.30	0.30	0.40	1400	45	70	1375
15	3	4	0.60	0.25	0.15	2000	0	280	1720

الخطوة 1 : نختار السياسة الأولية

i	1	2	3
d_i	3	4	4

الخطوة 2 : بالنسبة للبيانات فى السطر 15,10,4 للجدول ٢٠ - ٤ تعطى البيانات المناظرة للسياسة الحالية (٢٠ - ٢) :

$$PV(1) = 700 + (0.934579)[(0.85)PV(1) + (0.15)PV(2) + (0)PV(3)]$$
$$PV(2) = 1300 + (0.934579)[(0.85)PV(1) + (0.15)PV(2) + (0)PV(3)]$$
$$PV(3) = 1720 + (0.934579)[(0.60)PV(1) + (0.25)PV(2) + (0.15)PV(3)]$$

والتى تكافىء النموذج

$$(0.205607)PV(1) - (0.140187)PV(2) = 700$$
$$-(0.794393)PV(1) + (0.859813)PV(2) = 1300$$
$$-(0.560748)PV(1) - (0.233645)PV(2) + (0.859813)PV(3) = 1720$$

وحل هذه المجموعة من المعادلات هو

$PV(1) = 11\,986$ دولار $PV(2) = 12\,586$ دولار $PV(3) = 13\,238$ دولار

جدول ٢٠ – ٥

الحالة i	القرار d_i	الربح المتوقع مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=1}^{3} p_{ij}(d_i)PV(j)$
1	0	165 + (0.934579)[(0.10)(11 986) + (0.20)(12 586) + (0.70)(13 238)] = 12 298
1	1	375 + (0.934579)[(0.30)(11 986) + (0.30)(12 586) + (0.40)(13 238)] = 12 213
1	2	620 + (0.934579)[(0.60)(11 986) + (0.25)(12 586) + (0.15)(13 238)] = 12 138
1	3	700 + (0.934579)[(0.85)(11 986) + (0.15)(12 586) + (0)(13 238)] = 11 986
1	4	705 + (0.934579)[(1)(11 986) + (0)(12 586) + (0)(13 238)] = 11 907
2	0	375 + (0.934579)[(0)(11 986) + (0.10)(12 586) + (0.90)(13 238)] = 12 686
2	1	565 + (0.934579)[(0.10)(11 986) + (0.20)(12 586) + (0.70)(13 238)] = 12 698
2	2	875 + (0.934579)[(0.30)(11 986) + (0.30)(12 586) + (0.40)(13 238)] = 12 713
2	3	1120 + (0.934579)[(0.60)(11 986) + (0.25)(12 586) + (0.15)(13 238)] = 12 638
2	4	1300 + (0.934579)[(0.85)(11 986) + (0.15)(12 586) + (0)(13 238)] = 12 586
3	0	645 + (0.934579)[(0)(11 986) + (0)(12 586) + (1)(13 238)] = 13 017
3	1	775 + (0.934579)[(0)(11 986) + (0.10)(12 586) + (0.90)(13 238)] = 13 086
3	2	1065 + (0.934579)[(0.10)(11 986) + (0.20)(12 586) + (0.70)(13 238)] = 13 198
3	3	1375 + (0.934579)[(0.30)(11 986) + (0.30)(12 586) + (0.40)(13 238)] = 13 213
3	4	1720 + (0.934579)[(0.60)(11 986) + (0.25)(12 586) + (0.15)(13 238)] = 13 238

جدول ٢٠ – ٦

الحالة i	القرار d_i	الربح المتوقع مع الخصم $C(i, d_i) + \alpha \sum_{j=1}^{3} p_{ij}(d_i)PV(j)$
1	0	165 + (0.934579)[(0.10)(14 253) + (0.20)(14 714) + (0.70)(15 294)] = 14 253
1	1	375 + (0.934579)[(0.30)(14 253) + (0.30)(14 714) + (0.40)(15 294)] = 14 214
1	2	620 + (0.934579)[(0.60)(14 253) + (0.25)(14 714) + (0.15)(15 294)] = 14 194
1	3	700 + (0.934579)[(0.85)(14 253) + (0.15)(14 714) + (0)(15 294)] = 14 085
1	4	705 + (0.934579)[(1)(14 253) + (0)(14 714) + (0)(15 294)] = 14 026
2	0	375 + (0.934579)[(0)(14 253) + (0.10)(14 714) + (0.90)(15 294)] = 14 614
2	1	565 + (0.934579)[(0.10)(14 253) + (0.20)(14 714) + (0.70)(15 294)] = 14 653
2	2	875 + (0.934579)[(0.30)(14 253) + (0.30)(14 714) + (0.40)(15 294)] = 14 714
2	3	1120 + (0.934579)[(0.60)(14 253) + (0.25)(14 714) + (0.15)(15 294)] = 14 694
2	4	1300 + (0.934579)[(0.85)(14 253) + (0.15)(14 714) + (0)(15 294)] = 14 685
3	0	645 + (0.934579)[(0)(14 253) + (0)(14 714) + (1)(15 294)] = 14 938
3	1	775 + (0.934579)[(0)(14 253) + (0.10)(14 714) + (0.90)(15 294)] = 15 014
3	2	1065 + (0.934579)[(0.10)(14 253) + (0.20)(14 714) + (0.70)(15 294)] = 15 153
3	3	1375 + (0.934579)[(0.30)(14 253) + (0.30)(14 714) + (0.40)(15 294)] = 15 214
3	4	1720 + (0.934579)[(0.60)(14 253) + (0.25)(14 714) + (0.15)(15 294)] = 15 294

الخطوة 3 : باستخدام هذه القيم الحالية والبيانات من الجدول ٢٠ – ٤ ، نجرى الحسابات الموضحة فى الجدول ٢٠ – ٥ لكل حالة i ، أكبر قيمة محسوبة هى $\hat{m}(i)$ لذلك تكون السياسة الجديدة هى

i	1	2	3
d_i	0	2	4

الخطوة 5, 4 : حيث أن هذه السياسة الجديدة تختلف عن السابقة فنطلق عليها ، السياسة الحالية ، ونعود إلى الخطوة 2 .

الخطوة 2 : للبيانات فى الأسطر 15, 8, 1 من الجدول ٢٠ - ٤ تعطى البيانات المناظرة لآخر سياسة (٢٠ - ٢) :

$$PV(1) = 165 + (0.934579)[(0.10)PV(1) + (0.20)PV(2) + (0.70)PV(3)]$$
$$PV(2) = 875 + (0.934579)[(0.30)PV(1) + (0.30)PV(2) + (0.40)PV(3)]$$
$$PV(3) = 1720 + (0.934579)[(0.60)PV(1) + (0.25)PV(2) + (0.15)PV(3)]$$

حيث تكافىء النموذج

$$(0.906542)PV(1) - (0.186916)PV(2) - (0.654206)PV(3) = 165$$
$$-(0.280374)PV(1) + (0.719626)PV(2) - (0.373832)PV(3) = 875$$
$$-(0.560748)PV(1) - (0.233645)PV(2) + (0.859813)PV(3) = 1720$$

ويكون حل هذه المعادلات هو

$PV(1) = \$14\,253$ دولار $PV(2) = \$14\,714$ دولار $PV(3) = \$15\,294$ دولار

الخطوة 3 : باستخدام هذه القيم الحالية والبيانات فى جدول ٢٠ - ٤ نجرى الحسابات الموضحة فى الجدول ٢٠ - ٦ ويتضح أن السياسة الجديدة هى

i	1	2	3
d_i	0	2	4

الخطوة 4 : حيث أن هذه السياسة الأخيرة تماثل السياسة الحالية ، فإنها تكون مثلى ، وإذا دخل المزارع مرحلة بمخزون 10 وحدات من الذرة فلا يجب توقيع عقد ؛ وإذا كان المخزون 11 وحدة ؛ فإنه يوقع عقداً لوحدتين ؛ وإذا كان المخزون 12 وحدة يجب توقيع عقداً لـ 4 وحدات .

٢٠ - ٧ تحدد إحدى المتاجر الكبيرة الربح الأسبوعى من كل فرع إما عالى أو منخفض . عندما يكون الربح من أحد الأفرع عالياً فى أى أسبوع فإن مدير الفرع يكون له الاختيار فى الاستمرار فى نفس السياسة أو إدخال سياسة جديدة . إذا إستمرت السياسة الحالية فإن الربح للأسبوع التالى سيصل إلى 8000 دولار باحتمال 0.5 ، وربح منخفض 4000 باحتمال 0.5 ، بالسياسة الجديدة يصل الربح عاليا إلى 7000 دولار بإحتمال 0.8 ومنخفضاً إلى 4000 دولار باحتمال 0.2 . وعندما تكون الأرباح لأى أسبوع منخفضة فإن مدير الفرع يجب أن يدخل سياسة جديدة ينتج عنها ربح عالٍ فى الأسبوع التالى 6000 دولار باحتمال 0.4 ، وربح منخفض 3000 دولار باحتمال 0.6 . حدد السياسة الملائمة للفرع التى تعظم الربح الأسبوعى المتوقع .

نأخذ بداية المرحلة لتكون نهاية أسبوع عمل ، وذلك بعد تحديد كل الأرباح ، ولكن قبل اتخاذ أى قرار حول السياسة التى ستتبع فى الأسبوع التالى . وتكون الحالات الممكنة لكل مرحلة هى الأرباح العالية والمنخفضة والتى نطلق عليها الحالة 2,1 على التوالى وتكون القرارات الممكنة هى ، إما الاستمرار فى السياسة الحالية أو إدخال سياسة حديدة ؛ ونطلق على هذه القرارات 2,1 على التوالى . وكلا القرارين ممكناً للحالة 1 ، ولكن القرار 2 فقط هو المسموح به للحالة 2 . تعتمد الاحتمالات الانتقالية والأرباح المتوقعة على كلٍ من الحالة والقرار ؛ وتوضح فى الجدول ٢٠ - ٧

جدول ٢٠ – ٧

	الحالة i	القرار d_i	الاحتمالات الانتقالية $p_{ij}(d_i)$		ربح مرتفع Π_1	ربح منخفض Π_2	الربح الاسبوعى المتوقع $C(i, d_i) = \sum_{j=1}^{2} p_{ij}\Pi_j$
			$j=1$	$j=2$			
1	1	1	0.5	0.5	8000	4000	(0.5)(8000) + (0.5)(4000) = 6000
2	1	2	0.8	0.2	7000	4000	(0.8)(7000) + (0.2)(4000) = 6400
3	2	2	0.4	0.6	6000	3000	(0.4)(6000) + (0.6)(3000) = 4200

هناك سياستين ممكنتين لهذه العملية :

i	1	2
$d_{(2)i}$	2	2

i	1	2
$d_{(1)i}$	1	2

نحصل على المصفوفة الانتقالية للسياسة الأولى من الأسطر 3,1 من الجدول ٢٠ – ٧ مثل

$$\mathbf{P}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة النهائية فى $\mathbf{P}_{(1)}$ هى

$$\mathbf{L}_{(1)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n_{(1)} = \begin{bmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

وبالتالى $\mathbf{X}^{(\infty)}_{(1)} = [4/9, 5/9]$ ، بصرف النظر عن الحالة الأولية للعملية ويكون العائد المتوقع كل أسبوع فى الحالة المستقرة هو

$$R_{(1)} = C(1, 1)x^{(\infty)}_{(1)1} + C(2, 2)x^{(\infty)}_{(1)2} = (6000)(\tfrac{4}{9}) + (4200)(\tfrac{5}{9}) = \$5000$$ دولار

ونحصل على المصفوفة الانتقالية للسياسة الثانية من الأسطر 3,2 من الجدول ٢٠ – ٧ مثل

$$\mathbf{P}_{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة النهائية لهذه المصفوفة الإنتقالية هى

$$\mathbf{L}_{(2)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n_{(2)} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $\mathbf{X}^{(\infty)}_{(2)} = [2/3, 1/3]$. ويكون الربح المتوقع لكل أسبوع فى الحالة المستقرة هو

$$R_{(2)} = C(1, 2)x^{(\infty)}_{(2)1} + C(2, 2)x^{(\infty)}_{(2)2} = (6400)(\tfrac{2}{3}) + (4200)(\tfrac{1}{3}) = \$5666.67$$ دولار

الربح الأسبوعى المتوقع للسياسة 2 أحسن من السياسة 1 ؛ لذلك فإن السياسة 2 تكون هى الأمثل . ويجب أن يدخل مدير الفرع سياسة جديدة كل أسبوع .

٢٠ – ٨ حل المسألة ٢٠ – ٧ بطريقة الست خطوات .

الخطوة 1 : مثل السياسة الأولية $\{\bar{d}_i\}$ ، أختار السياسة $\{d_{(1)i}\}$ للمسألة ٢٠ –٧ .

الخطوة 2 : نحصل على المصفوفة الانتقالية والعائد الأسبوعى المتوقع المرتبط بهذه السياسة من الأسطر 3,1 للجدول ٢٠ – ٧ مثل

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad C(1, 1) = 6000 \qquad C(2, 2) = 4200$$

الخطوة 3 : بهذه البيانات يصبح النموذج (٢٠ – ٣)

$$w_1 + R = 6000 + (0.5)w_1 + (0.5)w_2$$
$$w_2 + R = 4200 + (0.4)w_1 + (0.6)w_2$$

بوضع $w_1 = 0$ والحل ، نحصل على $R = 5000,\ w_2 = -2000$

جدول ٢٠ – ٨

الحالة i	القرار d_i	$C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(d_i)w_j$
1	1	$6000 + (0.5)(0) + (0.5)(-2000) = 5000$
1	2	$6400 + (0.8)(0) + (0.2)(-2000) = 6000$
2	2	$4200 + (0.4)(0) + (0.6)(-2000) = 3000$

الخطوة 4 : باستخدام هذه القيم لـ w_1 ، w_2 مع البيانات من الجدول ٢٠ – ٧ نجرى عملية التعظيم الموضحة فى (٢٠ – ٤) . انظر الجدول ٢٠ – ٨ الذى يبين السياسة الجديدة لتكون

i	1	2
$\bar{d}_i$	2	2

الخطوة 5, 6 : حيث أن هذه السياسة الأخيرة تختلف عن الحالية ، لذلك نجعل هذه السياسة هى السياسة الحالية المعدلة ونعود للخطوة 2 .

الخطوة 2 : نحصل على المصفوفة الانتقالية والربح المتوقع لهذه السياسة الجديدة من الأسطر 3,2 للجدول ٢٠ – ٧ مثل

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \qquad C(1, 2) = 6400 \qquad C(2, 2) = 4200$$

الخطوة 3 : بهذه البيانات تصبح (٢٠ – ٣)

$$w_1 + R = 6400 + (0.8)w_1 + (0.2)w_2$$
$$w_2 + R = 4200 + (0.4)w_1 + (0.6)w_2$$

بوضع $w_1 = 0$ والحل ، نحصل على $R = 5666.67,\ w_2 = -3666.67$

جدول ٢٠ - ٩

الحالة i	القرار d_i	$C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(d_i) w_j$
1	1	$6000 + (0.5)(0) + (0.5)(-3666.67) = 4166.67$
1	2	$6400 + (0.8)(0) + (0.2)(-3666.67) = 5666.67$
2	2	$4200 + (0.4)(0) + (0.6)(-3666.67) = 2000.00$

الخطوة 4 : باستخدام هذه القيم لـ w_1 ، w_2، مع البيانات من الجدول ٢٠ - ٧ ، نوجد الجدول ٢٠ - ٩ . وتكون السياسة الجديدة هى :

i	1	2
$\bar{d}_i$	2	2

الخطوة 5 : حيث أن هذه السياسة الأخيرة تماثل السياسة الحالية فتكون هى المثلى . ويكون الربح الأسبوعى المتوقع فى الحالة المستقرة لهذه السياسة هو $R = \$5666.67$ ويعطى من المحاولة الأخيرة للخطوة 3 .

٢٠ - ٩ حل المسألة ٢٠ - ٦ إذا كان الهدف هو تعظيم الربح المتوقع فى السنة (فى الحالة المستقرة) .

الخطوة 1 : نختار السياسة الأولية

i	1	2	3
$\bar{d}_i$	0	2	4

الخطوة 2 : باستخدام البيانات فى الأسطر 15,8,1 من الجدول ٢٠ - ٤ ، وهى البيانات المتعلقة بالسياسة الحالية ، نجد أن

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.20 & 0.70 \\ 0.30 & 0.30 & 0.40 \\ 0.60 & 0.25 & 0.15 \end{bmatrix} \qquad C(1,0) = 165 \qquad C(2,2) = 875 \qquad C(3,4) = 1720$$

الخطوة 3 : بهذه البيانات تصبح (٢٠ - ٣)

$$\begin{aligned} w_1 + R &= 165 + (0.10)w_1 + (0.20)w_2 + (0.70)w_3 \\ w_2 + R &= 875 + (0.30)w_1 + (0.30)w_2 + (0.40)w_3 \\ w_3 + R &= 1720 + (0.60)w_1 + (0.25)w_2 + (0.15w_3) \end{aligned}$$

بوضع $w_1 = 0$ والحل بالنسبة للمتغيرات الأخرى نجد أن $R = 967.340,\ w_2 = 449.645,$ $w_3 = 1017.73$

الخطوة 4 : باستخدام هذه القيم للمتغيرات w_1, w_2: مع البيانات فى الجدول ٢٠ – ٤ نوجد الجدول ٢٠ – ١٠ وتكون السياسة .

i	1	2	3
$\bar{d}_i$	0	2	4

جدول ٢٠ – ١٠

الحالة i	القرار d_i	$C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{3} p_{ij}(d_i)w_j$
1	0	165 + (0.10)(0) + (0.20)(449.645) + (0.70)(1017.73) = 967.34
1	1	375 + (0.30)(0) + (0.30)(449.645) + (0.40)(1017.73) = 916.99
1	2	620 + (0.60)(0) + (0.25)(449.645) + (0.15)(1017.73) = 885.07
1	3	700 + (0.85)(0) + (0.15)(449.645) + (0)(1017.73) = 767.45
1	4	705 + (1)(0) + (0)(449.645) + (0)(1017.73) = 705.00
2	0	375 + (0)(0) + (0.10)(449.645) + (0.90)(1017.73) = 1335.92
2	1	565 + (0.10)(0) + (0.20)(449.645) + (0.70)(1017.73) = 1367.34
2	2	875 + (0.30)(0) + (0.30)(449.645) + (0.40)(1017.73) = 1416.99
2	3	1120 + (0.60)(0) + (0.25)(449.645) + (0.15)(1017.73) = 1385.07
2	4	1300 + (0.85)(0) + (0.15)(449.645) + (0)(1017.73) = 1367.45
3	0	645 + (0)(0) + (0)(449.645) + (1)(1017.73) = $1662.73
3	1	775 + (0)(0) + (0.10)(449.645) + (0.90)(1017.73) = 1735.92
3	2	1065 + (0.10)(0) + (0.20)(449.645) + (0.70)(1017.73) = 1867.34
3	3	1375 + (0.30)(0) + (0.30)(449.645) + (0.40)(1017.73) = 1916.99
3	4	1720 + (0.60)(0) + (0.25)(449.645) + (0.15)(1017.73) = 1985.07

الخطوة 5 : حيث أن هذه السياسة تماثل السياسة الحالية ، فتكون السياسة المثلى ، بربح سنوى متوقع معطى فى الخطوة 3 دولار $R = \$967.34$ وبالتطابق ، فإن هذه السياسة المثلى تماثل السياسة التى حصلنا عليها فى المسألة ٢٠ – ٦ ، حيث يكون الربح المتوقع أكبر ما يمكن . وعموماً ، فإن الأهداف المختلفة ينتج عنها سياسات مثلى مختلفة .

٢٠ – ١٠ باستخدام بيانات المسألة ٢٠ –٧ ، حدد w_1 للأسابيع n الأولى $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. تحت السياسة

كما هو واضح فى المسألة ٢٠ – ٧ فإن المصفوفة الانتقالية للسياسة المعطاة

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

وتكون القوى المتتالية فى $\mathbb{P}$ هى

$$\mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.44 & 0.56 \end{bmatrix} \quad \mathbb{P}^3 = \begin{bmatrix} 0.445 & 0.555 \\ 0.444 & 0.556 \end{bmatrix} \quad \mathbb{P}^4 = \begin{bmatrix} 0.4445 & 0.5555 \\ 0.4444 & 0.5556 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^5 = \begin{bmatrix} 0.44445 & 0.55555 \\ 0.44444 & 0.55556 \end{bmatrix} \quad \cdots$$

والتى تقترب من

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 4/9 & 5/9 \\ 4/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

ويكون الربح المتوقع فى الأسبوع فى الحالة المستقرة

$$R = (6000)(\tfrac{4}{9}) + (4200)(\tfrac{5}{9}) = \$5000$$

وإذا بدأت العملية بالحالة 1 ، فإن $\mathbf{X}^{(0)} = [1, 0]$ ، يتبع ذلك من (١٩ – ١) أن

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(0)}\mathbf{P}^n = [1, 0]\begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} \end{bmatrix} = [p_{11}^{(n)}, p_{12}^{(n)}]$$

عند $n = 0, 1, 2 \ldots$ حيث نعرف $p_{11}^{(0)} = 1,\ p_{12}^{(0)} = 0$. ويكون العائد المتوقع للأسبوع رقم $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

هو $C(1,1)x_1^{(n-1)} + C(2,2)x_2^{(n-1)} = 6000p_{11}^{(n-1)} + 4200p_{12}^{(n-1)}$

وحيث أن العائد المتوقع للأسابيع n الأولى ، هو العائد المتوقع للأسابيع $n - 1$ مضافاًإليه العائد المتوقع للأسبوع رقم n عند $n = 1, 2, 3, \ldots,$ فنحصل على

$$w_n(1) = w_{n-1}(1) + 6000p_{11}^{(n-1)} + 4200p_{12}^{(n-1)} \qquad (١)$$

حيث $w_0(i) = 0$. من (١) نوجد الجدول ٢٠ – ١١ . ويبين العمود الأخير من الجدول أن w_1 تقترب من $1111\tfrac{1}{9}$. بدقة عددين عشريين ، $w_1 = 1111.11$ لكل قيم n الأكبر من 5 .

جدول ٢٠ – ١١

n	$p_{11}^{(n-1)}$	$p_{12}^{(n-1)}$	$6000p_{11}^{(n-1)} + 4200p_{12}^{(n-1)}$	$w_{n-1}(1)$	$w_n(1)$	nR	$w_1 = w_n(1) - nR$
1	1	0	6000	0	6 000	5 000	1000
2	0.5	0.5	5100	6 000	11 100	10 000	1100
3	0.45	0.55	5010	11 100	16 110	15 000	1110
4	0.445	0.555	5001	16 110	21 111	20 000	1111
5	0.4445	0.5555	5000.1	21 111	26 111.1	25 000	1111.1
6	0.44445	0.55555	5000.01	26 111.1	31 111.11	30 000	1111.11
7	0.444445	0.555555	5000.001	31 111.11	36 111.111	35 000	1111.111
8	0.4444445	0.5555555	5000.0001	36 111.111	41 111.1111	40 000	1111.1111

٢٠ – ١١ إشتق (٢٠ – ٣)

دع $\mathbf{P} = [p_{ij}(\hat{d}_i)]$ لتكون المصفوفة الانتقالية لعملية قرار ماركوف بأفق غير محدود ، فى ظل السياسة $\{\hat{d}_i\}$. والعائد المتوقع بدون خصم للعملية خلال فترات n ، إذا بدأت العملية بالحالة i هو العائد المتوقع من الفترة الأولى $C(i, \hat{d}_i)$, مضافاً إليه العائد المتوقع من الفترات $n - 1$ الباقية :

$$w_n(i) = C(i, \hat{d}_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(\hat{d}_i) w_{n-1}(j) \qquad (١)$$

بطرح

$$nR = R + \sum_{j=1}^{N} (n-1)Rp_{ij}(\hat{d}_i)$$

من (١) نحصل على

$$w_n(i) - nR = C(i, \hat{d}_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(\hat{d}_i) w_{n-1}(j) - R - \sum_{j=1}^{N} (n-1)Rp_{ij}(\hat{d}_i)$$

أو

$$[w_n(i) - nR] + R = C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(d_i)[w_{n-1}(j) - (n-1)R] \quad (٢)$$

وحيث أن $w_i = w_n(i) - nR$ وحيث أن :

$$w_j = w_n(j) - nR \approx w_{n-1}(j) - (n-1)R$$

إذا كانت n كبيرة (أنظر المسألة ٢٠ – ١٠) ، فتكون (٢) مكافئة لـ (٢٠ – ٣) لكل قيم $(i = 1, 2, \ldots, N)$ i

٢٠ – ١٢ بين أنه إذا كانت $w_1^*, w_2^*, \ldots, w_N^*, R^*$ هى حل النموذج (٢٠ – ٣) ويكون كذلك أيضاً $w_1^* + k, w_2^* + k,$ $\ldots, w_N^* + k, R^*$. ، لأى ثابت k

$$[(w_i^* + k) + R^*] - \left[C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(d_i)(w_j^* + k)\right] = [(w_i^* + k) + R^*] - \left[C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(d_i)w_j^* + k\right]$$
$$= [w_i^* + R^*] - \left[C(i, d_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(d_i)w_j^*\right]$$
$$= 0$$

اختيار $k = -w_1^*$ يحقق جعل w_1 مساوية للصفر فى الخطوة 3 فى طريقة الست خطوات . وحقيقة أن w_i ، ومن ثم $w_n(i)$. تحدد فقط الى حد ثابت يضاف k ليس له معنى إقتصادى بالنسبة للهدف ، كونة يكافىء تماماً عائد ثابت إضافى k دولار بالنسبة لمتخذ القرار قبل أن تبدأ العملية . وهذا يمكن ألا يكون له أى تأثير على السياسة المثلى [لاحظ أن الأمثلية فى (٢٠ – ٤) ليست متأثرة بإحلال $w_i \to w_i + k$] أو أى تأثير على العائد الأمثل للفترة فى الحالة المستقرة (حيث توزع k دولار على فترات لانهائية) .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٢٠ – ١٣ يعطى العائد p (بالدولار) الذى يتسلمه مزارع دواجن من كل دجاجة ترسل إلى السوق هو

$$P = 1 - (0.9)^{N^2}$$

حيث تمثل N عمر الدجاجة بالأسبوع . وترسل الدواجن إلى السوق مرة واحدة فى نهاية كل الأسبوع ، ويحل محلها كتاكيت مولودة حديثاً من التفريخ . وليس هناك سوق للكتاكيت التى عمرها أقل من أسبوع واحد . بيّن أنه ليس من المربح ، أن يحتفظ المزارع بالدجاج لأكثر من خمسة أسابيع ، ثم حدد أحسن عمر لتسويقه ، إذا كان هدف المزارع هو تعظيم الربح الكلى مع الخصم بمعدل فائدة فعلى 9 فى المئة كل سنة .

٢٠ – ١٤ تحدد إحدى المؤسسات الكبرى 2 وحدة من النقود كل سنة تمويل أعمال الخير ، توزع بواسطة مدير المؤسسة فى صورة معونات (بالوحدة) على المنظمات . وحيث أن المعونات الكبيرة تحقق أعمال خير أكثر للمؤسسة من المعونات الصغيرة فإن رئيس المؤسسة لا يحتاج إلى توزيع المعونات سنوياً ، بل يحتفظ بالوحدات النقدية لسنة واحدة أو أكثر لتجميع الأموال اللازمة للمعونات الكبيرة . ومع ذلك لا تسمح سياسة المؤسسة أن تزيد ميزانية أعمال الخير عن خمس وحدات نقدية ، حيث إنه عند هذا المستوى فإن هذه الأموال تحتاج إلى مصروفات أخرى من داخل قطاعات المؤسسة . حدد سياسة المعونات التى تعظم قيمة أعمال الخير مع الخصم بمعدل فائدة 6 فى المئة سنوياً ، إذا كان العائد من كل معونة كالتالى .

قيمة المعونة بالوحدة	0	1	2	3	4	5
قيمة اعمال الخير بالوحدة	0	1	2.1	3.3	4.5	5.6

٢٠ – ١٥ تتكلف إحدى الماكينات 7000 دولار وهى جديدة ، وطبقاً لسياسة الشركة فلا يحتفظ بها لأكثر من سنتين . فى بداية كل سنة يجب أن يتخذ قرار ما إذا كان « الاحتفاظ » بالماكينة الحالية (إذا لم تكن قديمة جداً) أو « شراء » « ماكينة أخرى ، أو « تأجير » ماكينة جديدة . ويكون التأجير لمدة سنتين ، ومع ذلك يمكن إنهاؤه بعد سنة واحدة بدفع 700 دولار غرامة ، وتعتمد مصروفات التشغيل ، وثمن إعادة البيع ، ومصروفات التأجير للماكينة على عمرها ، كما فى الجدول ٢٠ – ١٢

جدول ٢٠ – ١٢

	العمر		
	0	1	2
مصروفات التشغيل	$500	1000	···
اعادة البيع	···	4500	4000
مصروفات التأجير	1700	1600	··

الماكينات المؤجرة ليس لها ثمن إعادة بيع حيث أن شركة التأجير تمتلكها . حدد سياسة إحلال للماكينات التى تجعل التكلفة الكلية مع الخصم أقل ما يمكن بأفق غير محدود ، بمعدل فائدة 7.5 فى المئة سنوياً .

٢٠ – ١٦ إثبت أن النموذج (٢٠ – ٢) هو فقط الذى يحدد $PV(1), PV(2), \ldots, PV(N)$

٢٠ – ١٧ حدد $PV(i)$ لكل حالة i من العملية الغير محدودة الموضحة فى المسألة ٢٠ – ٦ فى ظل السياسة

i	1	2	3
d_i	0	1	2

٢٠ – ١٨ طبق محاولة واحدة من الطريقة ذات الخمس خطوات على المسألة ٢٠ – ٦ باستخدام السياسة الأولية المعطاة فى المسألة ٢٠ – ١٧ . ما هى السياسة المعدلة الناتجة ؟

٢٠ – ١٩ تقدر إحدى ماكينات زجاجات اللبن البلاستيك فى نهاية كل وردية بأنها كانت فى ظروف تشغيل جيدة (الحالة 1) ، فى ظروف تشغيل مقبولة (الحالة 2) ، فى ظروف تشغيل رديئة (الحالة 3) ، وتحسب الأجرة بناءً على نسبة الزجاجات الغير مستعملة التى صنعت أثناء الوردية . يمكن إعادة ضبط الماكينة بين الورديات بتكلفة 50 دولار ، حيث تبدأ الوردية التالية بالحالة 1 . واحتمال أن تظل الماكينة على الحالة i من بداية الوردية حتى نهايتها تعطى بالجدول التالى :

i	1	2	3
p_{ii}	0.8	0.5	1

وإذا لم تبق الماكينة فى حالة محددة ، فإنها تسوء إلى الحالة التالية . والتكلفة المتوقعة للزجاجات الغير مستعملة للوردية الكاملة تكون دالة فى حالة الماكينة فى بداية المرحلة .

الحالة	1	2	3
التكلفة المتوقعة	$10	$40	$100

حدد سياسة مثلى لضبط الماكينة تجعل تكلفة الضبط المتوقعة أقل مايمكن بأفق غير محدود ، علماً بأن $\alpha = 0.95$

٢٠ - ٢٠ يطلب أحد محلات قطع غيار السيارات شكمانات سيارات كل أسبوع ويتسلمها مساء كل يوم سبت للبيع فى الأسبوع التالى . وعند طلب الشكمانات تكون تكلفة النقل 30 دولاراً ، بصرف النظر عن العدد ، وإذا لم تطلب شكمانات فإنه لا تكون هناك تكلفة تسليم . وتحدد المساحة المتاحة لطاقة المحل بتخزين أربعة شكمانات فقط . وتقدر تكلفة التخزين لكل شكمان لم يُبَع بـ 9 دولارات فى الأسبوع ، والاحتياج من الشكمانات عشوائياً بالتوزيع الاحتمالى التالى

الاحتياج الاسبوعى	0	1	2	3
الاحتمال	0.3	0.4	0.2	0.1

ويخسر المخزن 23 دولار إذا طلب أحد العملاء شكماناً ولم يكن موجوداً فى المخزن . حدد سياسة الطلب المثلى للمخزن التى تجعل التكلفة المتوقعة مع الخصم أقل ما يمكن بالأفق الغير محدود ، إذا كانت $\alpha = 0.98$

٢٠ - ٢١ طبق محاولة واحدة لطريقة الست خطوات لتعظيم العائد المتوقع فى السنة للعملية المعطاة بالمسألة ٢٠ - ٦ باستخدام السياسة الأولية المعطاة فى المسألة ٢٠ - ١٧ . ما هى السياسة المعدلة ؟

٢٠ - ٢٢ حل المسألة ٢٠ - ٢٠ إذا كان الهدف هو تصغير التكلفة الأسبوعية المتوقعة إلى أقل ما يمكن .

٢٠ - ٢٣ ينشر تقييم أحد برامج التليفزيون أسبوعياً ويستخدم هذا التقييم فى وضع رسوم الاعلانات للأسبوع التالى طبقاً للجدول التالى :

التقييم بالنقط	15	16	17	18	19
رسوم الاعلان بالوحدة	10	11	12	14	16

وأى برنامج يقَّيم بأقل من 15 نقطة يحذف من شبكة البرامج ويستبدل ببرنامج جديد ، حيث يتوقع أن تحقق مبدئياً 17 نقطة . ولم يحقق أى برنامج أكثر من 19 نقطة . وفى كل أسبوع قد لا تفعل الادارة أى شىء للبرنامج (بدون تكلفة) أو تعطية درجة إضافية (بتكلفة 0.7 نقطة) . ويعطى جدول ٢٠ - ١٣ و٢٠ - ١٤ التوزيع الاحتمالى لرسوم الأسابيع التالية المناظر للنقطتين على التوالى .

جدول ٢٠ - ١٣

آخر رسوم	15	16	17	18	19
احتمال ابقاء الرسوم	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9
احتمال فقد نقطة	0.6	0.4	0.2	0.2	0.1
احتمال فقد نقطتين	0	0.1	0.2	0	0

جدول ٢٠ - ١٤

آخر رسوم	15	16	17	18	19
احتمال كسب نقطة	0.1	0.3	0.2	0.1	0
احتمال ابقاء الرسوم	0.6	0.6	0.7	0.8	0.9
احتمال فقد نقطة	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1

حدد سياسة اتخاذ قرار للإدارة تعظم العائد المتوقع لكل أسبوع من عروض التليفزيون التى تقدمها .

الفصل الواحد والعشرون

عمليات الميلاد والموت لماركوف
Markovian Birth-Death Processes

عمليات نمو المجتمع POPULATION GROWTH PROCESSES

« المجتمع » هو مجموعة من المواد أو الأجسام لها خاصية مشتركة . ومن أمثلة ذلك الأفراد المتأثرين بحدث معين ، والعربات المنتظرة أمام المحلات الكبيرة ، والمخزونات فى متجر كبير . ويتعلق عدد كبير من عمليات القرارات بالتحليل والتحكم فى نمو المجتمع .

يعرف عدد الأعضاء فى مجتمع معين فى الوقت t ، بـ $N(t)$. « وحالات » عملية النمو هى القيم المختلفة التى تأخذها $N(t)$ ؛ ودائماً ما تكون قيماً لاسلبية صحيحة . واحتمال أن $N(t)$ تساوى عدداً صحيحاً لاسلبى n هو $p_n(t)$.

ويحدث « الميلاد » عندما ينضم عضو جديد للمجتمع ؛ ويحدث « الموت » عندما يترك أحد الأعضاء المجتمع . « وعملية الميلاد المطلقة » هى العملية التى تتعامل مع الميلاد فقط وبدون موت ؛ « وعملية الموت المطلقة » هى العملية التى تتعامل مع الموت فقط بدون ميلاد .

مثال ٢١ - ١ تعلن إحدى الكليات عن وظيفة ما بالكلية بموعد محدد لقفل باب تسليم طلبات الوظيفة المعلنة ، وإذا لم يكن هناك أى اجراءات حتى انتهاء موعد قبول الطلبات ، ولا تسحب الطلبات المقدمة من المتقدمين ، فإن عملية استلام الطلبات تكون عمليات ميلاد مطلقة حتى تاريخ قفل باب التقديم . وإذا لم تقبل أى طلبات بعد قفل باب التقديم ، فإن عملية تخفيض العدد المتقدم بعد التقييم والحذف هى عملية موت مطلقة ، وإذا تمت إجراءات على الطلبات المقدمة فى نفس فترة التقديم ، فإن العملية تكون عملية ميلاد وموت . وفى جميع الحالات يكون المجتمع هو مجموعة الطلبات تحت الاعتبار .

تعريف : الدالة $f(t)$ هى $o(\Delta t)$ وتقرأ o الصغيرة من Δt إذا كانت

$$\text{نها}_{\Delta t\to 0} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

وتؤول هذه الدالة إلى الصفر بمعدل أسرع من القوة الأولى لها . إذا كانت $f(t)$ ، $g(t)$ كل منهما $o(\Delta t)$ فتكون كذلك

$f(t)+g(t)$ و $f(t)g(t)$

مثال ٢١ - ٢ الدالة $f(t)=t^3$ هى $o(\Delta t)$ ، حيث إن

$$\text{نها}_{\Delta t\to 0} \frac{(\Delta t)^3}{\Delta t}=\text{نها}_{\Delta t\to 0} (\Delta t)^2=0$$

ولكن $\sin t \neq o(\Delta t)$ ، لأن

$$\text{نها}_{\Delta t\to 0} \frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}=1\neq 0$$

عمليات الميلاد والموت العامة لماركوف GENERALIZED MARKOVIAN BIRTH-DEATH PROCESSES

تكون عملية نمو المجتمع هى عملية ماركوف (انظر الفصل ١٩) إذا كانت الاحتمالات الانتقالية للانتقال من حالة إلى أخرى تعتمد على الحالة الحالية فقط ، وليس على أى خبرة سابقة للعملية أدت إلى الوصول إلى هذه الحالة الحالية . وأكثر تحديداً .. فإن عمليات الميلاد والموت العامة لماركوف تحقق التالى :

التوزيعات الاحتمالية التى تحكم عدد الميلاد والموت فى فترة زمنية معينة تعتمد على طول هذه الفترة ، وليس على نقطة بدايتها .

احتمال ميلاد واحد بالضبط فى فترة زمنية محددة طولها Δt بمعرفة مجتمع له عدد أعضاء n فى بداية الفترة هو $\lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$ ، حيث إن λ_n يكون ثابتاً ، وربما يختلف باختلاف قيم n .

واحتمال موت واحد بالضبط فى فترة زمنية محددة طولها Δt بمعرفة مجتمع له عدد أعضاء n فى بداية الفترة هو $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$ ، حيث إن μ_n يكون ثابتاً ، ربما يختلف باختلاف قيم n .

واحتمال أكثر من ميلاد وأكثر من موت فى فترة زمنية طولها Δt هو فى كلتا الحالتين $o(\Delta t)$.

وهذه الخاصية تتضمن ، فى النهاية عندما تقترب Δt من الصفر ، معادلات كولموجوروف لاحتمالات الحالات :

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \qquad (١ - ٢١)$$

انظر المسألة (٢١ - ٦)

عمليات الميلاد الخطية لماركوف LINEAR MARKOVIAN BIRTH PROCESSES

عملية الميلاد الخطية لماركوف هى عملية ميلاد مطلقه لماركوف يكون فيها احتمال الميلاد فى فترة زمنية صغيرة متناسباً مع عدد أعضاء المجتمع الحاليين ومع طول الفترة الزمنية . بمعنى ، لكل n ، $\mu_n = 0$ ، $\lambda_n = n\lambda$ يكون ثابت النسبة والتناسب λ هو معدل الميلاد « أو » معدل الوصول ، ويكون حل (٢١ - ١) للمجتمع الأولى ذا عضو واحد هو

$$p_n(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} e^{-\lambda t} & (n = 1, 2, \ldots) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$$

ويكون الحجم المتوقع للمجتمع عند الزمن t هو $E[N(t)] = e^{\lambda t}$. وإذا بدأ المجتمع بعدد أعضاء $N(0)$ ، فيكون حجمه المتوقع عند الزمن t هو

$$E[N(t)] = N(0)e^{\lambda t} \qquad (٣ - ٢١)$$

(انظر المسألة ٢١ - ١)

عمليات الموت الخطية لماركوف LINEAR MARKOVIAN DEATH PROCESSES

عملية الموت الخطية لماركوف هى عملية موت مطلقة لماركوف يكون فيها احتمال الموت فى فترة زمنية صغيرة متناسباً مع عدد أعضاء المجتمع الحاليين ، ومع طول الفترة الزمنية ، بمعنى لكل n ، $\lambda_n = 0$ ، $\mu_n = n\mu$ يكون ثابت النسبة والتناسب μ هو معدل الموت . ويكون حل (٢١ - ١) للمجتمع الأولى ذا $N(0)$ هو

$$p_n(t) = \begin{cases} \binom{N(0)}{n} e^{-n\mu t}(1-e^{-\mu t})^{N(0)-n} & [n \le N(0)] \\ 0 & [n > N(0)] \end{cases} \quad (٢١ - ٤)$$

ويكون الحجم المتوقع للمجتمع عند الزمن t هو

$$E[N(t)] = N(0)e^{-\mu t} \quad (٢١ - ٥)$$

(انظر المسألة ٢١ - ٣)

عمليات الميلاد والموت الخطية لماركوف LINEAR MARKOVIAN BIRTH-DEATH PROCESSES

عملية الميلاد والموت الخطية لماركوف هى عملية ميلاد وموت لماركوف يكون فيها لكل n ، $\lambda_n = n\lambda$ ، $\mu_n = n\mu$. ويكون حل (٢١ - ١) لمجتمع مبدئى له عضو واحد هو

$$p_n(t) = \begin{cases} [1-r(t)][1-s(t)][s(t)]^{n-1} & (n = 1, 2, \ldots) \\ r(t) & (n = 0) \end{cases} \quad (٢١ - ٦)$$

حيث إن

$$r(t) \equiv \frac{\mu[e^{(\lambda-\mu)t}-1]}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu} \quad \text{و} \quad s(t) \equiv \frac{\lambda[e^{(\lambda-\mu)t}-1]}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu}$$

ويكون حجم المجتمع المتوقع فى الزمن t هو $E[N(t)] = e^{(\lambda-\mu)t}$ وإذا بدأ المجتمع بعدد أعضاء $N(0)$ ، فإن حجمه المتوقع عند الزمن t هو

$$E[N(t)] = N(0)e^{(\lambda-\mu)t} \quad (٢١ - ٧)$$

(انظر المسألة ٢١ - ٥)

من الواضح أن عملية الميلاد والموت الخطية تتضمن عملية الميلاد الخطية وعملية الموت الخطية فى الحالات الخاصة $\mu = 0$ ، $\lambda = 0$ على التوالى ، وخاصية هامة أخرى مقترحة فى (٢١ - ٧) موضحة فى الملاحظة التالية [انظر المسألة ٢١ - ٩ (ب)] .

ملاحظة : أى عملية ميلاد وموت خطية لماركوف لها البارامترات λ ، μ ومجتمع مبدئى $N(0)$ ، تكافىء مجموع عمليات تحدث فى نفس الوقت ، ولكنها مستقلة عددها $N(0)$ لكل منها بارامترات λ ، μ ومجتمع مبدئى له عدد 1.

مثال ٢١ – ٣ أوجد احتمالات الحالات $p_n^{(2)}(t)$ لعملية الميلاد والموت الخطية لماركوف ، مبتدئاً بمجتمع 2 .

لكل من العمليتين الفرعيتين المستقلتين الاحتمالات الانتقالية المعطاة فى (٢١ – ٢) . وتكون العملية بالكامل فى الحالة n إذا كانت العملية الفرعية فى الحالة 0 ، والعملية الفرعية الثانية فى الحالة n ، أو إذا كانت الأولى فى الحالة 1 ، والثانية فى الحالة $n-1$ ، أو ... لذلك فإن

$$p_n^{(2)}(t) = p_0(t)p_n(t) + p_1(t)p_{n-1}(t) + \cdots + p_n(t)p_0(t) \qquad (٢١ - ٨)$$

باستخدام (٢١ – ٢) فى (٢١ – ٨) نجد أن

$$p_n^{(2)}(t) = \begin{cases}(n-1)(1-e^{-\lambda t})^{n-2}e^{-2\lambda t} & (n = 2, 3, \ldots) \\ 0 & (n = 0, 1)\end{cases}$$

عمليات الميلاد لبواسون POISSON BIRTH PROCESSES

عملية الميلاد لبواسون هى عملية ميلاد مطلقة لماركوف يكون فيها احتمال الميلاد فى أى فترة زمنية صغيرة مستقل عن حجم المجتمع ، بمعنى ، لكل قيم n ، $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = 0$. وفى هذه العملية نجد أن الأعضاء الجدد للمجتمع لا يتواجدون بواسطة الأعضاء الحاليين ؛ وفضلاً عن ذلك .. فإنهم يدخلون إلى المجتمع من الخارج ، كما فعل المتقدمون بطلبات فى المثال ٢١ –١ . ويمكن للأعضاء الجدد دخول المجتمع حتى عندما تكون الحالة الحالية 0 ، وهذا هو اختلاف ملحوظ عن حالة الميلاد الخطية لماركوف .

حل (٢١ – ١) للمجتمع المبدئى 0 هو

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (٢١ - ٩)$$

وإذا بدأ المجتمع بأعضاء $N(0)$ ، فإن حل (٢١ – ١) يكون

$$p_n(t) = \begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{n-N(0)}e^{-\lambda t}}{[n-N(0)]!} & [n \ge N(0)] \\ 0 & [n < N(0)]\end{cases} \qquad (٢١ - ١٠)$$

ويكون حجم المجتمع المتوقع عند الزمن t هو

$$E[N(t)] = N(0) + \lambda t \qquad (٢١ - ١١)$$

(انظر المسألة ٢١ – ٢)

تعريف : يكون للمتغير العشوائى المنفصل N توزيع بواسون ، ببارامتر $\alpha \ge 0$ ، إذا كان

$$P(N = n) = \frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (٢١ - ١٢)$$

وتكون القيمة المتوقعة لـ N هى $E(N) = \alpha$

تعريف : يكون للمتغير العشوائى المتصل T توزيع أسى بارامیتر $\beta \geq 0$ إذا كان

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\beta t} \qquad (t \geq 0) \tag{١٣ - ٢١}$$

القيمة المتوقعة لـ T هى $E(T) = 1/\beta$

يمكن تلخيص (٢١ - ٩) ، (٢١ - ١٠) بالقول أنه فى عملية الميلاد ذات التوزيع بواسون بمعدل ميلاد λ. ، فإن $N(t) - N(0)$ يكون لها توزيع بواسون ببارامیتر λt. ، وبالإضافة إلى ذلك .. فإنه فى هذه العملية يكون « الزمن بين الوصول » وهو الزمن بين كل ميلادين متتاليين ، يكون له توزيع أسى بقيمة متوقعة $1/\lambda$ (انظر المسألة ٢١ - ٨) وبالعكس :

النظرية ٢١ - ١ : إذا كان الزمن بين الوصول له توزيع أسى بقيمة متوقعة $1/\beta$ ، فإن عدد مرات الوصول تكون عملية ميلاد ذات توزيع بواسون بمعدل ميلاد $\lambda = \beta$

عمليات الموت لبواسون POISSON DEATH PROCESSES

عملية الموت لبواسون هى عملية موت مطلقة لماركوف يكون فيها احتمال الموت فى فترة زمنية صغيرة ، مستقلاً عن حجم المجتمع ، بمعنى ، لكل قيم n ، $\lambda_n = 0$ ، $\mu_n = \mu$. ويكون حل (٢١ - ١) للمجتمع المبدئى $N(0)$ هو :

$$p_n(t) = \begin{cases} 0 & [n > N(0)] \\ \dfrac{(\mu t)^{N(0)-n} e^{-\mu t}}{[N(0)-n]!} & [1 \leq n \leq N(0)] \\ 1 - \sum\limits_{n=1}^{N(0)} p_n(t) & (n = 0) \end{cases} \tag{١٤ - ٢١}$$

انظر المسألة (٢١ - ٤)

عمليات الميلاد والموت لبواسون POISSON BIRTH-DEATH PROCESSES

عملية الميلاد والموت لبواسون هى عملية ميلاد وموت لماركوف ، يكون فيها احتمال كلًا من الميلاد والموت فى أى فترة زمنية قصيرة مستقلاً عن حجم المجتمع ، بمعنى ، لكل قيم n ، $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = \mu$. وتكون هذه العمليات أساس نظرية الصفوف التى ستشرح فى الفصل ٢٣ .

مسائل محلولة

Solved Problems

٢١ - ١ بدأت عملية ميلاد خطية لماركوف عند أحد الأعضاء الذى لاق متوسط معدل ميلاد كل ساعة $\lambda = 2$. حدد احتمال أن يكون المجتمع أكبر من 3 بعد ساعة واحدة ، وحجم المجتمع عند ذلك الوقت .

عند $\lambda = 2$ ميلاد جديد للعضو فى الساعة وعند ساعة $t = 1$ ، فإن (٢١ - ٢) تعطى

$$p_0(1) = 0 \qquad p_2(1) = (1 - e^{-2})^1 e^{-2} = 0.117$$

$$p_1(1) = (1 - e^{-2})^0 e^{-2} = 0.135 \qquad p_3(1) = (1 - e^{-2})^2 e^{-2} = 0.101$$

لذلك احتمال أن يكون هناك أكثر من ثلاثة أعضاء بالمجتمع هو

$$1-(0+0.135+0.117+0.101)=0.647$$

ويُعطَى حجم المجتمع المتوقع عند هذا الزمن بـ (٢١ - ٣) كما يلي

$$E[N(1)]=1e^{2(1)}=7.389 \text{ عضواً}$$

٢١ - ٢ حل المسألة ٢١ - ١ إذا كانت العملية هى عمليه ميلاد بتوزيع بواسون .

عند $N(0)=1$ ، ساعة $t=1\text{ h}$ ، $\lambda=2$ ميلاد فى الساعة ، (٢١ - ١٠) تعطى

$$p_0(1)=0 \qquad p_2(1)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}=0.271$$

$$p_1(1)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=0.135 \qquad p_3(1)=\frac{2^2}{2!}e^{-2}=0.271$$

لذلك يكون احتمال أن يكون هناك أكثر من ثلاثة أعضاء بالمجتمع هو

$$1-(0+0.135+0.271+0.271)=0.323$$

الحجم المتوقع عند هذا الزمن مُعطى بالمعادلة (٢١ - ١١) كما يلي

$$E[N(1)]=1+2(1)=3 \text{ عضواً}$$

٢١ - ٣ بدأت عملية موت خطية لماركوف عند عدد 10 أعضاء بمعدل موت أسبوعى $\mu=0.6$. حدد احتمال أن يكون فى المجتمع ثمانية أعضاء على الأقل بعد ثلاثة أيام ، وكذلك حجم المجتمع المتوقع عند هذا الزمن .

عند $N(0)=10.$ ، أسبوع $t=(3/7)$ ، $\mu=0.6$ موت للعضو فى الأسبوع ، فإن (٢١ - ٤) تُعطى

$$p_8(3/7)=\binom{10}{8}e^{-8(0.6)(3/7)}(1-e^{-(0.6)(3/7)})^{10-8}=45(0.1278)(1-0.7733)^2=0.296$$

$$p_9(3/7)=\binom{10}{9}e^{-9(0.6)(3/7)}(1-e^{-(0.6)(3/7)})^{10-9}=10(0.0988)(1-0.7733)^1=0.224$$

$$p_{10}(3/7)=\binom{10}{10}e^{-10(0.6)(3/7)}(1-e^{-(0.6)(3/7)})^{10-10}=1(0.0764)(1-0.7733)^0=0.076$$

لذلك يكون احتمال أن يكون بالمجتمع ثمانية أعضاء أو أكثر هو

$$0.296+0.224+0.076=0.596$$

والحجم المتوقع للمجتمع عند هذا الوقت يُعطى بالمعادلة (٢١ - ٥) كما يلي :

$$E[N(3/7)]=10e^{-(0.6)(3/7)}=7.73 \text{ عضواً}$$

٢١ - ٤ حل المسألة ٢١ - ٣ إذا كانت العملية هي عملية موت لبواسون .

عند $N(0)=10$ ، أسبوع $t=(3/7)$ ، $\mu=0.6$ موت كل أسبوع فإن (٢١ - ١٤) تعطى

$$p_{10}(3/7)=\frac{[(0.6)(3/7)]^{10-10}}{(10-10)!}e^{-(0.6)(3/7)}=0.7733$$

$$p_9(3/7)=\frac{[(0.6)(3/7)]^{10-9}}{(10-9)!}e^{-(0.6)(3/7)}=0.1988$$

$$p_8(3/7)=\frac{[(0.6)(3/7)]^{10-8}}{(10-8)!}e^{-(0.6)(3/7)}=0.0256$$

احتمال أن يكون بالمجتمع ثمانية أعضاء أو أكثر بعد ثلاثة أيام هو

$$0.0256+0.1988+0.7733=0.9977$$

لحساب القيمة المتوقعة لـ $N(3/7)$ ، تكون الاحتمالات الباقية للحالات عند $t=3/7$ مطلوبة . تعطى المعادلة (٢١ - ١٤) هذه الاحتمالات لأربعة أرقام عشرية

$$p_7(3/7)=0.0022 \qquad p_6(3/7)=0.0001 \qquad p_5(3/7)=p_4(3/7)=\cdots=p_0(3/7)=0$$

لذلك

$$E[N(3/7)]=10(0.7733)+9(0.1988)+8(0.0256)+7(0.0022)+6(0.0001)+5(0)+\cdots+0(0)$$
$$=9.74 \text{ عضواً}$$

٢١ - ٥ يلاحظ أحد البيولوجيين نمو البكتريا فى مزرعة ، ووجد أن كلًّا من احتمال الميلاد واحتمال الموت للبكتريا تتناسب مع عدد البكتريا فى المزرعة والوقت المستغرق . وفى المتوسط ، كل بكتريا تنتج بكتريا جديدة كل سبع ساعات ، وتموت كل 30 ساعة . كم بكتريا تتوقع أن توجد فى المزرعة بعد أسبوع ، إذا بدأ المجتمع (المزرعة) ببكتريا واحدة ؟

باعتبار اليوم الواحد هو وحدة الزمن ، نجد أن $N(0)=1$

ميلاد للعضو فى اليوم $\lambda=\frac{1}{7}(24)=3.428571429$

، موت للعضو فى اليوم $\mu=\frac{1}{30}(24)=0.8$

ينتج من (٢١ - ٧) أن الحجم المتوقع للمجتمع بعد 7 أيام هو

$$E[N(7)]=1e^{(3.428571429-0.8)(7)}\doteq 97\,953\,164 \text{ بكتريا}$$

٢١ - ٦ استنتج معادلات كولوجوروف (٢١ - ١) .

يتوقف حجم المجتمع عند الزمن $t+\Delta t, N(t+\Delta t)$ بالحجم عند الزمن t ، $N(t)$ معاً مع أى تغيير (ميلاد أو / وموت) يحدث فى الفترة $(t, t+\Delta t]$. لذلك عند $n \geq 1$

$$P\{N(t+\Delta t)=n\}=P\{N(t)=n$$

ويكون هناك 0 ميلاد ، 0 موت فى الفترة $\{(t, t+\Delta t]\}$ $P\{N(t)=n$

+

ويكون هناك 1 ميلاد ، 1 موت فى الفترة $\{(t, t+\Delta t]\}$ $P\{N(t)=n-1$

+

ويكون هناك 1 ميلاد ، 0 موت فى الفترة $(t, t+\Delta t]$ $P\{N(t)=n+1$

+

ويكون هناك 0 ميلاد ، 1 موت فى الفترة $(t, t+\Delta t]$

+

تكوين من أحداث تتضمن أكثر من 1 ميلاد أو أكثر من $P\{$ موت فى الفترة $\{(t, t+\Delta t]\}$

أو

$$p_n(t+\Delta t)=a+b+c+d+e \qquad (١)$$

باستخدام الاحتمالات المشروطة (انظر المسألة ١٧ – ٥) نحصل على $a=P\{N(t)=n\}\times P\{$ 0 ميلاد ، 0 موت فى الفترة $\Delta t \mid N(t)=n\}$

بالافتراضات الأساسية ، فإن احتمال ميلاد صفر فى فترة زمنية Δt هو ، لأقرب $o(\Delta t)$, 1 ، ناقص احتمال ميلاد واحد بالضبط ؟ بمعرفة الحالة n عند بداية الفترة ، وهذا الاحتمال الأخير يساوى $\lambda_n \Delta t+o(\Delta t)$ ، لذلك فإن احتمال صفر ميلاد هو

$$1-\lambda_n \Delta t+o(\Delta t)$$

وتحت نفس الظروف يكون احتمال صفر موت هو

$$1-\mu_n \Delta t+o(\Delta t)$$

وأكثر من ذلك يحدث الميلاد مستقلاً عن الموت . لذلك

$$\begin{aligned} a &= p_n(t)\times[1-\lambda_n \Delta t+o(\Delta t)][1-\mu_n \Delta t+o(\Delta t)] \\ &= p_n(t)\,[1-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t]+o(\Delta t) \end{aligned}$$

وبالتفسير بنفس الطريقة

$$\begin{aligned} b &= o(\Delta t) \\ c &= p_{n-1}(t)\,(\lambda_{n-1}\Delta t)+o(\Delta t) \\ d &= p_{n+1}(t)\,(\mu_{n+1}\Delta t)+o(\Delta t) \\ e &= o(\Delta t) \end{aligned}$$

ويصبح (١)

$$p_n(t+\Delta t)=p_n(t)+[-(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t)]\,\Delta t+o(\Delta t) \qquad (٢)$$

وبعكس $p_n(t)$ للطرف الأيسر فى (٢) وبالقسمة على Δt ، وبوضع $\Delta t \to 0$ نحصل على معادلات كولموجوروف عند

تحتاج الحالة $n=0$ اعتباراً منفصلاً ، حيث إنه ليس هناك موت ممكن عند الحالة صفر . وبتنفيذ التحليل كما فى أعلى نحصل على معادلة كورموجوروف الباقية .

٢١ – ٧ (أ) اشتق (٢١ – ٦) ، (ب) وعممها إلى حالة مجتمع ابتدائى اختيارى

(أ) عند $\gamma u=\gamma^*$ ، $\mu_n=n\mu$ ، تصبح معادلات كولموجوروف (٢١ – ١)

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -n(\lambda + \mu)p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) + (n-1)\lambda p_{n-1}(t) \quad (١)$$

عند $n = 1, 2, \ldots,$

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu p_1(t) \quad (٢)$$

وإحدى الطرق لحل هذه المعادلات تكون باستبدالها بمعادلة تفاضلية جزئية واحدة لدالة إيجاد الاحتمال

$$F(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n \quad (٣)$$

وتكون الطريقة كالتالي . اضرب (١) في z^n ، واجمع لكل قيم n حيث إن $(n = 1, 2, \ldots)$ ، أضف النتيجة إلى (٢) حيث تعطى ، بعد الترتيب

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = -(\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) z^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) z^n \quad (٤)$$

وبتفاضل (٣)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dp_n(t)}{dt} z^n = \frac{\partial F(z, t)}{\partial t}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) z^n = z \frac{\partial F(z, t)}{\partial z}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1}(t) z^n = \frac{\partial F(z, t)}{\partial z}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) z^n = z^2 \frac{\partial F(z, t)}{\partial z}$$

حيث تصبح (٤)

$$\frac{\partial F(z, t)}{\partial t} = [-(\lambda + \mu)z + \mu + \lambda z^2] \frac{\partial F(z, t)}{\partial z} \quad (٥)$$

وبحل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية بفصل المتغيرات ، نجد أن أحد الحلول هو

$$e^t \left(\frac{z-1}{z-\delta}\right)^{1/(\lambda-\mu)} \quad \text{حيث إن} \quad \delta = \mu/\lambda$$

ويكون الحل العام لـ (٥) هو

$$F(z, t) = g\left[e^t \left(\frac{z-1}{z-\delta}\right)^{1/(\lambda-\mu)}\right] \quad (٦)$$

حيث إن g هي دالة اختيارية في متغير واحد . لإيجاد g ، نلاحظ أنه للمجتمع الابتدائي ذي العضو الواحد $p_1(0) = 1$ ، $p_n(0) = 0$ حيث إن $(n \neq 1)$ ، لذلك

$$F(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0) z^n = z \quad (٧)$$

بتطبيق هذا الشرط على (٦) نحصل على

$$z = g\left[\left(\frac{z-1}{z-\delta}\right)^{1/(\lambda-\mu)}\right] \quad (٨)$$

بوضع

$$y=\left(\frac{z-1}{z-\delta}\right)^{1/(\lambda-\mu)}$$

نحصل عكسياً على

$$z=\frac{\delta y^{\lambda-\mu}-1}{y^{\lambda-\mu}-1} \qquad (٩)$$

حيث تكتب (٨) كالتالى :

$$g(y)=\frac{\delta y^{\lambda-\mu}-1}{y^{\lambda-\mu}-1} \qquad (١٠)$$

وتصبح (٦)

$$F(z,t)=\frac{\delta\left[e^{t}\left(\frac{z-1}{z-\delta}\right)^{1/(\lambda-\mu)}\right]^{\lambda-\mu}-1}{\left[e^{t}\left(\frac{z-1}{z-\delta}\right)^{1/(\lambda-\mu)}\right]^{\lambda-\mu}-1}$$

ويمكن أن تبسط إلى

$$F(z,t)=\frac{\mu[e^{t(\lambda-\mu)}-1]+z[-\mu e^{t(\lambda-\mu)}+\lambda]}{[\lambda e^{t(\lambda-\mu)}-\mu]-z\lambda[e^{t(\lambda-\mu)}-1]} \qquad (١١)$$

وأخيراً يجب أن نمد $F(z,t)$ إلى قوى z ، ونحصل على $p_n(t)$ كمعاملات z^n . ضع

$$r(t)\equiv\frac{\mu[e^{t(\lambda-\mu)}-1]}{\lambda e^{t(\lambda-\mu)}-\mu} \qquad s(t)\equiv\frac{\lambda[e^{t(\lambda-\mu)}-1]}{\lambda e^{t(\lambda-\mu)}-\mu} \qquad m(t)\equiv\frac{\lambda-\mu e^{t(\lambda-\mu)}}{\lambda e^{t(\lambda-\mu)}-\mu}$$

لذلك

$$F(z,t)=\frac{r(t)+z\,m(t)}{1-zs(t)}=[r(t)+z\,m(t)]\left[\frac{1}{1-zs(t)}\right] \qquad (١٢)$$

وبالنظر إلى المتتالية الهندسية

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n} \qquad (|x|<1)$$

تعطى (١٢)

$$F(z,t)=r(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[r(t)s(t)+m(t)][s(t)]^{n-1}z^{n}$$

ويمكن بسهولة التحقق جبرياً من أن

$$r(t)s(t)+m(t)=[1-r(t)][1-s(t)]$$

لذلك

$$F(z,t)=r(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\{[1-r(t)][1-s(t)][s(t)]^{n-1}\}z^{n} \qquad (١٣)$$

وتعطى المعاملات فى (١٣) المعادلة (٢١ – ٦)

(ب) يمكن التحقق من أن أى قوى لحل (٥) هو فى حد ذاته حل ، وعلى الأخص

$$\Phi(z,t)=[F(z,t)]^{N(0)}$$

حيث تعطى $F(z,t)$ بواسطة (١١) ، أو (١٣) ، وتكون حلًّا ؟ ويحقق هذا الحل الشرط المبدئى

$$\Phi(z,0)=[F(z,0)]^{N(0)}=z^{N(0)}$$

[انظر (٧)] . لذلك $\Phi(z, t)$ تكون دالة إيجاد احتمالات الحالات للمجتمع المنشأ عند $N(0)$ عضو . وتتضمن حقيقة أن Φ تساوى $F^{N(0)}$ أن المتغير العشوائى المناظر لـ Φ [أى المجتمع ذا حجم مبدئى $N(0)$] هو المعبر عنه كمجموع $N(0)$ متغير عشوائى مستقل ، يناظر كل منهم F [بمعنى أن $N(0)$ مجتمع بحجم مبدئى 1] . وهذه هى خاصية الإضافة الملاحظة سابقاً فى هذا الفصل .

٢١ - ٨ بين أن الزمن بين الوصول فى عملية الميلاد لبواسون بمعدل ميلاد λ هى ذات توزيع أسى بباراميتر λ.

أرمز إلى زمن أول ميلاد بالرمز T ، كمتغير عشوائى ، يظل المجتمع بالحجم المبدئى $N(0)$ عند الزمن t إذا كانت فقط $T > t$. لذلك من (٢١ - ١٠)

$$P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P[N(t) = N(0)]$$
$$= 1 - p_{N(0)}(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

بمعنى ، T يكون لها التوزيع الأسى بباراميتر λ . والآن فإن التوزيع الاحتمالى الذى يحدد الميلاد فى أى فترة زمنية يكون مستقلاً عن نقطة البداية للفترة (وهو الفرض الأولى لعملية الميلاد والموت العامة لماركوف) ، ويكون أيضاً مستقلاً عن حالة العملية (افتراض بواسون الأساسى) . وبالتالى ، تقيس T الزمن من الآن وحتى الميلاد التالى ، وعلى الأخص إذا كان الآن هو هذا الميلاد ، فإن T تقيس زمن بين الوصول .

٢١ - ٩ تبدأ عملية ميلاد خطية لماركوف ذات معدل ميلاد λ بمجتمع $N(0) = 1$

(أ) أوجد الزمن المتوقع حتى يساوى حجم المجتمع n $(n = 2, 3, \ldots)$.

(ب) هل الزمن المحسوب فى (أ) هو نفسه الزمن الذى عنده يصبح حجم المجتمع مساوياً لـ n ؟

(أ) يصل المجتمع إلى n أولاً فى الفترة الزمنية المتناهية فى الصغر $[t, t + dt]$ فقط إذا كانت الحالة $n - 1$ عند الزمن t [باحتمال $p_{n-1}(t)$] ، ويوجد ميلاد واحد بالضبط فى $[t, t + dt]$ باحتمال $[(n-1)\lambda\, dt + o(dt)]$] . لذلك فإن القيمة المتوقعة المطلوبة تكون

$$\int_0^\infty t p_{n-1}(t)(n-1)\lambda\, dt = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$$

(تتأثر الحسابات بسهولة بضرب معادلة كولموجوروف فى dp_k/dt فى t ، وبالتكامل جزئيًا ، باستخدام (٢١ - ٢) بالتعويض $z = 1 - e^{-\lambda t}$ لتحديد قيمة العدد الصحيح لـ $p_k(t)$ وحل معادلة الفروق الناتجة) . وهذه النتيجة لها دلالة بسيطة ، وهى : أن الزمن المتوقع للميلاد الأول هو $1/\lambda$ ، والآن فإن حجم المجتمع هو 2 ، بمعدل ميلاد فعال 2λ ، لذلك .. فإن الزمن الإضافى المتوقع للميلاد التالى هو $1/2\lambda$. ، وهكذا .

(ب) طبقاً لـ (٢١ - ٣) ، فإن الزمن المحسوب فى (أ) يساوى الحجم المتوقع للمجتمع n عندما تكون

$$e^{\lambda t} = n \qquad \text{أو} \qquad t = \frac{1}{\lambda}\ln n$$

وهو ليس نفس الزمن المتوقع فى (أ) عند n كبيرة

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \approx \ln n + \gamma$$

حيث إن $\gamma = 0.5772157\cdots$ تكون ثابت أويلر . لذلك .. فإن النسبة المئوية للفرق بين الزمنين تصبح صغيرة جداً .

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٢١ - ١٠ تبدأ عملية ميلاد خطية لماركوف عند عضو واحد ، وبمعدل ميلاد يومى $\lambda = 0.3$. حدد احتمال وجود مجتمع أكثر من خمسة أعضاء بعد أسبوع واحد . وماهو حجم المجتمع عند هذا الزمن ؟ وماهو حجم المجتمع المتوقع بعد أسبوع واحد إذا بدأ المجتمع بعدد 10 أعضاء .

٢١ - ١١ حل المسألة ٢١ - ١٠ إذا كانت $\lambda = 0.6$

٢١ - ١٢ حل المسألة ٢١ - ١٠ إذا كانت العملية عملية ميلاد لبواسون .

٢١ - ١٣ تبدأ عملية ميلاد خطية لماركوف بـ 15 عضواً ، وبمعدل ميلاد كل ساعة $\lambda = 0.1$. ما هو الحجم المتوقع للمجتمع بعد 3 ساعات ؟

٢١ - ١٤ تقدر إحدى شركات السيارات أنه فى مدى 40000 إلى 300 000 سيارة ، فإن البيع يتبع عملية ميلاد خطية لماركوف . وإذا كان فى المتوسط كل 50 سيارة جديدة على الطريق يوجد مشترٍ جديد كل يوم ، فكم سيارة تتوقع أن تبيعها الشركة فى مدة 60 يوماً بعد أن تبيع السيارة رقم 40000 ؟

٢١ - ١٥ توضع دعاية فى الصحف لأحد المتاجر . وبناءً على الخبرة السابقة ، فإن المتجر يتوقع الوصول إلى معدل طلبين اثنين يومياً بتوزيع بواسون طول مدة بقاء الإعلان بالصحف . كم يوماً يجب أن يبقى الإعلان بالصحف إذا أراد المتجر ضمان الحصول على ستة طلبات بنسبة تأكد 98 فى المئة ؟

٢١ - ١٦ فى صباح كل يوم اثنين يتكون صف من العملاء عند باب أحد البنوك 15 دقيقة قبل افتتاح البنك . ويتبع نمط الوصول إلى البنك توزيع بواسون عند $\lambda = 40$ عميل فى الساعة . حدد احتمال أن يكون فى الصف عدد أقل من خمسة أعضاء عند افتتاح البنك ، بافتراض أنه ما من أحد يترك الصف إذا وصل إليه .

٢١ - ١٧ تبدأ عملية موت خطية لماركوف بخمسة أعضاء بمعدل موت يومى $\mu = 0.1$. حدد احتمال وجود أقل من ثلاثة أعضاء فى المجتمع بعد أسبوع . ما هو الزمن المتوقع للمجتمع عند هذا الوقت ؟

٢١ - ١٨ حل المسألة ٢١ - ١٧ إذا كانت $\mu = 0.2$

٢١ - ١٩ حل المسألة ٢١ - ١٧ إذا كانت العملية عملية موت لبواسون

٢١ - ٢٠ من المتبع فى يوم الانتخابات السماح لأى منتخب بالتصويت إذا كان واقفاً فى طابور الانتظار فى الوقت الذى يقترب فيه الموعد من الانتهاء . وفى مكان انتخاب محدد ، فإن الوقت الذى يأخذه أى ناخب للتصويت يتبع توزيعاً أسّيًا بقيمة متوقعة 1.5 دقيقة . ماهو احتمال أخذ 12 دقيقة لاستيعاب المنتظرين للتصويت قبل موعد انتهاء العمل ، إذا كان فى صف الانتظار ثمانية أشخاص ؟ (ملحوظة : تمتد النظرية ٢١ - ١ لتشمل عملية الموت لبواسون) .

٢١ - ٢١ تبدأ عملية الميلاد والموت لبواسون بعضو واحد ، وبمعدل ميلاد يومى $\lambda = 0.05$ ، ومعدل موت يومى $\mu = 0.03$. حدد احتمال أن يكون المجتمع ساكناً بعد أربعة أيام .

٢١ - ٢٢ حل المسألة ٢١ - ٢١ إذا تضاعفت λ ، μ

٢١ - ٢٣ تبين أن معدل النمو لإحدى العائلات المعرضة للأخطار يتبع عملية ميلاد وموت خطية لماركوف . وفى المتوسط فإن عضوين من العائلة تنتج عضواً واحداً كل سنتين بعد الربيع . ومتوسط العمر لأى عضو من العائلة $3\ ^1/_2$ سنوات . ماهو الحجم المتوقع للمجتمع فى 20 سنة ، إذا كان حجم المجتمع الحالى 100 عضو .

٢١ - ٢٤ استنتج (٢١ - ٩) بحل معادلات كولموجوروف أولاً فى $p_0(t)$ ، وبعد ذلك فى $p_1(t)$, ، $p_2(t), \ldots$

٢١ - ٢٥ حل المسألة ٢١ - ٩ كعملية ميلاد لبواسون . افرض العدد الأولى للمجتمع صفراً .

٢١ - ٢٦ تجرى عمليتا ميلاد مستقلتان لبواسون . بين أن النتيجة تكون عملية ميلاد لبواسون بمعدل ميلاد هو مجموع معدلى الميلاد للعمليتين .

نظم الصفوف
Queueing Systems

مقدمة : INTRODUCTION

تتكون عملية الصفوف من عملاء يصلون إلى مكان خدمة ، وينتظرون فى صف إذا كان كل من يقدمون الخدمة مشغولين ، ثم يحصلون فى النهاية على الخدمة ، وأخيراً يغادرون مكان الخدمة . ونظام الصفوف هو مجموعة العملاء ، ومجموعة من مقدمى الخدمة ونظام لوصول العملاء وتقديم الخدمة لهم . يبين شكل ٢٢ – ١ نظماً متعددة للصفوف .

ونظام الصفوف هو عملية ميلاد وموت بمجتمع يتكون من عملاء ، سواء منتظرى الخدمة أم الحاصلين عليها فعلاً . ويحدث الميلاد عندما يصل أحد العملاء إلى مكان الخدمة . ويحدث الموت عندما يخرج أحد العملاء من مكان الخدمة . وحالة النظام هى عدد العملاء فى مكان الخدمة .

خصائص الصف : QUEUE CHARACTERISTICS

يتميز نظام الصفوف بخمسة مكونات ، وهى : نمط الوصول للعملاء ، ونمط الخدمة ، وعدد من يقدمون الخدمة ، وطاقة مكان الخدمة للعملاء ، والترتيب الذى يُخدَم به العملاء .

أنماط الوصول : ARRIVAL PATTERNS

تُحدَّد أنماط الوصول للعملاء عادة بالزمن بين الوصول ، وهو الزمن المستغرق بين وصول عميلين لمكان الخدمة . وقد يكون ثابتاً (معروفاً بالضبط) أو متغيراً عشوائياً بتوزيع احتمالى معروف . وقد يعتمد على عدد العملاء فى النظام ، وقد يكون حالة مستقلة .

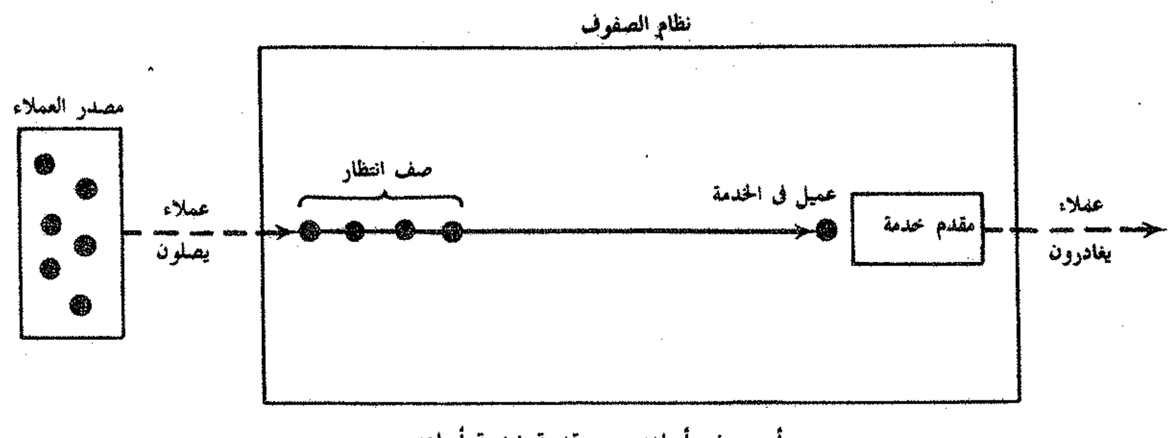
وأيضاً قد يكون وصول العملاء منفردين ، أو فى مجموعات ، وكذلك قد يكونوا متزاحمين ، أو يسمح لهم بتخطى بعضهم . ويحدث التزاحم عندما يرفض العميل الذى يصل الدخول إلى مكان الخدمة بسبب طول صف الانتظار . ويحدث « التخطى » عندما يترك أحد العملاء الموجودين مسبقاً بالصف مكانه بسبب طول صف الانتظار . وطالما لم ينص على العكس ، فإنه من المفترض أن يصل العملاء منفردين ، ولا يحدث تزاحم أو تخطٍّ .

أنماط الخدمة : SERVICE PATTERNS

يُحَدَّد نمط الخدمة عادة بزمن الخدمة ، وهو الزمن اللازم لأحد مقدمى الخدمة لتقديم الخدمة لأحد العملاء . قد يكون زمن الخدمة ثابتاً ، أو متغيراً عشوائياً ذا توزيع احتمالى معروف . وقد يعتمد على عدد العملاء الموجودين مسبقاً بمكان الخدمة ، أو قد يكون حالة مستقلة . ومن المهم تحديد ما إذا كان العميل يُخدم بواسطة مقدم خدمة واحد ، أو ، كما فى شكل ٢٢ – ١ (د) ، يحتاج العميل سلسلة من مقدمى الخدمة . وإذا لم ينص على غير ذلك ، فإنه من المفترض أن مقدم خدمة واحد يقدم الخدمة لعميل واحد .

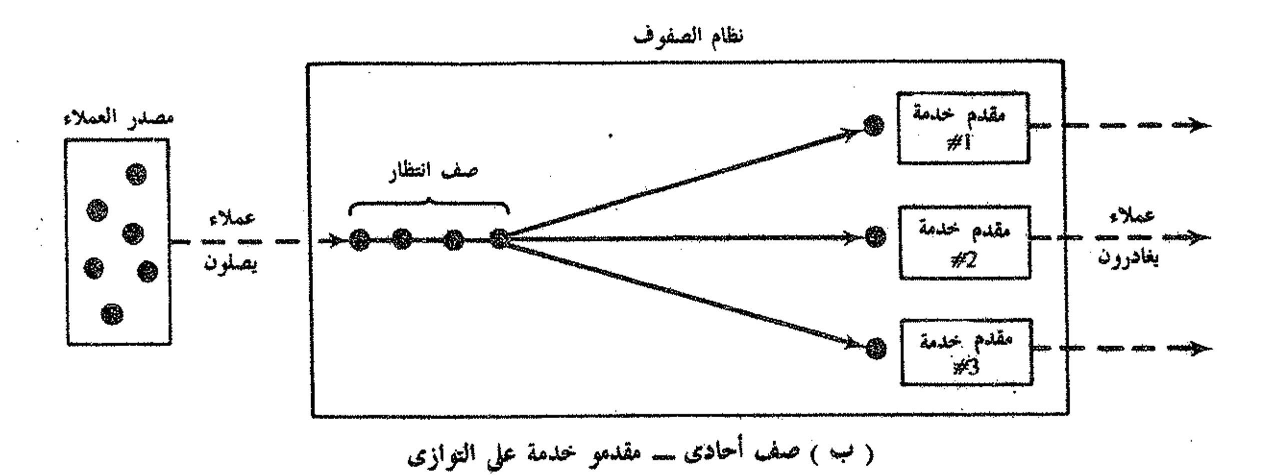
طاقة النظام : SYSTEM CAPACITY

طاقة النظام هى أكبر عدد من العملاء ، سواء أكانوا فى مرحلة الخدمة ، أم الانتظار ، والمسموح لهم التواجد بمكان الخدمة فى نفس الوقت . عندما يصل أحد العملاء إلى مكان خدمة ممتلىء ، فلا يدخل هذا العميل إلى نظام الخدمة . ولا يسمح لهذا العميل بالانتظار خارج مكان الخدمة (حيث إن هذا يزيد فعلياً من طاقة النظام) ويضطر إلى مغادرة المكان بدون تلقى الخدمة . والنظام الذى ليس له حدود لعدد العملاء المسموح بهم داخل نظام الخدمة تكون له « طاقة غير محدودة » . والنظام الذى له عدد محدود تكون له « طاقة محدودة » .



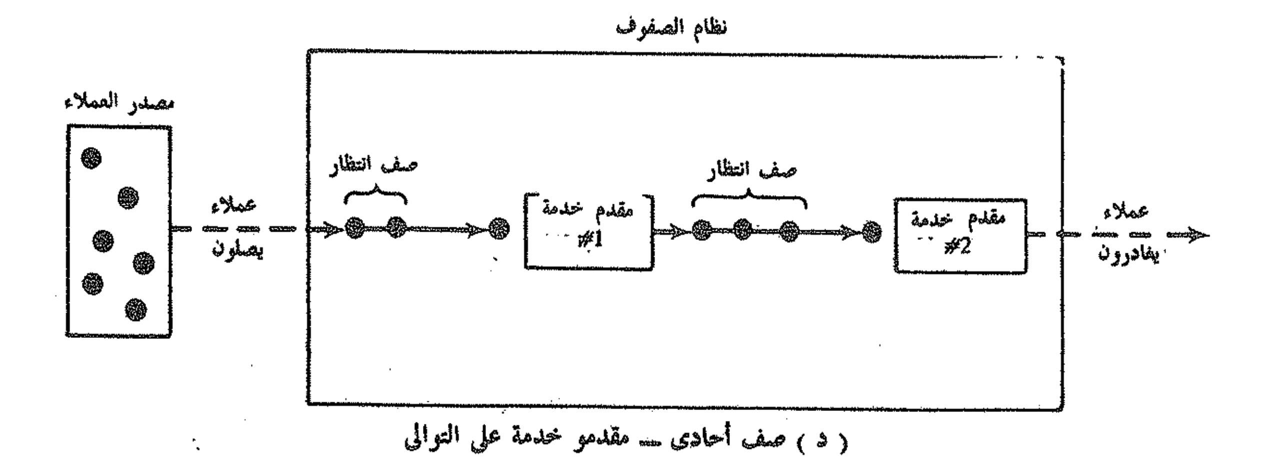


(أ) صف أحادى ـــ مقدمة خدمة أحادى



(ب) صف أحادى ـــ مقدمو خدمة على التوازى

(حـ) صفوف متعددة ـــ مقدمو خدمه على التوازى



(د) صف أحادى ـــ مقدمو خدمة على التوالى

شكل ٢٢ – ١

نظم الصفوف QUEUE DISCIPLINES

نظم الصفوف هى الترتيب الذى يُخدم به العملاء . وقد تكون على أساس من يحضر أولًا يخدم أولًا FIFO (بمعنى خدمة بترتيب الوصول) ، وقد تكون على أساس من يحضر أخيراً يُخدم أولًا LIFO (بمعنى أن العميل الذى يصل أخيراً يُخدم أولًا) ، وقد تكون على أساس عشوائى ، أو على أساس أسبقيات .

رموز كندال : KENDALL'S NOTATION

تُستخدم رموز كندال لتحديد خصائص الصفوف v/w/x/y/z ، حيث تمثل v نمط الوصول ، و w نمط الخدمة ، و x تحدد عدد مقدمى الخدمة ، و y طاقة النظام ، و z نظم الصفوف . ويبين جدول ٢٢ – ١ رموزاً متفرعة تستخدم لثلاثة عناصر . وإذا لم تحدد أو z ، فتؤخذ ∞ أو FIFO على التوالى .

مثال ٢٢ – ١ فى نظام صفوف M/D/2/5/LIFO له زمن بين الوصول ذو توزيع أُسّى ، وزمن خدمة ثابت ، واثنين من مقدمى الخدمة ، ويحدد بعدد خمسة عملاء مسموح لهم بمكان الخدمة فى الوقت الواحد ، على أساس أن آخر عميل يصل إلى مكان الخدمة هو الذى يخدم تالياً .
ونظام D/D/1 له كل من : زمن بين الوصول ثابت ، وزمن خدمة ثابت ، ومقدم خدمة واحد . وحيث إن طاقة النظام ونظم الصفوف غير محددين ، فيفترض أنهما غير محددين (∞) و FIFO على التوالى .

جدول ٢٢ – ١

خصائص الصف	الرمز	المعنى
زمن بين الوصول أو زمن الخدمة	D M E_k G	ثابت توزيع أسى توزيع إرلانج k - $(k = 1, 2, \ldots)$ أى توزيع آخر
نظام الصفوف	FIFO LIFO SIRO PRI GD	من يحضر أولا يُخدم أولاً من يحضر أخيراً يُخدم أولاً الخدمة عشوائية نظام أسبقيات أى ترتيب آخر

مسائل محلولة

Solved Problems

٢٢ - ١ حدد العملاء ، ومقدمي الخدمة ، وخصائص الصفوف الواضحة فى صف واحد لعربات بمحطة غسيل عربات أوتوماتيكية .

العملاء هم العربات الداخلة للمحطة للغسيل ، ومقدم الخدمة هي ماكينة الغسيل ، والصف الواحد يبين مقدم خدمة واحد أو أكثر على التوالى . وبوجه عام .. تعمل ماكينة الغسيل على أساس من يحضر أولًا يُخدم أولًا ، لذلك يكون نظام الصف من النوع FIFO . وطاقة النظام هى عدد العربات الممكن تواجدها على أرض محطة الغسيل . إذا سُمِح بانتظار العربات فى الشوارع المحيطة بالمحطة للدخول إلى المحطة بعد ذلك ، فإن طاقة النظام تكون غير محدودة .

٢٢ - ٢ حدد العملاء ، ومقدمى الخدمة ، وخصائص الصف الواضحة فى قسم الفواتير فى متجر كبير .

العملاء هم الأثمان المقدرة بواسطة موظفى المتجر ، وتذهب هذه الأثمان بعد ذلك إلى قسم الفواتير ، ومقدمو الخدمة هم أفراد قسم الفواتير الذين ينهون إجراءات هذه الفواتير .

غالباً ما تتبع نظم الفواتير نظام **LIFO**، بمعنى أن آخر ثمن يصل إلى قسم الفواتير يوضع أعلى المجموعة ، وبالتالى يكون هو أول فاتورة تنتهى إجراءاتها . وبوجه عام .. فلا توجد حدود لعدد الأثمان التى تصل إلى قسم الفواتير ، وبالتالى تكون طاقة النظام غير محدودة .

٢٢ - ٣ تقوم إحدى شركات التليفزيون بالتفتيش على الجودة كل ثلاث دقائق بواسطة مهندس جودة على أساس من يحضر أولًا يخدم أولًا . يوجد مهندس واحد بالخدمة ، وتستغرق الخدمة أربع دقائق لكل جهاز . حدد متوسط عدد الأجهزة المنتظرة للتفتيش فى أول نصف ساعة من وردية العمل ، إذا لم تكن هناك أى أجهزة منتظرة للتفتيش فى بداية الوردية .

هذا النظام هو **D/D/1** ، على أساس أن العملاء هم أجهزة التليفزيون ، وأن المهندس هو مقدم الخدمة الوحيد . الزمن بين الوصول هو ثلاث دقائق تماماً ، بينما زمن الخدمة هو أربع دقائق تماماً .

جدول ٢٢ - ٢

محاكاة الزمن بالدقيقة	عدد العملاء فى الخدمة	صف الانتظار
0	...	...
3	#1	...
6	#1	#2
7	#2	...
9	#2	#3
11	#3	...
12	#3	#4
15	#4	#5
18	#4	#5, #6
19	#5	#6
21	#5	#6, #7
23	#6	#7
24	#6	#7, #8
27	#7	#8, #9
30	#7	#8, #9, #10

يبين جدول ٢٢ – ٢ تاريخ النظام خلال النصف ساعة الأولى للعملية . ويحدد الجدول التوقيتات التى يحدث فيها تغيير الحالة النظام (من خلال وصول عميل أو انتهاء خدمة) . لاحظ أنه لا يوجد عملاء فى الصف من الزمن 0 حتى 6 , 7 حتى 9 ، ومن 11 إلى 12 ، بزمن إجمالى 9 دقائق . ويوجد عميل واحد فى الصف من الزمن 6 إلى 7 ، ومن 9 إلى 11 ، ومن 12 إلى 18 ، ومن 19 إلى 21 ، ومن 23 إلى 24 بزمن إجمالى 12 دقيقة . وبالمثل يوجد عميلان فى الصف فى الزمن من 18 إلى 19 ، ومن 12 إلى 23 ، ومن 24 إلى 30 بزمن إجمالى 9 دقائق . ويوجد ثلاثة عملاء فى الصف فى الزمن من 30 إلى 30 بزمن إجمالى 0 دقيقة .

متوسط طول الصف وهو متوسط عدد الأجهزة المنتظرة للتفتيش خلال النصف ساعة الأولى هو

$$\frac{0(9)+1(12)+2(9)+3(0)}{30} = \text{جهاز}$$

٢٢ – ٤ تصل أتوبيسات لمكان التنظيف فى مجموعات من خمسة أتوبيسات خلال كل ساعة . تخدم الأتوبيسات بترتيب عشوائى واحد فى كل مرة يحتاج كل أوتوبيس إلى 11 دقيقة لإنهاء الخدمة ، ويترك مكان الخدمة بمجرد الانتهاء من الخدمة . حدد (أ) متوسط عدد الأتوبيسات فى مكان الخدمة . (ب) متوسط عدد الأتوبيسات المنتظرة التنظيف . (جـ) متوسط الزمن الذى يقضيه الأتوبيس فى مكان الخدمة .

هذا النظام هو نظام ثابت ، وفيه الأتوبيسات تمثل العملاء ، وطاقم التنظيف هو مقدم الخدمة الأحادى . يحدث الوصول مرة واحدة فى الساعة ، ولكن بمجموعات ، وزمن الخدمة هو 11 دقيقة . يكون الأوتوبيس فى الخدمة عندما يكون جارى تنظيفه .

يبين جدول ٢٢ – ٣ تاريخ النظام فى خلال ساعة واحدة فى توقيتات الوصول والمغادرة . وحيث تُقدَّم الخدمة بترتيب عشوائى ، فإن التسلسل الموضح بالجدول هو أحد التسلسلات الممكنة لتقديم الخدمة للأتوبيسات . ومع ذلك .. فإن الإحصائيات المطلوبة تكون غير معتمدة على التسلسل .

وأكثر من ذلك .. وحيث إن النظام يجدد نفسة كل ساعة ، فإن الإحصائيات التى تُحدد النظام فى الساعة الأولى تتحقق فى الأمد الطويل .

جدول ٢٢ – ٣

صف الانتظار	عدد العملاء ، فى الخدمة	محاكاة الزمن بالدقيقة
#3, #1, #2, #5	#4	0
#3, #2, #5	#1	11
#3, #2	#5	22
#2	#3	33
...	#2	44
...	...	55

(أ) يوجد خمسة عملاء فى النظام فى الزمن من 0 حتى 11 ، وأربعة عملاء من 11 حتى 22 ، وثلاثة عملاء من 22 حتى 33 ، وعميلان من 33 حتى 44 ، وعميل واحد من 44 حتى 55 ، حيث كل فترة 11 دقيقة . بالإضافة إلى ذلك .. لا يوجد عملاء بمكان الخدمة فى الزمن من 55 حتى 60 ، أو لمدة خمس دقائق . لذلك يكون متوسط عدد العملاء بمكان الخدمة هو

$$\frac{5(11)+4(11)+3(11)+2(11)+1(11)+0(5)}{60} = 2.75 \text{ اتوبيس}$$

(ب) متوسط عدد العملاء فى صف الانتظار ، وهو عدد الأوتوبيسات المنتظرة الخدمة ، ولكن لم تبدأ الخدمة بعد هو

$$\frac{4(11)+3(11)+2(11)+1(11)+0(16)}{60} = 1.83 \text{ أتوبيس}$$

(جـ) أتوبيس واحد ، وهو رقم 4 فى جدول ٢٢ – ٣ يكون فى نظام الخدمة لمدة 11 دقيقة ، حيث إنه يُخدم بمجرد وصوله إلى مكان الخدمة . وأتوبيس آخر ، وهو رقم 1 فى الجدول ٢٢ – ٣ ينتظر 11 دقيقة قبل أن يُخدم ، حيث إنه يظل داخل النظام لمدة 22 دقيقة . وبالمثل فإن الأتوبيسات الثلاثة الأخرى تقضى 33 ، 44 ، 55 دقيقة على التوالى فى النظام ، لذلك يكون متوسط الزمن الذى يقضيه الأتوبيس فى النظام هو

$$\frac{11+22+33+44+55}{5} = 33 \text{ دقيقة}$$

٢٢ – ٥ حاكى نظام خدمة M/D/2/3 لمدة تشغيل 45 دقيقة إذا كان متوسط الزمن بين الوصول 3 دقائق ، وإذا أخذ مقدمو الخدمة رقم I ، II على التوالى 5 و 7 دقيقة لتقديم الخدمة للعميل ، مع افتراض أنه لا يوجد عملاء فى النظام عند البداية .

إذا كان المتغير العشوائى ذو التوزيع الأسى له قيمة متوسطة 3 (قيمة متوقعة) ، فإن دالة التوزيع (٢١ – ١٣) يكون لها $1/3$ كبارامیتر . باستخدام مولدات الأرقام العشوائية لإيجاد قيم (بالدقيقة والثانية) تتبع هذا التوزيع ، نحصل على . 11 :2 ، 3: 54 ، 1: 26 ، 1: 25 ، 0.05 ، 5: 24 ، 6: 09 ، 0:57 ، 5: 57 ، 1: 19 ، 1: 14 ، 2: 39 ، 0:52 ، 54 :8 ، 49 :2 نأخذ الأرقام المتتالية لتكون أزمنة بين الوصول للعملاء المتتاليين ، لذلك العميل رقم 1 يدخل النظام عند الزمن 3 دقائق ، و 54 ثانية بعد بدء العملية . والعميل رقم 2 يدخل النظام عند الزمن 2 دقيقة ، و 11 ثانية بعد العميل رقم 1 . وهكذا .

يبين جدول ٢٢ – ٤ عملية الصفوف لمدة الـ 45 دقيقة الأولى للعملية بأزمنة الوصول والمغادرة فقط . لاحظ أنه عند الزمن 9:01 يكون العميلان رقما 2 و 3 فى الخدمة ، والعميل رقم 4 فى صف الانتظار ، ويصل العميل رقم 5 . وحيث إن طاقة النظام هى 3 ، فإن العميل رقم 5 لا يُسمح له بالانتظار ، ولا تُقدَّم له خدمة . ونفس الموقف يحدث عند الزمن 32 :33 .

جدول ٢٢ – ٤

زمن المحاكاة	عدد العملاء بالخدمة		صف الانتظار
ثانية : دقيقة	مقدم الخدمة I	مقدم الخدمة II	
00:00	...	...	...
3:54	#1	...	
6:05	#1	#2	...
7:31	#1	#2	#3
8:54	#3	#2	...
8:56	#3	#2	#4
9:01	#3	#2	#4 ← #5
13:05	#3	#4	...
13:54	...	#4	...
14:25	#6	#4	...
19:25	...	#4	...
20:05	...	...	...
20:34	#7	...	...
21:31	#7	#8	...
22:45	#7	#8	#9
25:34	#9	#8	...
28:31	#9	...	...
28:42	#9	#10	...
30:01	#9	#10	#11
30:34	#11	#10	...
32:40	#11	#10	#12
33:32	#11	#10	#12 ← #13
35:34	#12	#10	...
35:42	#12	...	...
40:34	...	...	...
42:26	#14	...	...
45:00	#14	...	...

مسائل مكملة

Supplementary Problems

حدد (أ) العملاء ، (ب) مقدمو الخدمة ، (جـ) خصائص صف الانتظار الواضحة فى النظم الموصوفة فى المسائل ٢٢ - ٦ حتى ٢٢ - ١٣ .

٢٢ - ٦ كافيتريا ذات شباك واحد

٢٢ - ٧ محل تصفيف شعر به أربعة كراسى للانتظار ، ومكان تجفيف للشعر ، بحيث يكون أكبر عدد من العملاء داخل المحل هو سبعة عملاء .

٢٢ - ٨ محطة تموين بنزين ذات ثلاث طلمبات

٢٢ - ٩ طائرات تطلب التصريح بالهبوط فى مطار صغير .

٢٢ - ١٠ عربات فى جراج انتظار بالرسوم .

٢٢ - ١١ عمل مقدم لمجموعة كاتبى آلة كاتبة .

٢٢ - ١٢ مجموعة مقاتلة تنتظر الانتقال إلى مكان الراحة والترفية .

٢٢ - ١٣ قاضى مدنى يستمع إلى حالة بالمحكمة .

٢٢ - ١٤ يُنظم المرضى بإحدى العيادات للفحص بمعدل مريض كل خمس دقائق ، ابتداءً من الساعة 9.00 صباحاً . يأخذ الفحص 8 دقائق للاستكمال ، ويتم بواسطة طبيب واحد يُعين لهذا العمل . وعندما يكون هناك ثلاثة مرضى أو أكثر فى حجرة الانتظار يعين طبيب آخر للعمل ، ويستمر كذلك حتى ينتهى صف الانتظار . عند هذه النقطة ، فإن الطبيب الثانى يعود إلى عمله السابق إلى أن يُطلَب مرة أخرى .

(أ) عند أى وقت يبدأ الطبيب الثانى عمله ، وفى أى وقت ينهى عمله لأول مرة ؟
(ب) ما هو متوسط عدد المرضى المنتظرين بحجرة الانتظار من الساعة التاسعة صباحاً حتى العاشرة صباحاً ؟
(جـ) ما هو عدد المرضى بالعيادة من الساعة التاسعة إلى العاشره صباحاً ؟

٢٢ - ١٥ تصل بعض الأشغال إلى مكان عمل بمعدل ثلاثة أشغال فى كل مرة كل 15 دقيقة . ويعمل بمكان العمل موظف واحد يأخذ 6 دقائق بالضبط لاستكمال الشغلة . والأشغال التى لا تتم بواسطة الموظف تُخزن بمكان العمل ، وتؤخذ بطريقة عشوائية ، مع افتراض أن الأشغال تصل إلى مكان العمل بمجرد أن يبدأ الموظف عمله ، وأنه لا توجد أشغال منتظرة سابقاً بمكان العمل .
(أ) ما هو متوسط عدد الأشغال الموجودة بمكان العمل خلال الساعتين الأوليين من عمل الموظف ؟
(ب) ما هو طول الصف بعد 8 ساعات من الوردية ؟

٢٢ - ١٦ ينظم أحد أطباء تقويم الأسنان المرضى للفحص الدورى بمعدل مريض كل 15 دقيقة ، ويحدد عدد المرضى بعشرة مرضى كل يوم . ويأخد 12 دقيقة لفحص المريض الأول . وبسبب أن المريض يتعب بسرعة ، فإن كل مريض تالٍ يأخذ دقيقة واحدة أكثر من المريض السابق له مباشرة . حدد متوسط الزمن الذى يقضيه المريض فى عيادة الطبيب ، سواء فى الانتظار أم فى الكشف ، على افتراض أن كل مريض يصل العيادة فى الوقت المخصص له بالضبط .

٢٢ ١٧ كم عدد العملاء الذين لا يُسمح لهم بالدخول فى نظام الخدمة D/D/1/3 فى الساعة الأولى ، إذا كان العملاء يصلون كل 4 دقائق لمكان الخدمه التى تحتاج إلى 8 دقائق لكى تتم ؟ بافتراض أن أول عميل يصل إلى مكان الخدمة بمجرد فتح نظام الخدمة .



نظم م / م / ١
M/M/1 Systems

خصائص النظام SYSTEM CHARACTERISTICS

نظام الخدمة M/M/1 هو نظام صفوف له زمن بين الوصول بتوزيع أُسى ذى بارامتر λ ، وزمن خدمة بتوزيع أُسى ذى بارامتر μ وله مقدم خدمة واحد وليس له حدود لطاقة النظام ، ونظام الخدمة من النوع من يحضر أولاً يخدم أولاً . والثابت λ هو متوسط معدل وصول العملاء ، والثابت μ هو متوسط معدل الخدمة للعملاء . وكلاهما لوحدات العملاء لكل وحدة زمن . والزمن المتوقع بين الوصول وزمن الخدمة المتوقع لعميل واحد هما $1/\lambda$ ، $1/\mu$ على التوالى .

وحيث إن الزمن بين الوصول ذى التوزيع الأُسى بمتوسط $1/\lambda$ يكافىء خلال فترة زمنية τ نمط الوصول ذى توزيع بواسون بمتوسط $\lambda\tau$ (انظر النظرية ٢١ – ١) ، فإن النظام M/M/1 يطلق عليه أُحادى الخدمة ، ذو الطاقة غير المحدودة ، ذات مدخلات بواسون وزمن خدمة أُسى .

نموذج ماركوف THE MARKOVIAN MODEL

النظام M/M/1 هو عملية ميلاد وموت لبواسون (انظر الفصل ٢١) . واحتمال $p_n(t)$ أن النظام يكون فيه n عميل بالضبط ، سواء منتظرى الخدمة أم فى الخدمة فى الزمن t يحقق معادلات كولموجوروف (٢١ – ١) عند $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = \mu$ لكل قيم n وحل هذه المعادلات ، إذا كان ممكناً ، غير ضرورى بالمرة . وكما فى الفصل ١٩ ، فإن التوزيع المحدود هو الأكثر أهمية .

حلول الحالة الساكنة (المستقرة) STEADY-STATE SOLUTIONS

احتمالات حالات الاستقرار (السكون) لنظام الصفوف هى

$$p_n \equiv \lim_{t\to\infty} p_n(t) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{٢٣ - ١}$$

إذا وجدت نهاية . للنظام M/M/1 نُعرف ρ معامل الاستخدام ρ . (أو كثافة المواصلات) كما يلى :

$$\rho \equiv \frac{\lambda}{\mu} \tag{٢٣ - ٢}$$

أى أن ρ هى عدد مرات الوصول المتوقع لكل زمن خدمة . إذا كانت $\rho < 1$ ، فإنه توجد احتمالات حالة السكون (المسألة ٢٣ – ٧) وتعطى بـ :

$$p_n = \rho^n(1-\rho) \tag{٢٣ - ٣}$$

وإذا كانت $\rho > 1$ ، فإن مرات الوصول تكون بمعدل أسرع من تقديم الخدمة ، وبالتالى طول صف الانتظار المتوقع يزيد دون حدود . ولا تحدث حالة سكون أو استقرار . ويحدث نفس الموقف إذا كانت $\rho = 1$

مقاييس الفاعلية : MEASURES OF EFFECTIVENESS

عندما يكون النظام فى حالة الاستقرار ، فإن المقاييس الهامة تكون

متوسط عدد العملاء فى النظام $\equiv L$

متوسط طول الصف $\equiv L_q$

متوسط الزمن الذى يقضيه العميل فى النظام $\equiv W$

متوسط الزمن الذى يقضيه (ينتظره) العميل فى الصف $\equiv W_q$

احتمال أن يقضى العميل أكثر من وحدة زمنية فى النظام $\equiv W(t)$

احتمال أن يقضى العميل أكثر من وحدة زمنية فى الصف $\equiv W_q(t)$

والأربعة مقاييس الأولى ترتبط ببعضها فى كثير من نظم الصفوف كالتالى :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad (٢٣ - ٤)$$

ومن صيغة ليتل (المسألة ٢٣ - ١٠) ، فإن

$$L = \bar{\lambda} W \qquad (٢٣ - ٥)$$

$$L_q = \bar{\lambda} W_q \qquad (٢٣ - ٦)$$

تنطبق صيغة زمن الانتظار (٢٣ - ٤) عندما يكون هناك زمن خدمة واحد متوقع (كما فى النظام M/M/1) ، $1/\mu$ لكل العملاء . وتنطبق صيغة ليتل للنظم العامة ، على أساس أن $\bar{\lambda}$ ترمز إلى متوسط معدل وصول العملاء إلى مكان الخدمة .

للنظام M/M/1 ، فإن $\bar{\lambda} = \lambda$ ، وتكون المقاييس الستة بوضوح هى :

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (٢٣ - ٧)$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (٢٣ - ٨)$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad (٢٣ - ٩)$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \qquad (٢٣ - ١٠)$$

$$W(t) = e^{-t/W} \qquad (t \geq 0) \qquad (٢٣ - ١١)$$

$$W_q(t) = \rho e^{-t/W} \qquad (t \geq 0) \qquad (٢٣ - ١٢)$$

لاحظ من (٢٣ - ١٢) أنه بالرغم من أن الزمن المستغرق فى النظام له توزيع أسى (٢٣ - ١١) ، والزمن المستغرق فى الخدمة له أيضاً توزيع أسى ، فإن الفرق بين هذين الزمنين ، وهو الزمن المستغرق فى صف الانتظار ، لا يكون ذا توزيع أسى .

مسائل محلولة

Solved Problems

٢٣ - ١ بين أنِ « معظم » قيم المتغير العشوائى ذى التوزيع الأُسى تكون أصغر من القيمة المتوسطة .

إذا كان للمتغير   توزيع أُسى ببارامتر   ، تكون القيمة المتوسطة لـ   هى   . من (٢١ - ١٣)

$$P(T \le 1/\beta) = 1 - e^{-1} \approx 0.632$$
$$P(T \le 1/2\beta) = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393$$

لذلك من الممكن القول أن 63 فى المئة من القيم تكون أصغر من المتوسط ، وبعض من الـ 63 فى المئة من هذه القيم تكون أصغر من نصف المتوسط .

٢٣ - ٢ ناقش ما يتضمنه أن يكون كل من زمن الخدمة والزمن بين الوصول ذا توزيع أُسى .

من المسألة (٢٣ - ١) نلاحظ أن أزمنة الخدمة ذات التوزيع الأُسى تعنى أكثرية عدد أزمنة خدمة أقل من المتوسط ، بالاشتراك مع أزمنة خدمة طويلة قليلة العدد ، وتكون هذه هى الحالة ، مثلاً ، فى البنوك عندما يضع عملاء كثيرون أموالاً بسيطة فى البنك تتطلب أزمنة قليلة ، وقليل منهم يحتاج إلى إجراءات معقدة تحتاج إلى أوقات طويلة . وهذه التوزيعات لا تصور بدقة المواقف التى تكون فيها الخدمة متماثلة لكل عميل ، مثل العمل على خط تجميع .

تعنى أزمنة بين الوصول ذات التوزيع الأُسى أكثرية فى عدد أزمنة بين الوصول الأقل من المتوسط ، مع قليل من أزمنة بين الوصول الطويلة . وتكون النتيجة هى أن عدد من العملاء يصلون فى فترة زمنية قصيرة ، لذلك يخلقون صف انتظار ، تتبعه فى النهاية فترة طويلة لا يصل خلالها أى عميل ، وهذا يسمح لمقدم الخدمة بتخفيض طول صف الانتظار .

كما هو مبين فى المسألة (٢١ - ٨) ، فإن التوزيع الأُسى تكون له خاصية ماركوف (أو أقل ذاكرة) :

$$P(T \le a + b \mid T > a) = P(T \le b)$$

عندما تقيس T أزمنة بين الوصول ، فمعنى هذا أن الزمن حتى الوصول التالى لا يعتمد على الزمن منذ آخر وصول . بالنسبة لأزمنة الخدمة ، فإن هذا يعنى أن الزمن اللازم لاستكمال الخدمة للعميل لا يمكن توقعه بمعرفة الزمن الذى قضاه العميل مسبقاً فى الخدمة (بمعنى أنه لا يعتمد على ذلك) .

٢٣ - ٣ يستخدم أحد أقسام ملابس الرجال فى أحد المحلات ترزياً لإصلاح الملابس . ويتبع عدد العملاء الذين يحتاجون لإصلاح ملابس لتوزيع بواسون بمعدل وصول 24 فى الساعة . ويخدم العملاء على أساس من يحضر أولاً يخدم أولاً ، ويرغبون دائماً فى انتظار الترزى لإجراء التصليحات . ويظهر أن الوقت اللازم لإصلاح ملابس العملاء يتبع توزيعاً أُسِّياً بمتوسط دقيقتين .

(أ) ما هو متوسط عدد العملاء فى غرفة إصلاح الملابس ؟

(ب) ما هو الزمن الذى يتوقعه العميل ليقضيه فى غرفة الملابس ؟

(جـ) ما هى النسبة المئوية من الزمن الذى يبقى فيه الترزى بدون عمل ؟

(ء) ما هو احتمال أن ينتظر العميل أكثر من 10 دقائق للحصول على خدمة من الترزى ؟

هذا النظام هو نظام **M/M/1** ، وفيه $\lambda = 24$ كل ساعة

$$\mu = \tfrac{1}{2}\ \text{min}^{-1} = 30\ \text{h}^{-1}$$

و $$\rho = 24/30 = 0.8$$

(أ) من (٢٣ – ٧) $$L = \frac{0.8}{1-0.8} = 4$$ عملاء

(ب) من (٢٣ – ٩) $$W = \frac{1}{30-24} = \tfrac{1}{6}\ \text{س} = 10$$ ق

وتنتج هذه النتيجة من (٢٣ – ٥) :

$$W = \frac{1}{\lambda} L = \frac{1}{24}(4) = \tfrac{1}{6}$$ ساعه

(جـ) يكون الترزى بدون عمل فقط إذا لم يكن هناك أى عميل فى غرفة إصلاح الملابس . وهذا الاحتمال يعطى بـ (٢٣ – ٣) كالتالى :

$$p_0 = \rho^0(1-\rho) = 1(1-0.8) = 0.2$$

ويكون الترزى بدون عمل 20 فى المئة من الوقت .

(د) من (٢٣ – ١٢) عند $W = \tfrac{1}{6}$ س $= 10$ ق $= t$

$$W_q(\tfrac{1}{6}) = (0.8)e^{-1} = 0.2943$$

٢٣ – ٤ فى النظام بالمسألة (٢٣ – ٣) حدد (أ) متوسط الانتظار لخدمة الترزى لكل العملاء ، (ب) متوسط الانتظار لخدمة الترزى للعملاء الذين سينتظرون كلية .

(أ) من (٢٣ – ١٠)

$$W_q = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{0.8}{30-24} = 0.133\ \text{h} = 8$$ دقيقة

(ب) ارمز إلى متوسط الانتظار المطلوب بالرمز W_q' ، ونسبة العملاء الذين يصلون ولا ينتظرون هى $1-\rho$ [وهى احتمال أن أى عميل يصل يجد نظام الخدمة فارغاً ـــ انظر المسألة ٢٣ – ٣ (جـ)] ، ومن ثم يكون متوسط الانتظار لكل العملاء الذين يصلون هو

$$W_q = (1-\rho)(0) + \rho W_q'$$

لذلك

$$W_q' = \frac{1}{\rho} W_q = \frac{1}{\mu-\lambda} = W = 10$$ دقيقة

٢٣ – ٥ يعمل أحد محلات المأكولات بواسطة شخص واحد هو صاحبه . ونمط الوصول للعملاء أيام السبت يتبع توزيع بواسون ، بمعدل وصول 10 أشخاص فى الساعة ويخدم العملاء بأسلوب FIFO (من يصل أولاً يخدم أولاً) ، وبسبب السمعة الحسنة للمحل ، فإن العملاء يرغبون الانتظار للخدمة عندما يصلون إلى المحل . وقُدِّر زمن تقديم الخدمة للعملاء بالتوزيع الأسى بمتوسط زمن خدمة 4 دقائق حدد (أ) احتمال أن يكون هناك صف انتظار ، (ب) متوسط طول صف الانتظار ، (جـ) الزمن المتوقع

الذى يقضيه العميل فى الصف ، (د) احتمال أن يقضى العميل أقل من 12 دقيقة فى المحل .

هذا النظام هو **M/M/1** فيه

$$\lambda = 10\text{س}^{-1} = \tfrac{1}{6}\ \text{دقيقة}^{-1} \qquad \mu = \tfrac{1}{4}\ \text{دقيقة}^{-1} \qquad \rho = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}$$

(أ) احتمال وجود صف هو احتمال وجود شخصين أو أكثر فى النظام . من (٢٣ - ٣) :

$$p_0 = \rho^0(1-\rho) = 1(1-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{3} \qquad p_1 = \rho(1-\rho) = \tfrac{2}{3}(1-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{9}$$

لذلك ، احتمال وجود صف هو

$$1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

(ب) من ٢٣ - ٨)

$$L_q = \frac{(2/3)^2}{1-(2/3)} = \frac{4}{3}\ \text{عميل}$$

(جـ) من (٢٣ - ١٠)

$$W_q = \frac{2/3}{(1/4)-(1/6)} = 8\ \text{دقائق}$$

(د) من (٢٣ - ٤) ، (٢٣ - ١١)

$$W = 8 + 4 = 12\ \text{دقيقة}$$

$$1 - W(12) = 1 - e^{-12/12} = 1 - 0.3679 = 0.6321$$

٢٣ - ٦ حاكِ العملية الموضحة فى المسألة ٢٣ - ٥ .

يوضح جدول ٢٣ - ١ مجموعتين من الأرقام العشوائية موزعتين توزيعاً أُسِّياً ، الأولى ذات بارامیتر 6 / 1 (زمن بين الوصول) والثانية ذات بارامیتر 4 / 1 (زمن الخدمة) وكل القيم محولة إلى أزمنة بالدقائق والثوانى . وكما هو متوقع للتوزيع الأُسى ، فإن معظم القيم فى كل مجموعة (10 من 16 أو 62.5 فى المئة) أصغر من المتوسط النظرى 6 دقائق لزمن بين الوصول ، و 4 لزمن الخدمة . ومتوسط الزمن للعينة فى جدول ٢٣ - ١ هو 6 دقائق ، و 10 ثوانى لزمن بين الوصول ، و 4 دقائق ، و 12 ثانية لزمن الخدمة .

جدول ٢٣ - ١

زمن بين الوصول	زمن الخدمة
0:16	3:30
0:01	3:30
2:37	6:36
10:19	11:45
11:53	5:32
2:57	4:27
1:02	8:17
4:03	15:24
0:59	3:29
0:09	3:12
9:57	2:01
3:44	13:37
7:12	0:40
0:10	0:12
11:51	2:42
0:04	13:43

جدول ٢٣ ، ٢

صف الانتظار	عدد العملاء في الخدمة	زمن المحاكاة
00:00	. . .	. . .
3:30	#1 (0:16)	. . .
3:46	. . .	. . .
7:00	#2 (0:01)	. . .
7:01	. . .	. . .
13:36	#3 (2:37)	. . .
16:13	. . .	. . .
25:21	#4 (10:19)	. . .
30:53	#4 (4:47)	#5 (11:53)
35:20	#4 (0:20)	#5 (11:53), #6 (2:57)
35:40	#5 (11:53)	#6 (2:57)
43:37	#5 (3:56)	#6 (2:57), #7 (1:02)
47:33	#6 (2:57)	#7 (1:02)
50:30	#7 (1:02)	. . .
51:32	. . .	. . .
59:01	#8 (4:03)	
62:30	#8 (0:34)	#9 (0:59)
63:04	#9 (0:59)	. . .
64:03	. . .	. . .
65:42	#10 (0:09)	. . .
65:51	. . .	. . .
67:43	#11 (9:57)	. . .
77:40	. . .	. . .
81:20	#12 (3:44)	. . .
82:00	#12 (3:04)	#13 (7:12)
82:12	#12 (2:52)	#13 (7:12), #14 (0:10)
84:54	#12 (0:10)	#13 (7:12), #14 (0:10), #15 (11:51)
85:04	#13 (7:12)	#14 (0:10), #15 (11:15)
92:16	#14 (0:10)	#15 (11:51)
92:26	#15 (11:51)	. . .
98:37	#15 (5:40)	#16 (0:04)

نحدد أول زمن وصول وزمن خدمة للعميل رقم 1 ، وزمن الوصول والخدمة للعميل رقم 2 ، وهكذا . تبين عملية الصفوف بعد ذلك فى جدول ٢٣ – ٢ ، حيث نبين أزمنة المحاكاة بالجدول الأزمنة التى يصل فيها عميل جديد ، أو يغادر فيها عميل تم تقديم الخدمة له . والأزمنة بين قوسين هى كمية أزمنة الخدمة اللازمة للعملاء المناظرين .

لاحظ كيف يطول الصف عندما يكون زمن الخدمة طويلاً ، بالمقارنة بزمن الوصول القصير ، وكيف يقصر عندما يطول زمن بين الوصول ليسمح لمقدم الخدمة باستيعاب العملاء فى النظام . هذا القِصر والطول فى صف الانتظار هو خاصية مميزة لنظام M/M/1 ، عندما يكون متوسط زمن الخدمة أقصر من متوسط زمن الوصول .

٢٣ ٧ اشتق (٢٣ – ٣) التى تعطى احتمالات حالة الاستقرار لنظام M/M/1 فيه $\rho < 1$.

المعادلات (٢١ – ١) عند $dp_n/dt = 0$ (حالة مستقرة) ، $\mu_n = \mu$ ، $\lambda_n = \lambda$ تصبح معادلات الاتزان .

$$p_{n+1} = (\rho + 1)p_n - \rho p_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (١)$$

$$p_1 = \rho p_0 \qquad (٢)$$

تعطى المعادلة (٢) p_1 بدلالة p_0 ، وكل احتمالات الحالة المستقرة الأخرى يمكن الحصول عليها بدلالة p_0 بحل (١) عكسياً

$$n = 1: \quad p_2 = (\rho + 1)p_1 - \rho p_0 = (\rho + 1)(\rho p_0) - \rho p_0 = \rho^2 p_0$$

$$n = 2: \quad p_3 = (\rho + 1)p_2 - \rho p_1 = (\rho + 1)(\rho^2 p_0) - \rho(\rho p_0) = \rho^3 p_0$$

$$n = 3: \quad p_4 = (\rho + 1)p_3 - \rho p_2 = (\rho + 1)(\rho^3 p_0) - \rho(\rho^2 p_0) = \rho^4 p_0$$

وبوجه عام

$$p_n = \rho^n p_0 \qquad (٣)$$

وحيث إن مجموع الاحتمالات يجب أن يساوى واحداً ، $0 < \rho < 1$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = p_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

لذلك ، $p_0 = 1 - \rho$، وتصبح (٣) هى (٢٣ - ٣) .

٢٣ - ٨ اشتق (٢٣ - ٧)

باستخدام تعريف القيم المتوقعة ونتائج المسألة ٢٣ - ٧ ، نحسب عدد العملاء المتوقع فى نظام M/M/1 كالتالى

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \rho(1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)$$
$$= \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

٢٣ - ٩ اشتق (٢٣ - ٤)

ارمز للزمن الذى يقضيه العميل فى النظام بالرمز T ، والزمن الذى يقضيه فى الصف بالرمز T_q ، وزمن الخدمة بالرمز T_s . وكل هذه الرموز متغيرات عشوائية فيها

$$T = T_q + T_s$$

لذلك

$$E(T) = E(T_q) + E(T_s)$$

زمن الخدمة المتوقع هو $E(T_s) = 1/\mu$. نرمز لـ $E(T)$ بالرمز W ، $E(T_q)$ بالرمز W_q ، لذلك تنطبق (١) مع (٢٣ - ٤) .

٢٣ - ١٠ استنتج صيغة ليتل بالاجتهاد الشخصى

أثناء متوسط زمن بقاء العميل فى النظام ، W يصل عملاء جدد بمعدل λ ، لذلك ، فى نهاية وحدات زمنية W ، يتوقع عملاء جدد λW فى النظام . بمعنى أنه عندما يغادر العميل الأصلى النظام ، فإن هذا العميل يتوقع أن يجد λW عميل باقين فى النظام . وحيث إن إحصائيات صف الانتظار لا تعتمد على الزمن فى الحالة المستقرة ، فإن $L = \lambda W$ دائماً .

وتستنتج (٢٣ - ٦) بالمثل بإحلال W, L ، وكلمة « نظام » بالرموز W_q, L_q ، والكلمة « صف انتظار » على التوالى ، فى الفقرة السابقة .

٢٣ - ١١ فى نظام M/M/1 هل $L_q = L - 1$ ؟

لا :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=1}^{\infty} np_n \qquad L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)p_n$$

ولذلك

$$L - L_q = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 - p_0 = \rho$$

٢٣ - ١٢ بيّن أن $S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ ، ومجموع عدد k من المتغيرات العشوائية المستقلة بالتبادل ذات التوزيع الأسى ، ولكل منها بارامتر μ يكون لها نوع إرلانج k ، أو توزيع جاما

$$P(S_k \le t) = \int_0^t \frac{\mu^k \tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\tau} d\tau \qquad (t \ge 0) \tag{١٣ - ٢٣}$$

ترجم المتغيرات T على أنها أول عدد مرات وصول k فى عملية ميلاد لبواسون لها مجمع أولى صفر . عندئذ يكون المجتمع عند الزمن t هو k أو أكثر ، فقط إذا $S_k \le t$ ، بمعنى

$$P(S_k \le t) = P(N(t) \ge k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \tag{١}$$

حيث إننا قد استخدمنا (٢١ - ٩) بإحلال λ ، بدلاً من μ .

وكطريقة لإثبات التكافؤ بين (١) ، (٢٣ - ١٣) هو أن نبين أن لهما نفس المشتقة الأولى (دالة كثافة الاحتمال لـ S_k) ، ونفس القيمة عند $t = 0$ (وواضح أنهما كذلك) بتفاضل (٢٣ - ١٣) .

$$f_k(t) = \frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}$$

بتفاضل (١)

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} (nt^{n-1}e^{-\mu t} - \mu t^n e^{-\mu t}) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu t} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\mu^{n+1} t^n}{n!} e^{-\mu t} \\ &= \frac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} \end{aligned}$$

وبذلك يستكمل البرهان

٢٣ - ١٣ استنتج (٢٣ - ١٢)

للحصول على توزيع T_q ، وهو الزمن الذى يقضيه العميل فى الصف لنظام M/M/1 ، استخدم الاحتمالات المشروطة (المسألة ١٧ - ٥) . إذا وصل عميل ، ووجد أن النظام فى الحالة 0 ، فإن $T_q = 0$ ، وإذا وجد العميل أن النظام فى الحالة k $(k = 1, 2, \ldots)$ فإنه ، بسبب خاصية اللاذاكرة (المسألة ٢٣ - ٢) لزمن الخدمة الحالى $T_q = S_k$ (انظر المسألة ٢٣ - ١٢) . وبالتالى ، عند $t \ge 0$

$$W_q(t) = P(T_q > t) = 1 - P(T_q \le t) = 1 - \left[p_0 P(0 \le t) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k P(S_k \le t)\right]$$

$$= 1 - \left[(1-\rho)(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (1-\rho) \int_0^t \frac{\mu^k \tau^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu\tau} d\tau\right]$$

$$= \rho - \rho\mu(1-\rho) \int_0^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu\rho\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\right] e^{-\mu\tau} d\tau = \rho - \rho\mu(1-\rho) \int_0^t e^{\mu\rho\tau} e^{-\mu\tau} d\tau$$

$$= \rho - \rho\mu(1-\rho) \int_0^t e^{-\mu(1-\rho)\tau} d\tau = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho e^{-t/W}$$

مسائل مكملة

Supplementary Problems

٢٣ - ١٤ يعمل موظف واحد بمحل أيس كريم . يصل العملاء طبقاً لتوزيع بواسون بمتوسط معدل وصول 30 فى الساعة . يخدم العملاء بأسلوب FIFO (من يحضر أولاً يُخدم أولاً) ، وبسبب جودة الأيس كريم ، فإنهم يرغبون البقاء حتى الحصول على الخدمة . وزمن الخدمة للعميل يظهر أنه يتبع التوزيع الأسى بمتوسط $1\frac{1}{2}$ دقيقة . حدد (أ) متوسط عدد العملاء المنتظرين للخدمة . (ب) الزمن الذى يتوقعه العميل لانتظار الخدمة . (جـ) احتمال أن يقضى العميل أكثر من 15 دقيقة فى الصف . (د) احتمال أن يكون بائع الآيس كريم بدون عمل .

٢٣ - ١٥ محل الحلاقة به عامل واحد . لا يعطى المحل مواعيد ، ولكن العملاء يُخدمون بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً . وبسبب سمعة المحل ، فإن العملاء عندما يذهبون إلى المحل يرغبون فى البقاء به للحصول على الخدمة . يتبع الوصول نمط بواسون ، بمتوسط معدل وصول اثنين فى الساعة . وزمن الخدمة للحلاقة ذو توزيع أسى بمتوسط 20 . حدد (أ) عدد العملاء المتوقع فى المحل . (ب) العدد المتوقع للعملاء منتظرى الخدمة . (جـ) متوسط الزمن الذى يقضيه العميل فى المحل . (د) احتمال أن يقضى العميل أكثر من متوسط الزمن فى المحل .

٢٣ - ١٦ يحدد نمط الوصول لعربات فى حارة واحدة لشباك أحد البنوك بعملية بواسون ، بمعدل واحدة لكل دقيقة . يظهر أن زمن الخدمة للموظف يتبع التوزيع الأسى بمتوسط 45 ثانية . بافتراض أن العربة التى تصل ستنتظر حسب الضرورة ، حدد : (أ) العدد المتوقع للعربات المنتظرة للخدمة . (ب) متوسط الزمن الذى تنتظرة العربة للخدمة . (جـ) متوسط الزمن الذى تقضيه العربة فى النظام . (د) احتمال أن تكون هناك عربات منتظرة بالشارع إذا كانت أرض البنك لا تستوعب أكثر من خمس عربات .

٢٣ - ١٧ تطلب الطائرات السماح بالهبوط على مهبط واحد فى أحد المطارات بمعدل طائرة واحدة كل 5 دقائق ، وتتبع توزيع بواسون . تهبط الطائرات بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً ، والزمن اللازم لمراقب الحركة لهبوط طائرة يختلف طبقاً لمهارة كابتن الطائرة ، وله توزيع أسى بمتوسط 3 دقائق . حدد (أ) متوسط عدد الطائرات فى الجو . (ب) متوسط عدد الطائرات التى طلبت السماح بالهبوط ، ومازالت فى الجو . (جـ) احتمال أن الطائرة التى تصل تكون على الأرض فى زمن أقل من 10 دقائق بعد أول طلب سماح بالنزول . (د) احتمال أن يكون هناك أكثر من ثلاث طائرات فى الجو .

٢٣ - ١٨ يتلقى أحد كاتبى الآلة الكاتبة عمله طبقاً لتوزيع بواسون ، بمعدل متوسط أربعة طلبات فى الساعة . تُخدم الأعمال بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً بمتوسط زمن خدمة (كتابة) 12 دقيقة ، وزمن الكتابة للأعمال يتبع التوزيع الأسى . حدد . (أ) احتمال أن الطلب الذى يصل سينتهى فى أقل من 45 دقيقة . (ب) احتمال أن كل الأعمال التى ستُطلب من الكاتب ستنتهى قبل نهاية يوم العمل . (جـ) احتمال أن يأخذ الطلب أقل من 12 دقيقة للانتهاء بمجرد أن يبدأ فيه الكاتب .

٢٣ - ١٩ يقوم الميكانيكيون بطلب قطع غيار للسيارات التى يقومون بإصلاحها بإحدى الورش ، ويذهبون إلى المخزن لطلبها . ويُخدم الميكانيكيون بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً بواسطة عامل المخزن . يصل الميكانيكيون بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 35 فى الساعة ، وينتظرون دورهم إذا كان عامل المخزن مشغولاً مع أحد العمال الآخرين . وفى المتوسط ، يحتاج عامل المخزن 1 دقيقة لخدمة الميكانيكى الواحد ، بزمن خدمة موزع أُسياً حول متوسطه . ما هى تكلفة الساعة المتوقعة لورشة الإصلاح حتى يحصل الميكانيكيون على طلباتهم من قطع الغيار إذا كان أجر الميكانيكى الواحد 12 دولاراً فى الساعة .

٢٣ - ٢٠ تصل السيارات إلى مكان الخدمة طبقاً لتوزيع بواسون بمعدل 10 فى اليوم . ومكان الخدمة يستطيع خدمة سيارة واحدة فى الوقت الواحد . ويوزع زمن الخدمة أُسياً حول متوسطة 12 /1 يوم . وتتكلف شركة السيارات 200 دولار فى اليوم لتشغيل مكان الخدمة ، و 50 دولاراً لكل يوم إذا بقيت السيارة بمكان الخدمة . بشراء معدة جديدة ترفع التكلفة اليومية لمكان الخدمة إلى 245 دولار يمكن لشركة السيارات تخفيض زمن الخدمة إلى 15 /1 يوم . هل هذا التعديل مناسب إقتصادياً ؟

٢٣ - ٢١ تصل المشغولات إلى مكان التفتيش بعملية بواسون بمعدل متوسط اثنين فى الساعة ، ويتم تفتيشهما على أساس FIFO . يقوم مهندس الجودة بالتفتيش والإصلاحات البسيطة معاً إذا كان هذا هو المطلوب لقبول الشغلة . زمن الخدمة الإجمالى للشغلة يتبع التوزيع الأُسى بمتوسط 25 دقيقة . والمشغولات التى تصل ، ولا يمكن تفتيشها بسبب انشغال المهندس تبقى حتى يفرغ المهندس من عمله . تحتاج كل شغلة 10 قدم مربع للبقاء بمكان التفتيش . ما هى مساحة الأرض التى يجب أن تتوفر إذا كان الهدف هو توفير مساحة كافية بمكان التفتيش 90 فى المئة من الوقت ؟ .

٢٣ - ٢٢ حدد تأثير مضاعفة كلٍ من λ ، μ على L ، L_q ، W فى نظام M/M/1 .

٢٣ - ٢٣ أوجد الاحتمال المشروط بأن يوجد $n \geq 2$ عميل فى نظام M/M/1 ، علماً بأن هناك صف انتظار .

٢٣ - ٢٤ حدد عدد العملاء المتوقع فى الصف فى النظام M/M/1 عندما يكون هناك صف . (ملحوظة : استخدم نتائج المسألة ٢٣ - ٢٣) .

٢٣ - ٢٥ استنتج (٢٣ - ٨) بدون استخدام صيغة ليتل ، بحساب عدد العملاء المتوقع فى الصف مباشرة .

٢٣ - ٢٦ استنتج معادلة الاتزان (انظر المسألة ٢٣ - ٧) مباشرة باستخدام حقيقة أنه فى الحالة المستقرة يكون المعدل المتوقع لانتقال النظام إلى الحالة n يساوى المعدل المتوقع للانتقال من الحالة n . (لاحظ أن المعدل المتوقع للعملاء إلى ، ومن الحالة n ، $\lambda_n = \lambda$ ، $\mu_n = \mu$ ، يكون متساوياً بوجه عام) .

٢٣ - ٢٧ استخدم طريقة دالة التوليد المقترحة فى المسألة ٢١ - ٧ لحل معادلات الاتزان لنظام M/M/1 .

٢٣ - ٢٨ بدون استخدام المسألة ٢٣ - ٢٦ تحقق أن معدل متوسط المغادرة من الحالة المستقرة لنظام M/M/1 يساوى معدل متوسط الوصول إلى النظام .

النظم الأخرى بمدخلات من نوع بواسون

Other Systems with Poisson-Type Input and Exponential-Type Service Times

عمليات الحالة المعتمدة STATE-DEPENDENT PROCESSES

في كثير من مواقف صفوف الانتظار نجد أن عدد مرات وصول العملاء لا يكون عملية بواسون بالتحديد ذات بارامتر ثابت λ ، وبدلاً من ذلك ، فإن عدد مرات الوصول يكون عملية شبيه بواسون ذات بارامتر λ يتغير طبقاً لعدد العملاء في النظام . وقد يحدث أيضاً أن تكون المغادرة من النظام ليست ذات معدل ثابت μ ، كما في حالة مقدم الخدمة الأحادي ، ذات زمن خدمة موزع أسياً . وفضلاً عن ذلك .. فإن المغادرة تكون ، في حالة مقدم خدمة أحادي ، ذات توزيع شبيه بالأسي ، وفيه تتغير μ طبقاً لحالة النظام . يمكن تمثيل عملية الصفوف هذه كعملية ميلاد وموت عامة لماركوف (فصل ٢١) فيها كل من $\lambda_n \Delta t$ ، $\mu_n \Delta t$ تعطى على التوالي عدد مرات الوصول والمغادرة المتوقعين في فترة زمنية قصيرة Δt ، إذا كان النظام في الحالة n في بداية الفترة الزمنية . واحتمالات الحالة المستقرة لهذه العمليات تحقق :

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} \qquad \text{أو} \qquad p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0 \tag{٢٤ - ١}$$

وفيها تتحدد p_0 تحت شرط أن مجموع كل الاحتمالات يساوي واحداً . وهذا المجموع يقترب من الواحد ، على أساس أن λ لا تكون كبيرة بالنسبة لـ μ . وعلى الأخص ، فإن الحالة المستقرة تتأكد إذا كان

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \leq \theta < 1$$

لكل قيم n .

صيغ ليتل LITTLE'S FORMULAS

تتحقق صيغ ليتل (٢٣ - ٥) ، (٢٣ - ٦) للعمليات المشروحة أعلاه ، حيث إن

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n \tag{٢٤ - ٢}$$

وهو متوسط معدل وصول العملاء الى نظام الخدمة .

وفي أي نظام صفوف ، يكون عدد العملاء المتوقع في النظام هو :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n$$

وعدد العملاء المتوقع فى الصف هو :

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} [\text{اكبر } \{n - s_n, 0\}] p_n$$

حيث إن s_n هو عدد مقدمى الخدمة المتاحين فى الحالة n . إذا أمكن تحديد قيم L ، L_q ، فإنه بمعرفة $\bar{\lambda}$ يمكن مباشرة إيجاد قيم W ، W_q من صيغ ليتل .

التزاحم والتخطى BALKING AND RENEGING

يحدث التزاحم عندما يصل عميل إلى مكان الخدمة ، ويرفض الدخول إليه بسبب طول صف الانتظار . ارمز إلى احتمال أن أحد العملاء سيتزاحم عندما يجد n عميلاً فى النظام باسم دالة التزاحم $b(n)$ ، فيكون احتمال ألا يتزاحم العميل هو $1 - b(n)$. إذا كان نمط الوصول إلى مكان الخدمة ذا حالة مستقلة بمتوسط معدل وصول λ ، فإن معدل وصول العملاء المتوقع إلى مكان الخدمة يكون

$$\lambda_n = [1 - b(n)]\lambda \qquad (٢٤ - ٣)$$

وهى حالة معتمدة . (انظر المسألة ٢٤ - ٤) .

يحدث التخطى عندما يترك أحد العملاء الصف بعد أن ينضم إليه بسبب طول وقت الانتظار . والنتيجة النهائية لذلك هى زيادة معدل خدمة العملاء بالنظام . ويمكن تمثيل نظام An M/M/1 فيه تخطى بعملية حالة معتمدة فيها :

$$\mu_n = \mu + r(n) \qquad (٢٤ - ٤)$$

وهنا ، $r(n)$ تكون دالة تخطى تعرف بـ

$$r(n) \equiv \text{نها}_{\Delta t \to 0} \frac{P\,(\text{عميل يتخطى فى زمن } \Delta t \text{ / عندما } n \text{ عميل يكون فى النظام})}{\Delta t}$$

وحيث إنه لا يحدث تخطٍ عندما لا يكون هناك صف انتظار ، فان $r(0) = r(1) = 0$. انظر المسألة (٢٤ - ١٠) .

نظم م / م / س M/M/s SYSTEMS

نظام M/M/s هو عملية صفوف لها نمط وصول بواسون ذات s مقدم خدمة ، س زمن خدمة مستقل ، موزعين بالتشابة بتوزيع أسى (لا يعتمد على حالة النظام) ، ذات طاقة غير محدودة ، وبنظام FIFO ونمط الوصول يكون حالة مستقلة فيها $\lambda_n = \lambda$ لكل قيم n . وزمن الخدمة المرتبط بكل مقدم خدمة يكون حالة مستقلة ، ولكن حيث إن عدد مقدمى الخدمة الذين يتعاملون مع العملاء (أى غير العاطلين) يعتمد على عدد العملاء بالنظام ، فإن الزمن الفعلى الذى يأخذه النظام للتعامل مع العملاء من خلال إمكانيات النظام يكون أيضاً معتمداً على الحالة . وعلى الأخص ، إذا كان $1/\mu$ متوسط زمن الخدمة لمقدم خدمة واحد للتعامل مع عميل واحد ، فإن متوسط معدل الخدمة عندما يكون هناك n عميل فى النظام يكون

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & (n = 0, 1, \ldots, s) \\ s\mu & (n = s+1, s+2, \ldots) \end{cases}$$

وتتحقق حالة الاستقرار عندما يكون

$$\rho \equiv \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

وتعطى احتمالات حالة الاستقرار بالمعادلة (٢٤ - ١) كالتالى :

$$p_0 = \left[\frac{s^s\rho^{s+1}}{s!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{s} \frac{(s\rho)^n}{n!}\right]^{-1} \qquad (٢٤ - ٥)$$

و

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(s\rho)^n}{n!} p_0 & (n = 1, \ldots, s) \\ \dfrac{s^s\rho^n}{s!} p_0 & (n = s+1, s+2, \ldots) \end{cases} \qquad (٢٤ - ٦)$$

انظر المسألة (٢٤ - ٥) . عندما تعطى p_0 بالمعادلة (٢٤ - ٥)

$$L_q = \frac{s^s\rho^{s+1}p_0}{s!\,(1-\rho)^2} \qquad (٢٤ - ٧)$$

وبمجرد أن تتحدد L_q ، نحصل على W_q ، W ، L من (٢٣ - ٦) ، (٢٣ - ٤) ، (٢٣ - ٥) على التوالى عند $\bar{\lambda} = \lambda$. تنطبق هنا المعادلة (٢٣ - ٤) ، بسبب أنه بصرف النظر عن حالة النظام ، فإن زمن الخدمة المتوقع لكل عميل له القيمة الثابتة $1/\mu$ وأكثر من ذلك ..

$$W(t) = e^{-\mu t}\left\{1 + \frac{(s\rho)^s p_0[1 - e^{-\mu t(s-1-s\rho)}]}{s!(1-\rho)(s-1-s\rho)}\right\} \qquad (t \geq 0) \qquad (٢٤ - ٨)$$

$$W_q(t) = \frac{(s\rho)^s p_0}{s!\,(1-\rho)} e^{-s\mu t(1-\rho)} \qquad (t \geq 0) \qquad (٢٤ - ٩)$$

انظر المسألة (٢٤ - ٥ ، ٢٤ - ٦)

نظم م / م / ١ / ك M/M/1/K SYSTEMS

يستطيع نظام م / م / ١ / ك إستيعاب عدد من العملاء K بحد أقصى فى نظام الخدمة فى نفس الوقت . ولا يسمح للعملاء الذين يصلون إلى مكان الخدمة وهو مملوء أن ينظروا خارجه للدخول فى وقت لاحق . فإذا كانت λ تعبر عن متوسط معدل وصول العملاء إلى مكان الخدمة ، فإن متوسط معدل الوصول والدخول فى الخدمة إذا كان النظام فى حالة n هو

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (n = 0, 1, \ldots, K-1) \\ 0 & (n = K, K+1, \ldots) \end{cases}$$

ونصل دائما إلى حالة الثبات ، مهما كانت قيمة $\rho \equiv \lambda/\mu$ ، وذلك باحتمالات معطاه فى المعادلة (٢٤ - ١) . مثل $p_n = 0 \ (n > K)$ و $n = 0, 1, \ldots, K$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{1}{K+1} & (\rho = 1) \end{cases} \qquad (٢٤ - ١٠)$$

وتكون مقاييس الفاعلية هي

$$L = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} & (\rho \neq 1) \\ \dfrac{K}{2} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (١١ - ٢٤)$$

حيث تحدد W_q ، W ، L_q ، من المعادلات (٢٣ - ٥) ، (٢٣ - ٤) و (٢٣ - ٦) على التوالي ، وهنا تكون

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - p_K) \quad (١٢ - ٢٤)$$

أنظر المسألة (٢٤ - ٧)

نظم م / م / س / ك M/M/s/K SYSTEMS

نظام M/M/s/K هو نظام ذو طاقة محدودة ذات s مقدم خدمة لهم أزمنة خدمة مستقلة ، موزعين بالتماثل بالتوزيع الأسى (لا يعتمد على حالة النظام) ، حيث إن طاقة النظام يجب أن تكون على الأقل بنفس عدد مقدمى الخدمة ، $s \le K$. لهذا النظام :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (n = 0, 1, \ldots, K-1) \\ 0 & (n = K, K+1, \ldots) \end{cases} \qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu & (n = 0, 1, \ldots, s) \\ s\mu & (n = s+1, s+2, \ldots) \end{cases}$$

وتوجد احتمالات الحالة المستقرة لكل قيم $\rho \equiv \lambda/s\mu$ ، وتعطى بالمعادلة (٢٤ - ١) كما في

$$p_0 = \begin{cases} \left[\dfrac{s^s\rho^{s+1}(1-\rho^{K-s})}{s!\,(1-\rho)} + \displaystyle\sum_{n=0}^{s} \dfrac{(s\rho)^n}{n!}\right]^{-1} & (\rho \neq 1) \\ \left[\dfrac{s^s}{s!}(K-s) + \displaystyle\sum_{n=0}^{s} \dfrac{s^n}{n!}\right]^{-1} & (\rho = 1) \end{cases} \quad (١٣ - ٢٤)$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(s\rho)^n}{n!} p_0 & (n = 1, 2, \ldots, s) \\ \dfrac{s^s\rho^n}{s!} p_0 & (n = s+1, \ldots, K) \\ 0 & (n = K+1, K+2, \ldots) \end{cases} \quad (١٤ - ٢٤)$$

وتكون مقاييس الفعالية هي

$$L_q = \frac{s^s\rho^{s+1}}{s!(1-\rho)^2}[1 - \rho^{K-s} - (1-\rho)(K-s)\rho^{K-s}]p_0 \quad (١٥ - ٢٤)$$

ونحصل على L ، W ، W_q من المعادلة (٢٣ - ٦) ، (٢٣ - ٤) ، (٢٣ - ٥) على التوالي : وتُعطى $\bar{\lambda}$ مرة أخرى بالمعادلة (٢٤ - ١٢) . (انظر المسألة ٢٤ - ٨) . والنظام M/M/1/K هو حالة خاصة من النظام M/M/s/K وفيه $s = 1$ (انظر المسألة ٢٤ - ٢٨) .

مسائل محلولة
Solved Problems

٢٤ - ١ فى أحد محلات البقالة يعمل موظف واحد على الخزينة ، ويعمل كعامل تعبئة عندما يكون المحل غير مزدحم . يصل العملاء إلى مكان الخزينة بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 30 فى الساعة . والوقت اللازم من الموظف لحساب مشتريات العميل وتعبئة المشتريات واستلام النقود يوزع أُسيًّا بمتوسط 2 دقيقة . عندما يوجد ثلاثة أو أكثر من العملاء عند الخزينة (بما فيهم العميل الذى يكون فى الخدمة فعلًا) ، يطلب موظف آخر من العمل لمساعدة موظف الخزينة فى التعبئة . عندما يعمل الموظفان معاً يظل زمن الخدمة للعملاء بالتوزيع الأُسى ، ولكن بمعدل دقيقة واحدة . حدد : (أ) متوسط عدد العملاء عند الخزينة فى نفس الوقت . (ب) الفترة الزمنية التى يتوقعها العميل للانتظار عند الخزينة . (جـ) الفترة الزمنية التى يتوقعها العميل للانتظار قبل بدء إنهاء حسابه مع الخزينة .

خلال عملية الوصول يظل معدل الوصول حالة مستقلة عند $\lambda_n = \lambda = 30\ \mathrm{h}^{-1}$ فى الساعة ، ومع ذلك تكون أزمنة الخدمة حالة معتمدة . وعندما يكون هناك أقل من ثلاثة عملاء أو أكثر عند الخزينة ، يكون متوسط زمن الخدمة دقيقتين ، لذلك يكون متوسط معدل الخدمة 30 فى الساعة . وعندما يكون هناك ثلاثة عملاء أو أكثر عند الخزينة ، يكون متوسط زمن الخدمة دقيقة واحدة ؛ لذلك يزيد متوسط معدل الخدمة إلى 60 فى الساعة . لذلك ..

$$\mu_n = \begin{cases} 30\ \mathrm{h}^{-1} & (n = 1, 2) \\ 60\ \mathrm{h}^{-1} & (n = 3, 4, \ldots) \end{cases}$$

لاحظ أنه إذا أدى أى وصول جديد إلى تغيير النظام من 2 إلى 3 ، فإن العميل الذى فى الخدمة يتعرض فوراً إلى توزيع أُسى جديد (خاصية اللاذاكرة) .

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{30}{30} p_0 = p_0 \qquad p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{30}{30}(p_0) = p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{30}{60}(p_0) = \tfrac{1}{2} p_0 \qquad p_4 = \frac{\lambda_3}{\mu_4} p_3 = \frac{30}{60}(\tfrac{1}{2} p_0) = (\tfrac{1}{2})^2 p_0$$

وبوجه عام ..

$$p_n = (\tfrac{1}{2})^{n-2} p_0 \qquad (n \geq 2)$$

لإيجاد p_0 ، نحل :

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 + p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} p_n = 2p_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-2} p_0$$
$$= 2p_0 + 2p_0 = 4p_0$$

ونحصل على $p_0 = 1/4$. لذلك ..

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{4} & (n = 0, 1) \\ (\frac{1}{2})^n & (n = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

وتكون دالة التوليد لهذه الاحتمالات هى :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{2 + z + z^2}{8 - 4z}$$

(أ)

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \left.\frac{dF}{dz}\right|_{z=1} = \frac{28}{16} = 1.75 \text{ عميل}$$

(ب) حيث إن $\bar{\lambda} = \lambda = 30$ فى الساعة

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{1.75}{30} = 0.05833 \text{ ساعة} = 3.5 \text{ دقيقة}$$

(جـ) بسبب أن موظف الخزينة وعامل التعبئة يعملان معاً ، فيكون عدد مقدمى الخدمة حالة مستقلة عند $s_n = 1$

$$L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n = L - (1-p_0) = 1.75 - 0.75 = 1.00 \text{ عميل}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{1.00}{30} = 0.0333 \text{ ساعة} = 2 \text{ دقيقة}$$

لاحظ أن متوسط زمن الخدمة للعميل هو

$$W - W_q = 1.5 \text{ دقيقة}$$

٢٤ - ٢ أعد حل المسألة (٢٤ - ١) إذا حضر الموظف الآخر مستقلًا ، ويعمل كعامل خزينة وتعبئة على التوازى مع الآخر . عندما يتبقى عميلان فقط ، يترك الموظف الثانى مكان الخزينة ، ويعود إذا وصل عدد العملاء إلى ثلاثة .
هل يُفضل هذا الوضع من وجهة نظر العملاء ؟

λ_n ، μ_n هى نفسها كما فى المسألة (٢٤ - ١) ؛ لذلك تبقى احتمالات الحالات ، L ، W بدون تغيير . مع ذلك .. يكون عدد مقدمى الخدمة الآن حالة معتمدة . فيها

$$s_n = \begin{cases} 1 & (n = 0, 1, 2) \\ 2 & (n = 3, 4, \ldots) \end{cases}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} L_q &= 1p_2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)p_n = p_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)p_n + p_1 \\ &= p_2 + L - 2(1-p_0) + p_1 = \tfrac{1}{4} + 1.75 - 2(\tfrac{3}{4}) + \tfrac{1}{4} = 0.75 \text{ عميل} \\ W_q &= \frac{0.75}{30} = 0.025 \text{ h} = 1.5 \text{ دقيقة} \end{aligned}$$

بالمقارنة بالموقف فى المسألة ٢٤ - ١ ينتظر العملاء الخدمة متوسط 0.5 دقيقة أقل ، ويقضون بالخدمة متوسط 0.5 دقيقة أكثر ، ربما يفضلون هذا البديل .

٢٤ - ٣ اشتق (٢٤ - ١) .

بوضع $dp_n/dt = 0$ (شرط حالة الاستقرار) ، فمن معادلات كولموجوروف لعملية الميلاد والموت العامة لماركوف (٢١ - ١) نحصل على الآتى بعد الترتيب

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_n + \mu_n}{\mu_{n+1}} p_n - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} p_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{١}$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \tag{٢}$$

تعطى المعادلة (2) p_1 بدلالة p_0 . وبحل (١) بالتكرار نجد أن

$$p_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} p_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0\right) - \frac{\lambda_0}{\mu_2} p_0 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} p_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} p_1 \\ &= \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0\right) - \frac{\lambda_1}{\mu_3} \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0\right) = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0 \end{aligned}$$

وبوجه عام .. $p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1}$ أو $p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0$

٢٤ - ٤ يقوم أحد أصحاب محلات بيع الجرائد والسجائر بخدمة عملائه بمتوسط عميل واحد كل 30 ثانية ، والتوزيع الفعلى هو التوزيع الأسى . يصل العملاء طبقا لعملية بواسون بمعدل متوسط ثلاثة فى الدقيقة ، وينتظرون الخدمة إذا كان صاحب المحل مشغولاً بخدمة عميل آخر . يختار بعض العملاء ألا ينتظر ويذهب إلى مكان آخر لتلقى الخدمة . واحتمال ألا ينتظر العميل بسبب طول الصف هو $n/3$ ، حيث إن n هو عدد العملاء أصلًا فى المحل . ما هو الربح الذى يتوقع أن يخسره صاحب المحل من العملاء الذين يذهبون إلى مكان آخر ، إذا كان متوسط الربح للعميل هو 30 سنتاً .

حيث إن احتمال رفض الانتظار هو 1 عندما يكون هناك ثلاثة عملاء فى المحل ، فإن المحل لن يتعامل مع أكثر من ثلاثة عملاء فى نفس الوقت ، وتكون الحالات الممكنة هى 0 , 1 , 2 , 3 . ونأخذ دالة التراحم لتكون

$$b(n) = \begin{cases} n/3 & (n = 0, 1, 2, 3) \\ 1 & (n = 4, 5, \ldots) \end{cases}$$

متوسط معدل وصول العملاء إلى المخزن هو $\lambda = 3$. ، حيث إنه من (٢٤ - ٣) يكون معدل الوصول إلى المخزن هو

$$\lambda_0 = (1-\tfrac{0}{3})(3) = 3 \qquad \lambda_1 = (1-\tfrac{1}{3})(3) = 2 \qquad \lambda_2 = (1-\tfrac{2}{3})(3) = 1$$

و $\lambda_n = (1-1)(3) = 0$ عندما $n = 3, 4, \ldots$ ، ومعدل الخدمة يكون حالة مستقلة عند $\mu_n = \mu = 2$ عميل فى الدقيقة . من (٢٤ - ١) :

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \tfrac{3}{2} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \tfrac{2}{2}(\tfrac{3}{2} p_0) = \tfrac{3}{2} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2} p_0) = \tfrac{3}{4} p_0$$

و $p_n = 0 \ (n = 4, 5, \ldots)$. وشرط أن مجموع الاحتمالات هو 1 يعطى $p_0 = 4/19$. ومن ثم ..

$$p_1 = \frac{6}{19} \qquad p_2 = \frac{6}{19} \qquad p_3 = \frac{3}{19} \qquad p_n = 0 \quad (n > 3)$$

والمعدل المتوقع الذى يرفض فيه العملاء الانتظار هو

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) p_n = (3-3)\frac{4}{19} + (3-2)\frac{6}{19} + (3-1)\frac{6}{19} + (3-0)\frac{3}{19} + 0 + 0 + \cdots$$

$= 1.4211$ عميل فى الدقيقة

٢٤ - ٥ عند بنك صغير موظفان اثنان ذوا كفاءة متساوية . ويستطيع كل منهما التعامل مع العملاء وانهاء اجراءاتهم بمعدل 60 كل ساعة بزمن خدمة فعلى موزع أُسّياً . يصل العملاء إلى البنك طبقاً لعملية بواسون بمعدل متوسط 100 فى الساعة . حدد : (أ) احتمال أن يكون بالبنك أكثر من ثلاثة عملاء فى نفس الوقت . (ب) احتمال أن يكون أحد الموظفين بدون عمل . (جـ) احتمال أن يقضى العميل أكثر من ثلاث دقائق فى البنك .

هذا النظام هو M/M/2 فيه $\lambda = 100$ ، $\mu = 60$. ، حيث إن

$$\rho = \frac{100}{2(60)} = \frac{5}{6} < 1$$

وتظهر حالة الاستقرار أخيراً . باستخدام (٢٤ - ٥) نحسب

$$\frac{1}{p_0} = \frac{2^2(5/6)^3}{2!\,[1-(5/6)]} + \sum_{n=0}^{2} \frac{(5/3)^n}{n!} = \frac{125}{18} + \frac{1}{0!}\left(\frac{5}{3}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{5}{3}\right)^1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{5}{3}\right)^2 = 11$$

أو $p_0 = 1/11 = 0.0909$. وتتحدد باقى احتمالات الحالة المستقرة بعد ذلك من (٢٤ - ٦)

$$p_1 = \frac{(5/3)^1}{1!}\left(\frac{1}{11}\right) = 0.1515$$

$$p_2 = \frac{(5/3)^2}{2!}\left(\frac{1}{11}\right) = 0.1263$$

$$p_3 = \frac{2^2(5/6)^3}{2!}\left(\frac{1}{11}\right) = 0.1052$$

$$p_4 = \rho p_3 = \frac{5}{6}(0.1052) = 0.0877$$

وهكذا

(أ) $$1-(p_0+p_1+p_2+p_3) = 1-(0.0909+0.1515+0.1263+0.1052) = 0.5261$$

(ب) يكون الموظف بدون عمل إذا لم يكن هناك عملاء فى البنك ، أو إذا كان هناك عميل واحد فى البنك ، وهذا العميل يجرى خدمته بواسطة الموظف الآخر .

$$p_0 + \tfrac{1}{2}p_1 = 0.0909 + \tfrac{1}{2}(0.1515) = 0.1667$$

(جـ) باستخدام (٢٤ - ٨) نجد احتمال أن يقضى العميل أكثر من ثلاث دقائق أو 1/20 ساعة فى البنك هو

$$W\left(\frac{1}{20}\right) = e^{-60(1/20)}\left\{1 + \frac{(5/3)^2(1/11)[1-e^{-60(1/20)[2-1-(5/3)]}]}{2![1-(5/6)][2-1-(5/3)]}\right\} = 0.4113$$

٢٤ - ٦ لدى إحدى إدارات النقل الرسمية ثلاثة أطقم للتفتيش يكونون دائماً تحت الطلب ، وعملهم هو تحليل ظروف الطريق بعد أى حادث خطر يحدث على الطريق . والأطقم الثلاثة متساوية فى الكفاءة ، ويأخذ كل منها فى المتوسط يومين لفحص الطريق وكتابة التقرير عن الحادث بزمن موزع أُسّياً . وعدد الحوادث الخطرة على الطريق يتبع عملية بواسون بمعدل متوسط 300 فى السنة . حدد L, L_q, W, W_q لهذه العملية ، ووضح معنى كل من هذه القيم .

هذه العملية هى M/M/3 فيها $\lambda = 300$ حادث فى السنة ، $\mu = 365/2 = 182.5$ تقرير لكل طاقم تفتيش لكل سنة و

$$\rho = \frac{300}{3(182.5)} = \frac{40}{73}$$

لإيجاد قيمة L_q من (٢٤ - ٧) يجب أن نحدد p_0 أولاً . من (٢٤ - ٥)

$$\frac{1}{p_0} = \frac{3^3(40/73)^4}{3![1-(40/73)]} + \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!}\left(\frac{300}{182.5}\right)^n$$

$$= 0.89737 + \frac{1}{0!}\left(\frac{300}{182.5}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{300}{182.5}\right)^1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{300}{182.5}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{300}{182.5}\right)^3 = 5.63263$$

حيث إن $p_0 = 1/5.63263 = 0.177537$ ، فإن

$$L_q = \frac{3^3(40/73)^4(0.177537)}{3!\,[1-(40/73)]^2} = 0.3524$$

وفى المتوسط ، فإن الإدارة تكون عندها حوادث متأخرة 0.3524 .

باستخدام (٢٣ – ٦) عند $\bar{\lambda} = \lambda = 300$ نحصل على

$$W_q = \frac{1}{300}(0.3524) = 0.001175 \text{ year} = 0.429 \text{ يوم}$$

والوقت المستغرق ، فى المتوسط ، أقل قليلًا من 1/2 يوم بين الحادث الخطير وبدء الفحص .

وينتج من (٢٣ – ٤) أن

$$W = 0.001175 + \frac{1}{182.5} = 0.006654 \text{ year} = 2.429 \text{ يوما}$$

وفى المتوسط ، تأخذ الإدارة أقل قليلًا من $2\,1/2$ يوم لإنهاء العمل بمجرد حدوث حادث خطر .

وأخيراً ، من (٢٣ – ٥) نحدد أن

$$L = 300(0.006654) = 1.996 \text{ حادث}$$

فى المتوسط ، تكون لدى الإدارة حالتان تقريباً تحت الحكم منتظرتان القرار النهائى .

٢٤ – ٧ فى إحدى محطات الخدمة على طريق زراعى طلمبة واحدة للبنزين . تصل العربات للمحطة بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 10فى الساعة . والزمن اللازم لخدمة العربة موزع أسيًّا بمتوسط دقيقتين . تستطيع المحطة استيعاب أربع عربات بحد أقصى ، وتمنع قوانين المرور العربات من الانتظار خارج المحطة . حدد : (أ) متوسط عدد العربات فى الوقت الواحد بالمحطة . (ب) متوسط الزمن الذى ينتظره العميل بالمحطة منتظراً الخدمة . (جـ) متوسط العائد الذى تفقده المحطة بسبب ذهاب العميل إلى مكان آخر للحصول على الخدمة إذا كانت المحطة ممتلئة ، وكان متوسط البيع للعميل 15.00 دولار .

هذا النظام هو : M/M/1/4 فيه

$$\mu_n = \mu = \tfrac{1}{2} \text{ دقيقة} = 30 \text{ فى الساعة}$$

معدل الوصول إلى المحطة فى الساعة هو : $\lambda = 10$ الساعة ؛ لذلك تكون معدلات الوصول داخل المحطة هى :

$$\lambda_n = \begin{cases} 10 \text{ الساعة} & (n = 0, 1, 2, 3) \\ 0 \text{ الساعة} & (n = 4, 5, \ldots) \end{cases}$$

وكثافة المرور إلى داخل النظام هى $\rho = \lambda/\mu = 1/3$

(أ) من (٢٤ – ١١)

$$L = \frac{1}{2} - \frac{5(1/3)^5}{1-(1/3)^5} = 0.4793 \text{ عربة}$$

(ب) للحصول على W_q نستخدم (٢٣ – ٤) بعد تحديد $p_4, \bar{\lambda}, W$ من (٢٤ – ١٠) ، (٢٤ – ١٢) ، (٢٣ – ٥) على التوالى . وهنا

$$p_4 = \frac{(1/3)^4(2/3)}{1-(1/3)^5} = 0.008264$$

وحيث إن $\bar{\lambda} = 10(1 - 0.008264) = 9.917$ الساعة فى الساعة ، حيث تمثل متوسط معدل دخول العربات إلى المحطة ، فإن

$$W = \frac{0.4793}{9.917} = 0.04833 \text{ ساعة}$$

$$W_q = 0.04833 - \frac{1}{30} = 0.015 \text{ ساعة} = 54 \text{ ثانية}$$

(جـ) ترفض العربات الدخول إلى المحطة بمعدل

$$\lambda - \bar{\lambda} = 10 - 9.917 = 0.083 \text{ في الساعة}$$

لذلك يكون متوسط بمعدل العائد المفقود هو $(15)(0.083) = 1.25$ دولار في الساعة

٢٤ – ٨ بمحطة خدمة سيارات من نوع « اخدم نفسك » توجد أربعة أجهزة يمكن للعملاء بواسطتها تنظيف وتلميع سياراتهم ، بجانب غرفة تستوعب ثلاث سيارات إضافية عندما تكون كل الأجهزة ممتلئة . يصل العملاء إلى مكان غسيل السيارات بتوزيع بواسون بمعدل متوسط 15 في الساعة . وإذا لم يكن هناك مكان للعملاء ، فإنهم يذهبون إلى أي مكان آخر . والزمن اللازم لخدمة السيارة يتبع التوزيع الأُسِّي بمتوسط 12 دقيقة . حدد : (أ) متوسط عدد السيارات بمحطة غسيل السيارات في أي وقت . (ب) معدل رفض السيارات الزائدة عن إمكانيات المحطة .

هذا النظام هو نظام M/M/4/7 فيه

$$\mu = 5 \text{ في الساعة} \quad \lambda = 15 \text{ في الساعة} \quad \rho = \frac{15}{4(5)} = \frac{3}{4}$$

(أ) لتحديد L نستخدم (٢٣ – ٥) بعد حساب $p_0, L_q, p_7, \bar{\lambda}, W_q, W$ على التوالي .

من (٢٤ – ١٣) .

$$p_0 = \left[\frac{(4^4)(3/4)^5[1-(3/4)^3]}{4!\,(1/4)} + \sum_{n=0}^{4}\frac{3^n}{n!}\right]^{-1}$$
$$= \left[\frac{2997}{512} + \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}\right]^{-1} = (22.2285)^{-1} = 0.04499$$

من (٢٤ – ١٥) .

$$L_q = \frac{(4^4)(3/4)^5}{4!\,(1/4)^2}[1-(3/4)^3-(1/4)(3)(3/4)^3](0.04499) = 0.4768 \text{ عربة}$$

باستخدام (٢٤ – ١٤) نجد أن

$$p_7 = \frac{(4)^4(3/4)^7}{4!}(0.04499) = 0.06406$$

ومن (٢٤ – ١٢)

$$\bar{\lambda} = 15(1-0.06406) = 14.04 \text{ في الساعة}$$

وأخيراً

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{0.4768}{14.04} = 0.03396 \text{ ساعة}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.03396 + 0.2 = 0.23396 \text{ ساعة}$$

$$L = \bar{\lambda}W = (14.04)(0.23396) = 3.285 \text{ عربة}$$

(ب) $\lambda - \bar{\lambda} = 15 - 14.04 = 0.96$ عربة في الساعة .

٢٤ - ٩ يصل العملاء إلى محل حلاقة بمعدل خمسة فى الساعة . ومعدل الوصول الفعلى يتبع توزيع بواسون . يوجد حلاق واحد فقط فى كل الأوقات وأربعة كراسى للعملاء الذين يصلون أثناء انشغال الحلاق . وتحدد تعليمات الحريق أكبر عدد ممكن من العملاء بالمحل بخمسة عملاء فقط . والعملاء الذين يصلون عندما يكون الصالون كاملاً لا يدخلون ، ويعتبر دخلهم خسارة على المحل . وزمن الخدمة للحلاق موزع أسياً ، ولكن يتغير متوسط زمن الخدمة بتغير عدد العملاء فى المحل . فعندما يمتلىء المحل يحاول الحلاق الإسراع بالخدمة ، وبذلك يصبح أقل كفاية ، كما هو موضح بالجدول المرفق

العدد بالمحل	1	2	3	4	5
متوسط زمن الخدمة بالدقيقة	9	10	12	15	20

حدد : (أ) متوسط عدد الأشخاص بالمحل فى نفس الوقت . (ب) الوقت المتوقع الذى ينتظرة العميل للحصول على الخدمة . (جـ) نسبة الوقت الذى يكون فيه الحلاق بدون عمل .

هذا النظام ذو طاقة محدودة ، ولكن ليس نظام م/ م/ ١/ ٥ ، لأن زمن الخدمة معتمد على الحالة . وبالرغم من ذلك .. فإن مقاييس الفعالية يمكن أن تحسب مباشرة بمجرد معرفة احتمالات الحالة المستقرة . يكون معدل الوصول إلى المحل لهذا النظام هو : فى لساعة 5 = فى الدقيقة (1/12) λ = لذلك يكون معدل الدخول إلى المحل فى الدقيقة هو :

$$\lambda_n = \begin{cases} 1/12 & (n = 0, 1, 2, 3, 4) \\ 0 & (n = 5, 6, \ldots) \end{cases}$$

ويكون متوسط معدل الخدمة فى الدقيقة هو : $\mu_1 = 1/9,\ \mu_2 = 1/10,\ \mu_3 = 1/12,\ \mu_4 = 1/15,\ \mu_5 = 1/20$ وتعطى احتمالات الحالة المستقرة بالمعادلة (٢٤ - ١) ، كما فى

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{3}{4} p_0 \qquad p_4 = \frac{\lambda_3}{\mu_4} p_3 = \frac{25}{32} p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{5}{8} p_0 \qquad p_5 = \frac{\lambda_4}{\mu_5} p_4 = \frac{125}{96} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2'}{\mu_3} p_2 = \frac{5}{8} p_0 \qquad p_n = 0 \quad (n > 5)$$

وبالتعديل نجد أن

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 5.0833 p_0 \quad \text{أو} \quad p_0 = 0.1967$$

ومن ثم

$$p_1 = 0.1475,\ p_2 = 0.1230,\ p_3 = 0.1230,\ p_4 = 0.1537, \text{ and } p_5 = 0.2561.$$

(أ) $L = \sum_{n=1}^{5} np_n = 1(0.1475) + 2(0.1230) + 3(0.1230) + 4(0.1537) + 5(0.2561) = 2.658$ عميل

(ب) نستخدم (٢٣ - ٦) لتحديد W_q بعد حساب $\bar{\lambda}$ ، L_q من (٢٤ - ٢)

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{4} \lambda_n p_n = \frac{1}{12}(1 - p_5) = 0.06199 \text{ فى الدقيقة}$$

و $(s_n = 1)$ and

$$L_q = \sum_{n=2}^{5} (n-1)p_n = (1)(0.1230) + (2)(0.1230) + (3)(0.1537) + (4)(0.2561)$$
$$= 1.8545 \text{ عميل}$$

لذلك

$$W_q = \frac{1.8545}{0.06119} = 30.31 \text{ دقيقة}$$

(جـ) يكون الحلاق بدون عمل عندما لا يكون هناك عملاء بالمحل . وهذا يحدث باحتمال $p_0 = 0.1967$ ، أو أقل من 20 فى المئة من الزمن .

٢٤ – ١٠ محطة الخدمة المذكورة فى المسألة (٢٤ – ٧) لها شعبية كبيرة ، لأنها تبيع البنزين بثمن أقل قليلًا من المنافسين . والثمن مع ذلك ليس قليلًا بشكل يتناسب مع طول فترة الانتظار فى الصف ، لذلك فإن العملاء يخرجون من الصف طبقاً لدالة التخطى :

$$r(n) = \begin{cases} 0 & \text{في الساعة } (n = 0, 1) \\ e^{n/2} & \text{في الساعة } (n = 2, 3, 4) \end{cases}$$

حدد : (أ) متوسط عدد العربات فى المحطة فى أى وقت . (ب) عدد العربات المتوقع الذى يترك الصف فى كل ساعة .

هذا النظام هو M/M/1/4 وفيه تخطى . بالتبادل .. يمكن النظر إليه على أنه نظام M/M/1 ، وفيه تخطى ، وفيه تزاحم إجبارى عندما تصل حالة النظام إلى أربعة عملاء . ومن هذا المدخل الأخير ، تكون دالة التزاحم هى :

$$b(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0, 1, 2, 3) \\ 1 & (n = 4, 5, \ldots) \end{cases}$$

وفى أى الطريقتين يكون معدل الوصول إلى المحطة هو $\lambda = 10\,\mathrm{h}^{-1}$ فى الساعة ، ومعدل خدمة العملاء هو $\mu = 30\,\mathrm{h}^{-1}$ فى الساعة ، كما فى المسألة ٢٤ – ٧ . ويتبع ذلك أن معدل الوصول للعملاء داخل المحطة هو

$$\lambda_n = \begin{cases} 10 & \text{في الساعة } (n = 0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{في الساعة } (n = 4, 5, \ldots) \end{cases}$$

ويكون متوسط معدل خدمة العملاء خلال النظام ، سواء بخدمتهم فعلًا أم تركهم يتركون الصف هو

$$\mu_1 = \mu + r(1) = 30 + 0 = 30$$
$$\mu_2 = \mu + r(2) = 30 + 2.718 = 32.718$$
$$\mu_3 = \mu + r(3) = 30 + 4.482 = 34.482$$
$$\mu_4 = \mu + r(4) = 30 + 7.389 = 37.389$$

لتحديد احتمالات الحالة المستقرة نستخدم (٢٤ – ١) ، ومنها نحسب مقاييس الفعالية المطلوبة مباشرة . لاحظ أن (٢٤ – ١٠) حتى (٢٤ – ١٢) ، والتى تفترض أزمنة خدمة أسّية لكل العملاء ، لا تنطبق على هذه العملية .

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{10}{30} p_0 = (0.3333)p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{10}{32.718}(0.3333)p_0 = (0.1019)p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{10}{34.482}(0.1019)p_0 = (0.02955)p_0$$

$$p_4 = \frac{\lambda_3}{\mu_4} p_3 = \frac{10}{37.389}(0.02955)p_0 = (0.007903)p_0$$

و $p_n = 0$ لكل قيم $n = 5, 6, \ldots$. بالتعديل ،

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = (1.473)p_0 \qquad \text{أو} \qquad p_0 = 0.6789$$

وبالتالى

$$p_1 = 0.2263,\ p_2 = 0.0692,\ p_3 = 0.0201,\ \text{and}\ p_4 = 0.0054.$$

(أ) $L = \sum_{n=1}^{4} np_n = 1(0.2263) + 2(0.0692) + 3(0.0201) + 4(0.0054) = 0.4466$ عربة

(ب) معدل ترك الصف ، بالعربة فى كل ساعة هو دالة لحالة النظام ، ويكون $r(n)$. لذلك .. يكون العدد المتوقع للسيارات N التى تترك الصف فى الساعة هو

$$N = \sum_{n=0}^{4} r(n)p_n = (0)(0.6789) + (0)(0.2263) + (2.718)(0.0692) + (4.482)(0.0201) + (7.389)(0.0054)$$
$$= 0.3181 \text{ عربة في الساعة}$$

مسائل مكملة
Supplementary Problems

٢٤ - ١١ يعمل موظفان فى أحد المخابز ، ويمكن لكل منها التعامل مع 30 عميل فى الساعة ، بأزمنة خدمة موزعة أُسيًّا . يصل العملاء إلى المخبز طبقاً لعملية بواسون بمعدل متوسط 40 فى الساعة . حدد : (أ) نسبة الزمن التى يكون فيها الموظف بدون عمل . (ب) احتمال أن يكون هناك أكثر من عميلين منتظرى الخدمة فى أى وقت .

٢٤ - ١٢ محطة مترو أنفاق بها خمسة تليفونات عامة . وخلال ساعات الذروة ، بعد الظهر ، يصل الأفراد الذين يرغبون فى عمل المكالمات التليفونية إلى التليفونات بعملية بواسون ، بمعدل 100 فى الساعة . متوسط المكالمة الواحدة هو دقيقتان وبزمن فعلى موزع أُسيًّا . حدد : (أ) الزمن المتوقع للفرد للانتظار لعمل المكالمة التليفونية بمجرد أن يصل إلى التليفون . (ب) احتمال أن يزيد هذا الزمن عن دقيقة واحدة . (جـ) عدد الأشخاص المتوقع أن يستخدموا أو ينتظروا التليفونات .

٢٤ - ١٣ فى أحد البنوك موظفان إثنان ، أحدهما للإيداع ، والآخر للسحب . وزمن الخدمة لكل موظف موزع أُسيًّا بمتوسط دقيقة واحده . يصل العملاء إلى البنك بعملية بواسون ، بمعدل متوسط 40 فى الساعة ؛ ومن المفترض (انظر المسألة ٢١ - ٢٦) أن كل من المودعين أو الساحبين يشكلون صفوفاً منفصلة بعملية بواسون ، كل منهم بمعدل متوسط 20 فى الساعة ، ولا يوجد عميل مُودع وساحِب فى نفس الوقت . يفكر البنك فى تغيير النظام ، بحيث يعمل كل موظف للتعامل بالإيداع والسحب معاً . يتوقع البنك أن يزيد متوسط زمن الخدمة للموظف الواحد إلى 1.2 دقيقة ، ولكن يأمل أن هذا النظام سيمنع الصفوف الطويلة من أمام أحد الموظفين ، بينما يظل الآخر بدون عمل ، وهو الوضع الذى يحدث من وقت لآخر فى الحالة الحالية . حلل النظامين بالنسبة لمتوسط الوقت العاطل للموظف ، وبالنسبة لعدد العملاء المتوقع فى البنك فى أى وقت .

٢٤ - ١٤ إحدى الشركات تُعين خدمة تليفونية للإجابة على المكالمات التليفونية الواردة . يعمل بهذه الخدمة عامل واحد له القدرة على الاحتفاظ بمكالمتين على الخط إذا كان العامل منشغلاً بمكالمة أخرى . إذا كانت الخطوط الثلاثة مشغولة (واحد مع العامل ، واثنان للاحتفاظ بالعميلين على الخط) يتلقى العميل إشارة « مشغول » . تصل المكالمات إلى الشركه طبقاً لعملية بواسون بمعدل متوسط 20 فى الساعة . وبمجرد الاتصال بالعامل يكون زمن المكالمة موزع أُسيًّا بمتوسط دقيقة واحده .
حدد : (أ) احتمال أن طالب المكالمة يتلقى إشارة « مشغول » . (ب) احتمال أن طالب المكالمة يبقى منتظراً على الخط .
(جـ) احتمال أن طالب المكالمة يتحدث مع العامل بمجرد الاتصال .

٢٤ - ١٥ أحد محلات الأكل الصينية به مكان لاستيعاب خمسة عملاء على الأكثر . وخلال أشهر الشتاء يلاحظ أنه عندما يصل العملاء ويكون المحل ممتلئاً ، فإنه لا يقف أحد خارج المحل فى الطقس البارد ، ويذهبون إلى محل آخر . يصل العملاء إلى المحل بعملية بواسون بمعدل متوسط 15 فى الساعة . يخدم المحل العملاء بمعدل متوسط 15 فى الساعة بزمن خدمة موزع أُسيًّا . يعمل بالمحل صاحبه فقط الذى يخدم العملاء بأسلوب من يحضر أولاً يُخدم أولاً . حدد : (أ) متوسط عدد العملاء فى المحل فى أى وقت .
(ب) الزمن المتوقع الذى يقضيه العميل لانتظار الخدمة . (جـ) المعدل المتوقع لخسارة العائد نتيجة ضيق المكان بالمحل إذا كان متوسط فاتورة العميل 10.00 دولارات .

٢٤ - ١٦ توجه إحدى شركات الأوتوبيسات عربتها إلى مكان الخدمة لإجراء الصيانة كل 25000 ميل . تفتح محطة الخدمة لمدة 24 ساعة كل يوم ، وبها طاقم خدمة واحد يستطيع العمل بأوتوبيس واحد فى الوقت الواحد . وزمن خدمة الأوتوبيس الواحد موزع أُسّياً بمعدل متوسط 12 فى اليوم . وعند السائقين تعليمات بعدم دخول محطة الخدمة إذا كان هناك أربعة أوتوبيسات أو أكثر ، ويعودون إلى مكان آخر للضبط . حدد : (أ) الزمن المتوقع الذى يقضيه الأوتوبيس بمكان الخدمة إذا بقى هناك . (ب) الخسارة النقدية المتوقعة للشركة من ضيق مكان الخدمة إذا كانت تكلفة إرسال العربة لمكان الخدمة وعودتها بدون إجراء الخدمة هى 80 دولاراً .

٢٤ - ١٧ شركة السيارات المذكورة فى المسألة ٢٤ - ١٦ تفكر فى زيادة الأطقم إلى طاقمى خدمة ذى كفاءة متساوية . تكلفة إضافة طاقم زيادة هى 300 دولار فى اليوم . هل توصي بعمل هذا التعديل ؟

٢٤ - ١٨ فى أحد أقسام مستشفى خمس غرف . يصل مرضى هذا القسم إلى المستشفى بعملية بواسون بمعدل متوسط 12 فى اليوم ، ويقيمون بغرف القسم إذا كانت متاحة ، وإلا يُوجَّهون إلى مستشفى آخر . يشغل المريض الغرفة لمدة 6 ساعات فى المتوسط ؛ ويوزع الزمن أُسّياً حول هذا المتوسط . حدد : (أ) معدل اشغال الغرف (النسبة المئوية للغرف المشغولة فى المدى الطويل) . (ب) معدل توجيه المرضى إلى مستشفيات أخرى .

٢٤ - ١٩ فى أحد المخازن موظفان اثنان ، يستطيع كل منهما خدمة العملاء بمعدل متوسط 60 فى الساعة ، ويوزع زمن الخدمة أُسّياً . طاقة المخزن خمسة عملاء ، دون السماح بالانتظار بالخارج . يصل العملاء إلى المخزن بعملية بواسون ، حيث يعتمد معدل الوصول على عدد الأشخاص بالمخزن كما يلى :

العدد بالمخزن	0	1	2	3	4	5
معدل الوصول بالساعة	100	110	120	140	170	200

حدد : (أ) عدد العملاء المتوقع أن يكونوا معاً بالمخزن . (ب) الزمن المتوقع الذى يجب أن ينتظره العميل لانتظار الخدمة . (جـ) المعدل المتوقع الذى يُفقد به العملاء نتيجة ضيق المكان .

٢٤ - ٢٠ بإحدى محطات غسيل العربات غرفة غسيل لثلاث عربات ، وممران لغسل عربتين . كل ممر يستوعب عربة واحدة فى الوقت الواحد . تصل العربات بعملية بواسون بمعدل متوسط 20 فى الساعة ، ولا يسمح لهم بالدخول إذا كانت المحطة ممتلئة . يتم الغسيل والتنظيف يدوياً ، ويتبع التوزيع الأُسّى . وفى الظروف العادية يخدم كل ممر العربة فى 5 دقائق . ومع ذلك .. إذا كانت عربتان أو أكثر منتظرتى الخدمة ، فإن عملية الغسيل تتم بالبخار لتقليل زمن الخدمة إلى 4 دقائق . حدد : (أ) العدد المتوقع للعربات بمكان الغسيل . (ب) الزمن المتوقع الذى تقضيه العربة بمكان الغسيل إذا سُمح لها بالدخول .

٢٤ - ٢١ يصل العملاء إلى محل أكل صغير بعملية بواسون بمعدل متوسط 30 فى الساعة . يستطيع المحل استيعاب أربعة عملاء على الأكثر ، وعندما يكون ممتلئاً لا يُسمح للعملاء بالدخول ، ويفقد المحل التعامل معهم ، وصاحب المحل هو مقدم الخدمة الوحيد ، ويُوزع زمن خدمته أُسّياً طالما يوجد ولو عميل واحد فى المحل . ومتوسط زمن الخدمة هو 3 دقائق . ويصبح صاحب المحل ، مع ذلك ، أكثر كفاءة إذا امتلأ المحل ، ويقلل محادثاته مع العملاء ، ويُخفض متوسط زمن الخدمة دقيقة واحدة لكل عميل فى صف الانتظار للخدمة . حدد : (أ) عدد العملاء المتوقع أن يكونوا معاً بالمحل (دون صاحب المحل) . (ب) متوسط زمن الخدمة لصاحب المحل .

٢٤ – ٢٢ حدد احتمالات حالة الاستقرار لنظام M/M/1 وفيه تزاحم ، إذا كان هناك 20 فى المئة فرصة تخطى عندما يكون هناك عميل أو أكثر فى النظام .

٢٤ – ٢٣ حل المسألة ٢٤ – ٢١ إذا كان احتمال الزبائن الذين لا ينتظرون بالصف (التزاحم) هو $1-(\frac{1}{2})^n$ عندما تكون حالة النظام $n = 0, 1, 2, 3$

٢٤ – ٢٤ حل المسألة ٢٤ – ١٥ إذا ترك العملاء الصف طبقاً لدالة التخطى

$$r(n) = \begin{cases} 0 \text{ فى الساعة } (n = 0, 1) \\ n^2 \text{ فى الساعة } (n = 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

٢٤ – ٢٥ ترجم (٢٤ – ١) $\mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1}$ بدلالة معدلات الانتقال .

٢٤ – ٢٦ بين أن $L = L_q + s\rho$ لنظام M/M/s

٢٤ – ٢٧ اشتق (٢٤ – ١٣) ، (٢٤ – ١٤) .

٢٤ – ٢٨ بين أن احتمالات الحالة المستقرة لنظام M/M/s/K تنخفض إلى احتمالات نظام M/M/1/K إذا كانت $s = 1$.

٢٤ – ٢٩ استنتج أنه لنظام M/M/s/K

$$L = L_q + s - \sum_{n=0}^{s-1} (s-n) p_n$$

٢٤ – ٣٠ فى عملية الصفوف المشروحة فى المسألة (٢٤ – ٨) حدد : أولًا احتمالات الحالة المستقرة مباشرة من (٢٤ – ١) واستخدمها فى حساب L . قارن إجابتك بنتائج المسألة ٢٤ – ٨ (أ) .

٢٤ – ٣١ فى نظام M/M/∞ عملية صفوف لها نمط وصول بواسون بمعدل متوسط λ ؛ وبه عدد مقدمى خدمة يستطيعون استيعاب كل العملاء الذين يصلون إلى النظام ؛ ومقدمى الخدمة لهم أزمنة خدمة مستقلة وموزعة أُسياً ببارامیتر μ ؛ وكذلك طاقة خدمة غير محدودة . ينطبق هذا النموذج دائماً على المنشآت ذات الخدمة الذاتية (اخدم نفسك) . بين أنه لنظام M/M/∞ ، فإن احتمالات الحالة المستقرة تكوّن توزيع بواسون ذات بارامیتر $\rho = \lambda/\mu$ ، ثم حدد L, W, W_q, L_q

٢٤ – ٣٢ يُقبل الطلاب فى دورة تدريبية بالمراسلة فى الدوائر الكهربية بمجرد التسجيل ، ثم يستكملون الدراسة فى أماكنهم . زمن استكمال الدراسة يتبع التوزيع الأُسّى بمتوسط 7 أسابيع . والتسجيلات الجديدة للدورة تتبع توزيع بواسون بمعدل متوسط 50 كل أسبوع . حدد : (أ) عدد الطلبة المتوقع تسجيلهم للدراسة . (ب) احتمال أن يأخذ الطالب أكثر من 7 أسابيع لاستكمال الدورة . (ملحوظة : استخدم نتائج المسألة ٢٤ – ٣١) .

٢٤ – ٣٣ نظام صفوف ذا مصدر محدود هو نظام له عدد عملاء محدود . هذا العدد يجب أن يكون صغيراً بدرجة كافية ، بحيث إنه لا يكون من المناسب تقريب عدد العملاء بواسطة المصدر المحدود ، كما هو الحال فى كل نظم الصفوف الأخرى بالكتاب . افترض أن المصدر يتكون أصلًا من N_0 عميل . وأزمنة وصولهم إلى نظام الخدمة هى عدد N_0 زمن تمثل متغيرات عشوائية مستقلة موزعة أُسّياً كل منها ببارامیتر λ . وعند لحظة استكمال الخدمة ، يعود العميل إلى المصدر كعميل جديد . لذلك .. عندما تكون حالة النظام n ، تكون حالة المصدر $N_0 - n$ ، وهذا يعطى :

$$\lambda_n = (N_0 - n)\lambda \qquad (n = 0, 1, \ldots, N_0)$$

وأكثر من ذلك .. وعند $s < N_0$ مقدم خدمة لهم أزمنة خدمة مستقلة موزعة أسّياً لهم بارامتر μ ، فإن

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & (n = 1, 2, \dots, s) \\ s\mu & (n = s+1, s+2, \dots, N_0) \end{cases} \qquad (٢)$$

أوجد احتمالات الحالة المستقرة بمعرفة $\rho = \lambda/s\mu$، وقارن بحالة المصدر المحدود (٢٤ - ٥) ، (٢٤ - ٦) .

٢٤ - ٣٤ استنتج مباشرة من (١) فى المسألة (٢٤ - ٣٣) أن $\bar{\lambda} = (N_0 - L)\lambda$

٢٤ - ٣٥ شركة تمتلك خمس ماكينات ضعيفة تتلف بسرعة ، وتستخدم موظفين اثنين لإصلاح هذه الماكينات . كل موظف يستطيع إصلاح الماكينة فى ساعتين فى المتوسط ، ويوزع زمن الخدمة أسّياً حول متوسطة . والماكينة التى يتم إصلاحها تعمل فى المتوسط 12 ساعة قبل أن تتلف مرة أخرى ، وزمن التشغيل موزع أسّياً حول هذا المتوسط . حدد : (أ) عدد الماكينات المتوقع أن يكون تحت التشغيل فى أى وقت . (ب) نسبة الوقت الذى لا تكون فيه أى ماكينة تحت التشغيل . (ملحوظة : استخدم نتائج المسائل ٢٤ - ٣٣ ، ٢٤ - ٣٤) .

٢٤ - ٣٦ فى عملية صفوف عامة ، ارمز إلى متوسط عدد العملاء فى الخدمة بالرمز $\bar{S}$ (وهو نفسه متوسط عدد مقدمى الخدمة المنشغلين) فى كل الفترات التى لا يكون فيها النظام فارغاً . استنتج من صيغ ليتل أن متوسط زمن الخدمة لكل العملاء تحت الخدمة ، $1/\bar{\mu}$ يمكن التعبير عنه كالتالى :

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \frac{(1 - p_0)\bar{S}}{\bar{\lambda}}$$

إجابات المسائل المكملة

Answers to Supplementary Problems

CHAPTER 1 الفصل الأول

١ - ١٦

تعظيم
$$z = 28x_1 + 31x_2$$
علماً بأن
$$3.5x_1 + 4x_2 \leq 50$$

عند كلًّا من المتغيرين لا سلبى

لاحظ أن : قيود الأعداد الصحيحة للمتغيرات غير مطلوبة ، حيث يمكن انهاء المباريات المستكملة جزئياً فى الاسابيع التالية .

١ - ١٧

تصغير
$$z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 8x_6$$
علماً بأن
$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45x_5 + 30x_6 &\geq 70 \\ 50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 50x_5 + 20x_6 &\geq 100 \\ 4x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 9x_5 + 10x_6 &\geq 20 \end{aligned}$$

عند كل المتغيرات لا سلبيه .

لاحظ أن : حيث أن الغذاء F ليس أحسن من الغذاء C الأرخص ثمناً ، فإن لن يستخدم الغذاء F فى الخلطة المثلى . لذلك ، فإن البرنامج يمكن أن يبسط بالتعويض $x_6 = 0$.

١ - ١٨

تعظيم
$$z = 6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$$
علماً بأن
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 480 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 400 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 400 \\ x_1 &\geq 50 \\ x_2 + x_3 &\geq 100 \\ x_4 &\leq 25 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبية

١ - ١٩

تصغير
$$z = 1.50x_1 + 0.75x_2 + 2.00x_3 + 1.75x_4 + 0.25x_5$$
علماً بأن
$$\begin{aligned} 0.2x_1 - 0.15x_2 + 0.8x_3 - 0.2x_4 - 0.2x_5 &\geq 0 \\ 0.3x_1 - 0.1x_3 + 0.9x_4 - 0.1x_5 &\geq 0 \\ -0.05x_1 + 0.15x_2 - 0.05x_3 - 0.05x_4 - 0.05x_5 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 500 \\ x_1 &\leq 200 \\ x_2 &\leq 400 \\ x_3 &\leq 100 \\ x_4 &\leq 50 \\ &900 \end{aligned}$$

كل المتغيرات لا سلبيه

١ - ٢٠ تعظيم

$$z = 20x_1 + 17x_2 + 15x_3 + 15x_4 + 10x_5 + 8x_6 + 5x_7$$

علماً بأن

$$145x_1 + 92x_2 + 70x_3 + 70x_4 + 84x_5 + 14x_6 + 47x_7 \leq 250$$

$$x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)$$

عند ، كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

١ - ٢١ تكاليف تسليم الموديل من المصنع إلى الصانع هى تكلفة الانتاج بالاضافة إلى تكلفة الشحن

تصغير

$$z = (1.10 + 0.11)x_{11} + (1.10 + 0.13)x_{12} + \cdots + (1.03 + 0.15)x_{34}$$

علماً بأن

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 7\,500$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 10\,000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 8\,100$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 4\,200$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 8\,300$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 6\,300$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2\,700$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

١ - ٢٢ حيث أن الاصناف الأخرى ليست غالية الثمن ، فإنه لن يضاف أى لحم أكثر من المطلوب دع x_1, x_2, x_3 على التوالى تمثل الكمية بالرطل من الهامبورجر ، فطائر النزهة ،أرغفة اللحم .

تصغير

$$(200 - 0.2x_1 - 0.1x_3) + (800 - 0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.4x_3) + (150 - 0.2x_2 - 0.3x_3)$$

علماً بأن

$$0.2x_1 + 0.1x_3 \leq 200$$
$$0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 \leq 800$$
$$0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 150$$

كل المتغيرات لا سلبية

يكافىء الهدف . $z = 0.7x_1 + 0.7x_2 + 0.8x_3$

١ - ٢٣ تصغير

$$z = 145x_{11} + 122x_{12} + 130x_{13} + \cdots + 80x_{54} + 111x_{55}$$

علماً بأن

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

عند كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

١ - ٢٤ تصغير

$$z = 210\,000x_1 + 190\,000x_2 + 182\,000x_3$$

علماً بأن

$$40x_1 + 65x_2 \geq 1500$$
$$35x_1 + 53x_3 \geq 1100$$
$$x_1 \leq 30$$
$$x_2 \leq 30$$
$$x_3 \leq 30$$

كل المتغيرات صحيحة ولا سلبية

١- ٢٥ تعظيم $z = 250x_1 + (600 - x_2)x_2$

علماً بأن $0.25x_1 + 0.40x_2 \leq 500$

$0.75x_1 + 0.60x_2 \leq 1200$

عند كلًا من المتغيرين لا سلبى

١ - ٢٦ الطاقة الوضعية للنظام (لمستوى مناسب) تتناسب مع $a + b + c$, وهذه الطاقة حد أدنى عند الاتزان .

الفصل الثانى : CHAPTER 2

٢ - ٧ دع $x_2 = x_4 - x_5$ and $x_3 = x_6 - x_7$, ، عند كل متغير جديد لا سلبى .
اضرب القيد الأول فى 1- .

$$\mathbf{X} = [x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9]^T \qquad \mathbf{C} = [2, -1, 1, 4, -4, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}$$

٢ - ٨

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \qquad \mathbf{C} = [10, 11, 0, 0, 0]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 175 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

٢ - ٩

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T \qquad \mathbf{C} = [10, 11, 0, 0, 0, -M, -M, -M]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 175 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

٢ - ١٠

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T \qquad \mathbf{C} = [3, 2, 4, 6, 0, 0, M, M]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1500 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}$$

٢ - ١١

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \qquad \mathbf{C} = [6, 3, 4, M, M]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

٢ - ١٢ دع $x_4 = x_5 - x_6$, ، عند كل متغير جديد لا سلبى . لذلك يمكن استخدام x_5 و x_3 كجزء من الحل المبدئى بمجرد قسمة القيد الثانى على 2 .

$$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7]^T \qquad \mathbf{C} = [7, 2, 3, 1, -1, -M]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.5 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_7 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

٢ – ١٣ $\mathbf{C} = [10, 2, -1, 0, 0, 0, 0, M, M, M]^T$ $\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ 30 \\ 7 \\ 60 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_8 \\ x_6 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث :

٣ – ١٦ لا $[1, 2]^T$ ليست على خط الشريحة بين النقطتين الأخريين .

٣ – ١٧

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

٣ – ١٨ (ب) ، (جـ) هما حلان ممكنان أساسيان ؛ (ب) تنحرف .

٣ – ١٩

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + x_6\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + x_7\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\9\\0\end{bmatrix}$$

٣ – ٢٠ (ا) ، (جـ) ، (د) هم حلول ممكنة أساسية منحرفة .

٣ – ٢١ دع $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X}$ وافرض الحد الأدنى لها m، عند $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$. فإنه عند $\beta_1 + \beta_2 = 1,\ \beta_1 \geq 0,\ \beta_2 \geq 0,$

$$f(\beta_1\mathbf{P}_1 + \beta_2\mathbf{P}_2) = \beta_1 f(\mathbf{P}_1) + \beta_2 f(\mathbf{P}_2) = \beta_1 m + \beta_2 m = m$$

٣ – ٢٢ إذا كانت المجموعة الفرعية معتمدة خطياً ، فإن الثوابت اللاصفرية التى حققت (٣ – ١) لهذه المجموعة الفرعية ستحقق أيضاً (٣ – ١) لكل المجموعة بأخذ كل الثوابت الأخرى أصفاراً . وهذا سيتضمن أن المجموعة معتمدة خطياً وهى ليست كذلك .

٣ – ٢٣ فى (٣ – ١) خذ الثابت أمام المتجه العنصرى ليكون لاصفرى وكل الثوابت الأخرى أصفاراً .

الفصل الرابع :

٤ – ٩ $x_1^* = \frac{5}{3},\quad x_2^* = \frac{2}{3};\quad z^* = \frac{7}{3}$

٤ – ١٠ $x_1^* = \frac{9}{4},\quad x_2^* = \frac{3}{2};\quad z^* = \frac{51}{4}$

٤ – ١١ $x_1^* = \frac{16}{5},\quad x_2^* = \frac{13}{5};\quad z^* = \frac{42}{5}$

٤ – ١٢ $x_1^* = 1285.7,\quad x_2^* = 1857.1;\quad z^* = -3142.8$

٤ - ١٣ لا يوجد حل ممكن

٤ - ١٤ $x_1^* = 0,\ x_2^* = 700,\ x_3^* = 500,\ x_4^* = 1000,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 0;\ z^* = 27\,600.$

(لا ينحرف الحل فحسب بل يحتوى الحل على متغير صناعى صفرى ضمن المتغيرات الأساسية . هذا يمكن أن يحدث عندما يكون واحد أو أكثر من القيود غير مطلوب (زيادة) . وهنا يكون القيد الأخير هو مجموع القيدين الأولين ناقص مجموع الاثنين التاليين) .

٤ - ١٥ $x_1^* = 23.8095,\ x_2^* = 32.1429;\ z^* = 591.667.$

٤ - ١٦ $x_1^* = 0,\ x_2^* = 423.077,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 153.846;\ z^* = 1769.23.$

٤ - ١٧ لا يوجد حد أعلى

٤ - ١٨ $x_1^* = 6.66667,\ x_2^* = 0.555556,\ x_3^* = 0;\ z^* = 41.6667.$

٤ - ١٩ $x_1^* = 30,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 30;\ z^* = 270.$

٤ - ٢٠ $x_1^* = 69\,090.9$ bbl, $x_2^* = 17\,272.7$ bbl, $x_3^* = 2272.73$ bbl, $x_4^* = 2727.27$ bbl; $z^* = \$235\,454.$

٤ - ٢١ $x_1^* = 0.90909$ oz, $x_2^* = 1.81818$ oz, $x_3^* = x_4^* = x_5^* = x_6^* = 0;\ z^* = 7.27273$¢.

٤ - ٢٢ $x_1^* = 50,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 145,\ x_4^* = 10;\ z^* = \$1250.$

٤ - ٢٣ $x_1^* = 93.75$ gal, $x_2^* = 125$ gal, $x_3^* = 56.25$ gal, $x_4^* = 0,\ x_5^* = 225$ gal; $z^* = \$403.125.$

٤ - ٢٤ $x_1^* = 937.5$ lb, $x_2^* = 562.5$ lb, $x_3^* = 125$ lb; $z^* = 0$ lb.

الفصل الخامس : CHAPTER 5

٥ - ١٣

تعظيم $z = 4w_1 + 10w_2 + 6w_3$

علماً بأن

$$2w_1 + 4w_2 + w_3 \leq 12$$
$$6w_1 + 2w_2 + w_3 \leq 26$$
$$5w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 80$$

عند كل المتغيرات لا سلبية

٥ - ١٤ اضرب القيد الأخير فى الحل الأول فى ١- .

تعظيم $z = 6w_1 + 5w_2 - 7w_3$

علماً بأن

$$2w_1 - w_3 \leq 3$$
$$5w_1 + 4w_2 + 6w_3 \leq 2$$
$$-2w_2 - 3w_3 \leq 1$$
$$w_1 + 2w_2 - 7w_3 \leq 2$$
$$w_1 + 3w_2 - 5w_3 \leq 3$$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

٥ - ١٥ تصغير $z = 25w_1 + 30w_2 + 35w_3$

علماً بأن

$$7w_1 + 2w_2 + 6w_3 \geq 6$$
$$-11w_1 - 8w_2 - w_3 \leq 1$$
$$3w_1 + 6w_2 + 7w_3 \geq 3$$

عند كل المتغيرات لا سلبية

(الطرف الأيمن للقيد الثانى آل إلى موجب)

٥ - ١٦ إدخل متغير زائد x_3 فى القيد الأول

تصغير $z = 16w_1 + 20w_2$

علماً بأن

$$8w_1 + 3w_2 \geq 10$$
$$6w_1 \geq 15$$
$$-w_1 + 2w_2 \geq 20$$
$$w_1 - w_2 \geq 25$$
$$-w_1 \geq 0$$

(لاحظ أن هذا البرنامج ليس له حل ممكن) .

٥ - ١٧ تعظيم $z = w_1 + 4w_2$

علماً بأن

$$3w_2 \leq 1$$
$$w_1 + w_2 \leq 2$$
$$w_1 + 3w_2 \leq 1$$

٥ - ١٨ فى كلا الحالتين $z^* = 72$

٥ - ١٩ $x_2^* = 1.25,\ x_1^* = x_3^* = x_4^* = x_5^* = 0;\ z^* = 2.5.$

٥ - ٢٠ اضرب كل قيد فى 1- فيكون الازدواج المتماثل هو

تصغير $z = -6w_1 - 12w_2 - 4w_3$

علماً بأن

$$-6w_1 - 4w_2 - w_3 \geq 5$$
$$-w_1 - 3w_2 - 2w_3 \geq 2$$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

البرنامج ليس له حل ممكن .

٥ - ٢١ تعظيم $z = 5w_1 - 5w_2$

علماً بأن

$$w_1 + w_2 \leq -1$$
$$-w_1 - w_2 \leq -1$$

٥ - ٢٢ المتغير المساعد الثانى فى الحل الأمثل للبرنامج الأول ، x_2^* يكون موجباً ، لذلك w_2^* يجب أن يكون صفراً (كما هو فى الصف الأخير من جدول 2)

$x_1^\circ = 1/3,\ x_2^\circ = 0,\ x_3^\circ = 2/3;\ w_1^\circ = 0,\ w_2^\circ = 1/3.$ ٥ - ٢٣

٥ - ٢٤ من نتائج المسألة ٥ - ٩

$C^T X_0 = B^T W_0 \le C^T X$ و $B^T W_0 = C^T X_0 \ge B^T W$

لذلك ، Wo تكون مثلى ، Xo تكون مثلى .

الفصل السادس CHAPTER 6

٦ - ٩ $x_1^\circ = 1,\ x_2^\circ = 3,\ x_3^\circ = 0;\ z^\circ = 7.$

٦ - ١٠ $x_1^\circ = x_2^\circ = x_4^\circ = 0,\ x_3^\circ = 2;\ z^\circ = 6.$

٦ - ١١ $x_1^\circ = 0,\ x_2^\circ = 7,\ x_3^\circ = 1;\ z^\circ = 71.$

٦ - ١٢ غير ممكن

٦ - ١٣ عدل المواقع F , D , C , B لسعات 55 طن / اسبوع

الفصل السابع : CHAPTER 7

٧ - ٨ $x_1^\circ = 1,\ x_2^\circ = 4,\ x_3^\circ = 0;\ z^\circ = 37.$

٧ - ٩ $x_1^\circ = 3,\ x_2^\circ = 0;\ z^\circ = \$360.$

٧ - ١٠ $x_1^\circ = 1,\ x_2^\circ = 3,\ x_3^\circ = 0;\ z^\circ = 7.$

٧ - ١١ $x_1^\circ = x_2^\circ = x_4^\circ = 0,\ x_3^\circ = 2;\ z^\circ = 6.$

٧ - ١٢ $x_1^\circ = 0,\ x_2^\circ = 7,\ x_3^\circ = 1;\ z^\circ = 71.$

٧ - ١٣ $x_1^\circ = 1,\ x_2^\circ = 3,\ x_3^\circ = 0;\ z^\circ = 7.$

الفصل الثامن CHAPTER 8

٨ - ٩ تكلفة النقل تساوى تكلفة الانتاج زائد تكلفة الشحن .

	I	II	III	IV	V وهمى	الإمداد	u_i
A	1.21 3200	1.23 200	1.19 (0)	1.29 (0.06)	0 4100	7500	0
B	1.07 1000	1.11 (0.02)	1.05 6300	1.09 2700	0 (0.14)	10 000	−0.14
C	1.17 (0.03)	1.16 8100	1.15 (0.03)	1.18 (0.02)	0 (0.07)	8100	−0.07
الاحتياج	4200	8300	6300	2700	4100		
v_j	1.21	1.23	1.19	1.23	0		

ينتج المصنع A 3200 وحدة للعميل I ، 200 للعميل II ، ويبقى بطاقة غير مشتغلة 400 ؛ وينتج المصنع B 1000 وحدة للعميل I ، 6300 للعميل III ، 2700 للعميل IV ؛ وينتج المصنع C 8100 وحدة للعميل II

A – ١٠

	1	2	3	4	5	الإمداد	u_i
1	145 (18)	122 (17)	130 (11)	95 0	115 1	1	95
2	80 0	63 (5)	85 (13)	48 1	78 (10)	1	48
3	121 (20)	107 (28)	93 1	69 0	95 (6)	1	69
4	118 (13)	83 1	116 (19)	80 (7)	105 (12)	1	73
5	97 1	75 0	120 (31)	80 (15)	111 (26)	1	65
الاحتياج	1	1	1	1	1		
v_j	32	10	24	0	20		

المحامى 1 للحالة 5 ، المحامى 2 للحالة 4 ، المحامى 3 للحالة 3 ، المحامى 4 للحالة 2 ، المحامى 5 للحالة 1 .

٨ - ١١

	1	2	3	4 وهمى	الامداد	u_i
1	92 (7)	89 (1)	90 320 000	0 (3)	320 000	88
2	91 (3)	91 120 000	95 (2)	0 150 000	270 000	91
3	87 100 000	90 60 000	92 30 000	0 (1)	190 000	90
الاحتياج	100 000	180 000	350 000	150 000		
v_j	−3	0	2	−91		

البائع 1 التسليم 320000 جالون إلى المطار 3 ، البائع 2 لتسليم 120000 جالون للمطار 2 ويبقى عنده 150000 جالون ؛ البائع 3 لتسليم 100000 جالون ، 60000 جالون ، 30000 جالون ، على التوالى للمطارات 1 ، 2 ، 3 .

٨ - ١٢ تعظيم الربح يكافىء تصغير الربح السالب .

	1	2	3	4	الامداد	u_i
A	−10 1800	−6 700	−6 (1)	−4 (2)	2500	0
B	−2 (8)	−6 (0)	−7 550	−6 1550	2100	0
وهمى	0 (4)	0 1600	0 (1)	0 200	1800	6
الاحتياج	1800	2300	550	1750		
v_j	−10	−6	−7	−6		

المصنع A لامداد المحلات 1 , 2 بـ 1800 ، 7000 رغيف على التولى ؛ المصنع B لإمداد المحلات 3 ، 4 بـ 550 ، 1550 رغيف على التوالى .

٨ – ١٣

	المدينة 1 الأكبر	المدينة 1 الآخرين	المدينة 2 الأكبر	المدينة 2 الآخرين	المدينة 3 الأكبر	المدينة 3 الآخرين	الامداد	u_i
1	3 (0)	3 0.175	3 0.260	3 0.470	6 0.195	6 (3)	1.100	0
2	1 0.325	1 0.575	4 (3)	4 (3)	7 (3)	7 (6)	0.900	−2
3 وهمى	100 (100)	0 (0)	100 (100)	0 0.330	100 (97)	0 0.650	0.980	−3
الامداد	0.325	0.750	0.260	0.800	0.195	0.650		
v_j	3	3	3	3	6	3		

٨ – ١٤ إذا كانت C مطروحة من كل عنصر فى الصف رقم r ، d من كل عنصر فى العمود رقم t فإن الهدف الجديد Z^1 يرتبط بالهدف القديم Z ، كما : $z^1 = z - ca_r - db_t$ لذلك ، $z^1 - z$ يكون ثابتا ، وأى تخصيص يصغر الهدف الواحد يصغر الهدف الآخر .

الفصل التاسع : CHAPTER 9

٩ – ١٠

	1	2	3	4 وهمى	الامداد	u_i
شهر 1 عادى	35 1	38 (0)	41 (6)	0 (5)	1	−5
شهر 1 إضافى	39 1	42 1	45 (6)	0 (1)	2	−1
شهر 2 عادى	1000 (960)	43 1	46 (6)	0 1	2	0
شهر 2 إضافى	1000 (960)	47 (4)	50 (10)	0 2	2	0
شهر 3 عادى	1000 (960)	1000 (957)	40 2	0 1	3	0
شهر 3 إضافى	1000 (960)	1000 (957)	45 (5)	0 2	2	0
الطلب	2	2	2	6		
v_j	40	43	40	0		

٩ - ١١

	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	يناير	فبراير	وهمي	الإمداد	u_i
أغسطس	73 (0)	83 (0)	93 4.5	103 2.2	113 3.1	0 2.7	12.5	0
سبتمبر	68 7.1	78 3.9	88 (0)	98 (0)	108 (0)	0 (5)	11.0	−5
أكتوبر	1000 (935)	75 9.3	85 0.2	95 (0)	105 (0)	0 (8)	9.5	−8
نوفمبر	1000 (968)	1000 (958)	52 8.1	62 (0)	72 (0)	0 (41)	8.1	−41
ديسمبر	1000 (982)	1000 (972)	1000 (962)	48 5.5	58 (0)	0 (55)	5.5	−55
الطلب	7.1	13.2	12.8	7.7	3.1	2.7		
v_j	73	83	93	103	113	0		

٩ - ١٢

	2	3	4	6	7 وهمي	الإمداد	u_i
1	5 20	3 (11)	3 (1)	100 (91)	0 (8)	20	2
2	0 35	100 (113)	100 (103)	4 35	0 (13)	70	−3
3	14 (1)	0 70	10 10	100 (83)	0 10	90	10
4	3 40	100 (110)	0 30	8 (1)	0 (10)	70	0
5	100 (91)	100 (104)	6 30	15 (2)	0 (4)	30	6
الاحتياج	95	70	70	35	10		
v_j	3	−10	0	7	−10		

جدول

	3	4	5	6	7	8 , وهمي	الإمداد	u_i
1	578 135	592 15	10 000 (7094)	10 000 (7101	10 000 (7106)	0 (10)	150	578
2	615 (27)	602 65	10 000 (7084)	10 000 (7091)	10 000 (7096)	0 105	170	588
3	0 185	10 000 (9986)	2328 75	2321 60	2335 (19)	0 (588)	320	0
4	10 000 (10 014)	0 240	2320 (6)	2313 (6)	2302 80	0 (602)	320	-14
الاحتياج	320	320	75	60	80	105		
v_j	0	14	2328	2321	2316	-588		

75 وحدة من الموقع 1 تمر خلال الموقع 3 إلى الموقع 5 ؛ 60 وحدة من الموقع 1 تمر خلال الموقع 3 إلى الموقع 6 ، 15 وحدة من الموقع ،
1 تمرر خلال الموقع 4 إلى الموقع 7 ، 65 وحدة من الموقع 2 تمر خلال الموقع 4 إلى الموقع 7 .

٩ – ١٤

	1	2	3	4	5	الإمداد	u_i
1	0 34	7 (7)	12 7	25 8	65 (25)	49	0
2	7 (7)	0 34	22 (10)	25 12	75 (35)	46	0
3	12 (24)	22 (34)	0 34	17 (4)	28 (0)	34	-12
4	25 (50)	25 (50)	17 (30)	0 32	15 2	34	-25
5	65 (105)	75 (115)	28 (56)	15 (30)	0 34	34	-40
6 وهمي	0 (40)	0 (40)	0 (28)	0 (15)	0 7	7	-40
الاحتياج	34	34	41	52	43		
v_j	0	0	12	25	40		

تتسلم المدينة 3 عربتها السبعة من المدينة 1 . وتتسلم المدينة 4 مجموع 20 عربة من المدن 1 , 2 ، تحتفظ بـ 18 منهم وتشحن 2 إلى المدينة 5 . ويوجد عجز 7 عربات فى المدينة 5 فى الوضع النهائى .

٩ – ١٥ المخزن 1 إلى الشركة 4 ، المخزن 2 إلى الشركة 3 ، المخزن 3 إلى الشركة 2 ، المخزن 4 إلى الشركة 1 ؛ دولار $z^* = \$325\,400.$

٩ – ١٦ المحامى 1 للحالة 5 ، المحامى 2 للحالة 4 ، المحامى 3 للحالة 3 ، المحامى 4 للحالة 2 ، المحامى 5 للحالة 1 ؛ ساعة
$z^* = 436$ h.

٩ – ١٧ $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1,$ عند $z^* = 270$

٩ – ١٨ $1 \to 2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1$ عند $\to 3 \to 4 \to 1$ عند $Z^* = 14$

٩ – ٢١ لمصفوفه التكلفة

$$\begin{bmatrix} 1000 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1000 & 1000 & 1000 & 1 \\ 1 & 1000 & 1000 & 1 & 1000 \\ 1 & 1000 & 1 & 1000 & 1000 \\ 1 & 1 & 1000 & 1000 & 1000 \end{bmatrix}$$

الطريق المغلق الذى يتقاطع مع نفسه $1 \to 5 \to 2 \to 1 \to 4 \to 3 \to 1$ أرخص من أى دائرة ذات طول 5 .

الفصل العاشر CHAPTER 10

١٠ – ١٤ (أ) حد أعلى محلى وشامل عند $x = 1$ ، وحد أدنى محدود (محلى) وشامل عند $x = 0$ ، حد أدنى محدود (محلى) وشامل عند $x = 3$ ، (ب) حد أعلى محدود (محلى) وشامل عند $x = 1$ ، حد أدنى محلى وشامل عند $x = 3$ ، حد أعلى محدود (محلى) وشامل عند $x = 4$. ، (ج) حد أدنى محدود (محلى) وشامل عند $x = -1$ ، حد أعلى محلى عند $x = 1$ حد أدنى محلى عند $x = 3$ ، حد أعلى محدود (محلى) وشامل عند $x = 5$.

١٠ – ١٥ (أ) حد أعلى (محلى) عند $x = 0$ ، حد أدنى محلى وشامل عند $x = 1$ ، حد أعلى (محلى) وشامل عند $x = 3$. (ب) حد أعلى (محلى) وشامل عند $x = 0$ ، حد أدنى شامل عند $x = 1$ ، حد أعلى (محلى) وشامل عند $x = 2$. (ج) حد أعلى (محلى) عند $x = 0$ ، حد أدنى محلى وشامل عند $x = 1$ لا يوجد حد أعلى شامل .

١٠ – ١٦ (أ) حد أدنى محلى وشامل عند $x = 1$. (ب) حد أعلى محلى وشامل عند $x = -1$ (ج) حد أدنى (محلى) عند $x = 5$ ، حد أعلى (محلى) عند $x = 10$

١٠ – ١٧ $f''(x) = 6(x - 2)$ يكون سالباً عند $x < 2$ موجب عند $x > 2$

١٠ – ١٨ مقعر بالتحديد عند $(0, \infty)$ ، محدب (بالتحديد) عند $(-\infty, 0)$.

١٠ – ١٩ $x^* = 1.9375,$ عند $z^* = 4.002$.

١٠ – ٢٠ $x^* = 3\pi/4 = 2.356,$ عند $z^* = 3.926;\ \epsilon = \pi/8 = 0.393$

$x^* = 1.905,$ عند $z^* = 4.005.$ ٢١ - ١٠

$x^* = 2.175,$ with $z^* = 3.893$ و $\epsilon' = 0.242.$

$x^* = 1.931,$ عند $z^* = 4.002.$ ٢٣ - ١٠

$x^* = 2.225,$ عند $z^* = 3.928;\ \epsilon = 0.283.$ ٢٤ - ١٠

الفصل الحادى عشر CHAPTER 11

١٥ - ١١ $x_1^* = 2.5,\ x_2^* = 3,\ x_3^* = 0.4;\ z^* = 0$

١٦ - ١١ $z^* = 1$ تحدث عند نقط كثيرة أحدها $x_1^* = x_2^* = 0$

١٧ - ١١ يوجد حد أدنى محلى عند $x_1 = 12,\ x_2 = 24,$ عند $z = -0.001157$ ولكن لا يوجد حد أدنى شامل (تقترب الدالة من $-\infty$ عندما x_1 ، x_2 تقترب من الصفر من خلال قيم سالبة) .

١٨ - ١١ $z^* = -0.6495$ تحدث عند نقط كثيرة أحدها $x_1^* = \pi/3,\ x_2^* = \pi/3.$

$x_1^* = 0,\ x_2^* = \pm 1;\ z^* = 0.7358.$ ١٩ - ١١

$x_1^* = x_2^* = 1.496,\ x_3^* = 1;\ z^* = -1.$ ٢٠ - ١١

$x_1^* = 2,\ x_2^* = 3;\ z^* = -10.076.$ ٢١ - ١١

$x_1^* = x_2^* = 1;\ z^* = 0.$ ٢٢ - ١١

$A = 1.47 \times 10^{-30},\ m = 0.04.$ فى $1980,\ N = 36\,597.$ ٢٣ - ١١

$\mathbf{H}_f = 2\mathbf{A}.$ ٢٤ - ١١

الفصل الثانى عشر CHAPTER 12

١٦ - ١٢ تعظيم $z = x_1^4 e^{-0.01(x_1 x_2)^2}$

علماً بأن $2x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0$

١٧ - ١٢ تعظيم $z = -(x_1 - 1)^2 - x_2^2$

علماً بأن $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$

١٢ - ١٨ تصغير $z = 6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$

علماً بأن $x_1 + x_2 - 2 \leq 0$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

١٢ - ١٩ تعظيم $z = -24x_1^2 - 14x_2^2 - 46x_3^2 + 28x_1x_2 + 24x_2x_3 - 34x_2x_3$

علماً بأن

$$-11x_1 - 9x_2 - 12x_3 + 1000 \leq 0$$
$$x_2 + x_3 - 40 \leq 0$$
$$-x_2 - x_3 + 40 \leq 0$$

عند : كل المتغيرات لا سلبية

١٢ - ٢٠ تعظيم $z = 3x_1x_3 + 4x_2x_3$

علماً بأن

$$x_2^2 + x_3^2 - 4 \leq 0$$
$$-x_2^2 - x_3^2 + 4 \leq 0$$
$$x_1x_3 - 3 \leq 0$$
$$-x_1x_3 + 3 \leq 0$$

عند كل المتغيرات لا سلبية

١٢ - ٢١ $x_1^* = 2,\ x_2^* = 0;\ z^* = 1.$

١٢ - ٢٢ $x_1^* = x_2^* = 0,\ x_3^* = -1;\ z^* = -1.$

١٢ - ٢٣ $x_1^* = 0,\ x_2^* = 4,\ x_3^* = 17/3;\ z^* = 68/3.$

١٢ - ٢٤ $x_1^* = x_2^* = 0;\ z^* = 1.$

١٢ - ٢٥ $x_1^* = \pm 3/\sqrt{2},\ x_2^* = x_3^* = \pm\sqrt{2};\ z^* = 17.$ لتحقيق شرط اللاسلبية ، خذ الأشارة الموجبة فى كل حالة .

١٢ - ٢٦ $x_1^* = \pm\sqrt{5},\ x_2^* = 0;\ z^* = 25$

١٢ - ٢٧ $z^* = 7.980$ عند عدد من النقط ، أحدهم $x_1^* = x_2^* = 1.911,\ x_3^* = 0.822.$

١٢ - ٢٨ $Z^* = 11$ عند ستة نقط أحدها $x_1^* = 3,\ x_2^* = x_3^* = 1$

١٢ - ٢٩ $x_1^* = 3.512,\ x_2^* = 0.217,\ x_3^* = 3.552;\ z^* = 38.28$

١٢ - ٣٠ لا يوجد حد أدنى شامل . $z \to 1$ عندما $x_1 \to 0$ ، مع الاحتفاظ بـ (x_1, x_2, x_3) ممكنة

١٢ - ٣١ $x_1^* = 1.5,\ x_2^* = 0.5;\ z^* = 5.5.$

١٢ - ٣٢ $x_1^* = 58.18,\ x_2^* = 40,\ x_3^* = 0;\ z^* = 38\,476$

$x_1^* = x_2^* = 5000,\ x_3^* = 0;\ z^* = 9 \times 10^7.$ ١٢ – ٣٣

$x_1^* = 0.823,\ x_2^* = 0.911;\ z^* = 1.393.$ ١٢ – ٣٤

$x_1^* = 1/3,\ x_2^* = 5/3;\ z^* = 2.249.$ ١٢ – ٣٥

$x_1^* = 1.4,\ x_2^* = 0.8;\ z^* = 1.8.$ ١٢ – ٣٦

$x_1^* = 1.07,\ x_2^* = 2.80;\ z^* = 9.47.$ ١٢ – ٣٧

الفصل الثالث عشر : CHAPTER 13

١٣ – ٩ تعظم

$$z = [x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} -24 & 14 & 12 \\ 14 & -14 & -17 \\ 12 & -17 & -46 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0, 0, 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

علماً بأن

$$\begin{bmatrix} -11 & -9 & -12 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} -1000 \\ 40 \\ -40 \end{bmatrix}$$

عند $x_1, x_2,$ ، x_3 لا سلبية .

١٣ – ١٠

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} -11 & -9 & -12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 48 & -28 & -24 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ -28 & 28 & 34 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & 1 & -1 \\ -24 & 34 & 92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -12 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1000 \\ 40 \\ -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = [x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3]^T$$

$x_1^* = 58.18,\ x_2^* = 40,\ x_3^* = 0;\ z^* = 38\,476.$ ١٣ – ١١

$x_1^* = 1,\ x_2^* = 1;\ z^* = 3.$ ١٣ – ١٢

$x_1^* = 2.5,\ x_2^* = 2.882,\ x_3^* = 1.736;\ z^* = 332.9.$ ١٣ – ١٣

تصغير

$$z = [x_1, x_2, x_3]\begin{bmatrix} 486.8 & 302.1 & -209.0 \\ 302.1 & 197.9 & -114.6 \\ -209.0 & -114.6 & 228.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

علماً بأن

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6\,000\,000$$

$$1.75x_1 + 1.65x_2 + 1.45x_3 \le 10\,000\,000$$

كل المتغيرات لاسلبية

$$Q=\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 200\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\qquad A=[1,1]\qquad B=[15\,000]=15\,000$$

$$AQ^{-1}A^T=[1,1]\begin{bmatrix}1/100 & 0\\ 0 & 1/200\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=3/200$$

$$z^*=\frac{\begin{vmatrix}3/200 & -15\,000\\ 15\,000 & 0\end{vmatrix}}{3/200}=1.5\times10^{10}$$

١٣ - ١٩

$$8+z^*=\frac{\begin{vmatrix}-4 & -(5-4)\\ (5-4) & 0\end{vmatrix}}{-4}-(-4)=3.75 \qquad \text{أو} \qquad z^*=-4.25$$

الفصل الرابع عشر : CHAPTER 14

١٤ - ١ يوم $z^*=\$700;\ x_1^*=3$ يوم $x_2^*=0,\ x_3^*=2$ يوم.

١٤ - ١٢ $z^*=\$675;\ x_1^*=2$ يوم $x_2^*=1$ يوم $x_3^*=2$ يوم ; or $x_1^*=3$ days, $x_2^*=1$ يوم $x_3^*=1$ day

١٤ - ١٣ $z^*=\$150;\ x_1^*=x_2^*=0,\ x_3^*=2,\ x_4^*=1.$

١٤ - ١٤ $z^*=\$398;\ x_1^*=12,\ x_2^*=2.$

١٤ - ١٥ $z^*=51;\ x_1^*=3,\ x_2^*=0,\ x_3^*=2.$

١٤ - ١٦ $z^*=130;\ x_1^*=0,\ x_2^*=1,\ x_3^*=1,\ x_4^*=0,\ x_5^*=0.$

١٤ - ١٧ $x_1^*=3,\ x_2^*=1,\ x_3^*=2.$

١٤ - ١٨ باستخدام الرموز فى المسألة ١٤ - ٨ نحصل على القيم $j=4,3,2,1$

$$m_j(u)=\underset{0\le x\le u}{\text{أكبر}}\{I(x)-M(x)-R(u)+R(x)+m_{j+1}(x+1)\}$$

عند $m_5=0$ و $R(0)=0$ فإن دولار $z^*=\$33\,600$ إما بشراء ماكينة ذات عمر سنة واحدة كل سنة أو ، بشراء ماكينة ذات عمر سنة واحدة للسنوات الثلاث الأولى والاحتفاظ بهذه الماكينات للسنة الرابعة .

١٤ - ١٩ متغير الحالة للمرحلة j له القيمة $u=1,2,\ldots,j$ وهى الأعمار الممكنة للعربة فى الخدمة فى بداية العام j. د ع :

العائد المتوقع من الماكينة ذات عمر U سنة مشتراه فى المرحلة K $=I_k(u)$.

تكلفة احلال الماكينة ذات عمر U سنة مشتراه فى المرحلة K بواحدة $=R_k(u)$

تكلفة صيانة الماكينة ذات عمر U سنة مشتراه فى المرحلة K جديده $=M_k(u)$

د ع $I_j(3)=-M$ (عدد كبير سالب) . لذلك ، عند $j=5,4,3,2,1$ عند $m_6(u)=0$

يكون الحل دولار $z^*=\$26\,000$ عند $x_5^*=$ احتفظ ، $x_4^*=$ إشترى ، $x_3^*=$ احتفظ ، $x_2^*=$ إشترى ، $x_1^*=$ احتفظ

$$m_j(u)=\max\{I_{j-u}(u)-M_{j-u}(u)+m_{j+1}(u+1),\ I_j(0)-M_j(0)-R_{j-u}(u)+m_{j+1}(1)\}$$

١٤ – ٢٠ دع كل شغلة يناظر مرحلة ، وحدد الحالة فى المرحلة j بالرمز الثلاثى (a_1, a_2, a_3) حيث $a_i = 0$ أو $1, (i = 1, 2, 3)$ طبقاً لما يكون أو لا يكون العامل i جاهزاً للتعيين للشغلة j . لذلك

$$z^* = \text{أقل} \{c_{11} + \text{أقل} \{c_{22} + c_{33}, c_{32} + c_{23}\}, c_{21} + \text{أقل} \{c_{12} + c_{33}, c_{32} + c_{13}\}, c_{31} + \text{أقل} \{c_{12} + c_{23}, c_{22} + c_{13}\}\}$$

تفضل الطريقة المجرية أكثر بكثير لمسائل التعيين الكبيرة

١٤ – ٢١ دولار 980 985 4 بانتاج 2, 3, 3, 6, حاسب . (لاحظ أن الخصم قد غير السياسة المثلى) .

١٤ – ٢٢ 62. 047 30 نفس السياسة المثلى كما فى المسألة ١٤ — ١٨

الفصل الخامس عشر : CHAPTER 15

١٥ – ٨ $z^* = 13$ للشجرة $\{AD, BD, CE, DE, DG, EH, GF\}$

١٥ – ٩ $z^* = 55$ لعدد من الشجرات تحتوى $\{AD, AC, DG, BF, BE, FG, GH, HI, GJ, HK, KL\}$.

١٥ – ١٠ $z^* = 25$ للمسار $\{AD, DG, GH, HK, KL\}$ أو المسار $\{AB, BF, FG, GH, HK, KL\}$.

١٥ – ١١ $z^* = 14$ وحدة

١٥ – ١٢ $z^* = 21$ وحدة

١٥ – ١٣ $z^* = 123$ وحدة

١٥ – ١٤ $z^* = 17$ وحدة

١٥ – ١٥ دولار $2400 = {}^*z$ (50 وحدة عند دولار 48 لكل منهم)

١٥ – ١٦ مبدئياً : إما : احتفظ ، احتفظ ، احتفظ ، احتفظ ، اشترى ، اشترى ، لذلك اشترى عربة جديدة كل سنة .

١٥ – ١٧ (*a*) 22; (*c*) 19

١٥ – ١٨ ١٩ وحدة .

١٥ – ١٩ يكون القطع $\{BG, EG, CG, FG, DG\}$ قيمة القطع ، 1 تمثل حد أعلى فى المسار ، وحيث أن المسار لوحدة واحدة ممكناً (من المسألة ١٥ — ٥) فيكون أعلى مسار .

الفصل السادس عشر : CHAPTER 16

١٦ – ١١ (أ) B_1 ، B_4 تفضل عنها B_2 غير مستقرة

$$\mathbf{X}^* = \left[\frac{10}{11}, \frac{1}{11}\right] \qquad \mathbf{Y}^* = \left[0, \frac{10}{11}, \frac{1}{11}, 0\right] \qquad G^* = -\frac{12}{11}$$

(ب) B_3 تفضل عنها B_1 تفضل عنها B_2 . غير مستقرة

$$X^* = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \qquad Y^* = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right] \qquad G^* = 0$$

(ج) B_1 , B_2 , B_4 تفضل عنها B_3 . مستقرة عند $G^* = -1$ لاعب الصف يجب أن يستخدم A_2 فقط ؛ لاعب العمود يجب أن يستخدم B_3 فقط

(ء) غير مستقرة .

$$X^* = Y^* = [2/7, 4/7, 1/7] \qquad G^* = -4/7$$

(هـ) A_3 تفضل عنها A_2 , B_1 تفضل عنها : B_3

$$X^* = [2/7, 5/7, 0] \qquad Y^* = [0, 5/7, 2/7] \qquad G^* = 32/7$$

(و) A_1 , A_3 , A_4 تفضل عنهم A_2 . مستقرة عند $G^* = 0$. لاعب الصف يجب أن يستخدم A_2 فقط ، لاعب الصف يجب أن يستخدم B_1 فقط .

١٩ – ١٢ $X^* = [1/4, 3/4]$, $Y^* = [3/4, 1/4, 0]$; $G^* = 68.125$

١٩ – ١٣ يجب أن يتمركز المحلين فى المدينة C ، المحل I يأخذ 65 فى المائة من حجم العمل الكلى .

١٩ – ١٤ أكتب A_1 على ورقة صغيرة ، A_2 على ثلاث ورقات صغيرة ، A_4 على إحدى عشرة إسحب ورقه (بالاحلال) قبل كل لعبة .

١٩ – ١٥ يستخدم الجيش A طريق الغابة بإحتمال 1/4 والأرض المنبسطة بإحتمال 3/4 ، يهجم الجيش B فى أى من الطريقين بإحتمال 1/2 قيمة المبارة (للجيش B) هى ضربات $G^* = 5/2$.

١٩ – ١٦ يهجم الجيش الأزرق على المطار ذات 20 مليون دولار بالقوة الكاملة بإحتمال 4/9 ويهجم على المطار الآخر بالقوة الكاملة بإحتمال 5/9. يدافع الجيش الأحمر عن المطار الأغلى بالقوة الكاملة بإحتمال 2/3 ويقسم قوته على المطارين بإحتمال 1/3. مليون دولار $G^* = 6\frac{2}{3}$

١٩ – ١٧ كلاهما يجب أن يقدم 2 ياردة .

١٩ – ١٨ I-95 بإحتمال 0.53 والطريق الخلفى بإحتمال 0.47.

١٩ – ١٩ $X = [5/12, 7/12, 0]$, $Y^* = [4/9, 5/9, 0]$

١٩ – ٢٠ من $E(X, Y) = -E(Y, X)$ ينتج أن $g_{ij} = -g_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, r)$. لأى متجهين إحتمال ذات أبعاد r لذلك .

$$M_I = \underset{X}{\text{أعلى}} \; (\underset{Y}{\text{أقل}} \; E(X, Y)) = \underset{X}{\text{أعلى}} \; (\underset{Y}{\text{أقل}} - E(Y, X))$$

$$= -\underset{X}{\text{أقل}} \; (\underset{Y}{\text{أعلى}} \; E(Y, X)) = -\underset{Y}{\text{أقل}} \; (\underset{X}{\text{أعلى}} \; E(X, Y)) = -M_{II}$$

$M_I = M_{II}$ بنظرية الأقل أكبر . لذلك .

$$M_I = M_{II} = 0 = G^*$$

١٩ – ٢١ لا ، دولار $G^* = -\$0.25$

الفصل السابع عشر :

١٧ - ١٦ لأخذ العرض بأسلوب أقل الأعلى أما منتصف الطريق ، ليس تأخذ العرض بأسلوب التفاؤل .

١٧ - ١٧ يمتد الضمان

١٧ - ١٨ يتحول

١٧ - ١٩ لا يأخذ العرض

١٧ - ٢٠ لا يمتد الضمان

١٧ - ٢١ أنظر الشكل A-1 (العائد بالالف دولار) . لاختبار مرحلة الوقوف منفردا ، ثم التحول إلى عملية جديدة فقط إذا كانت مرحلة الوقوف منفرداً ذات كفاءة .

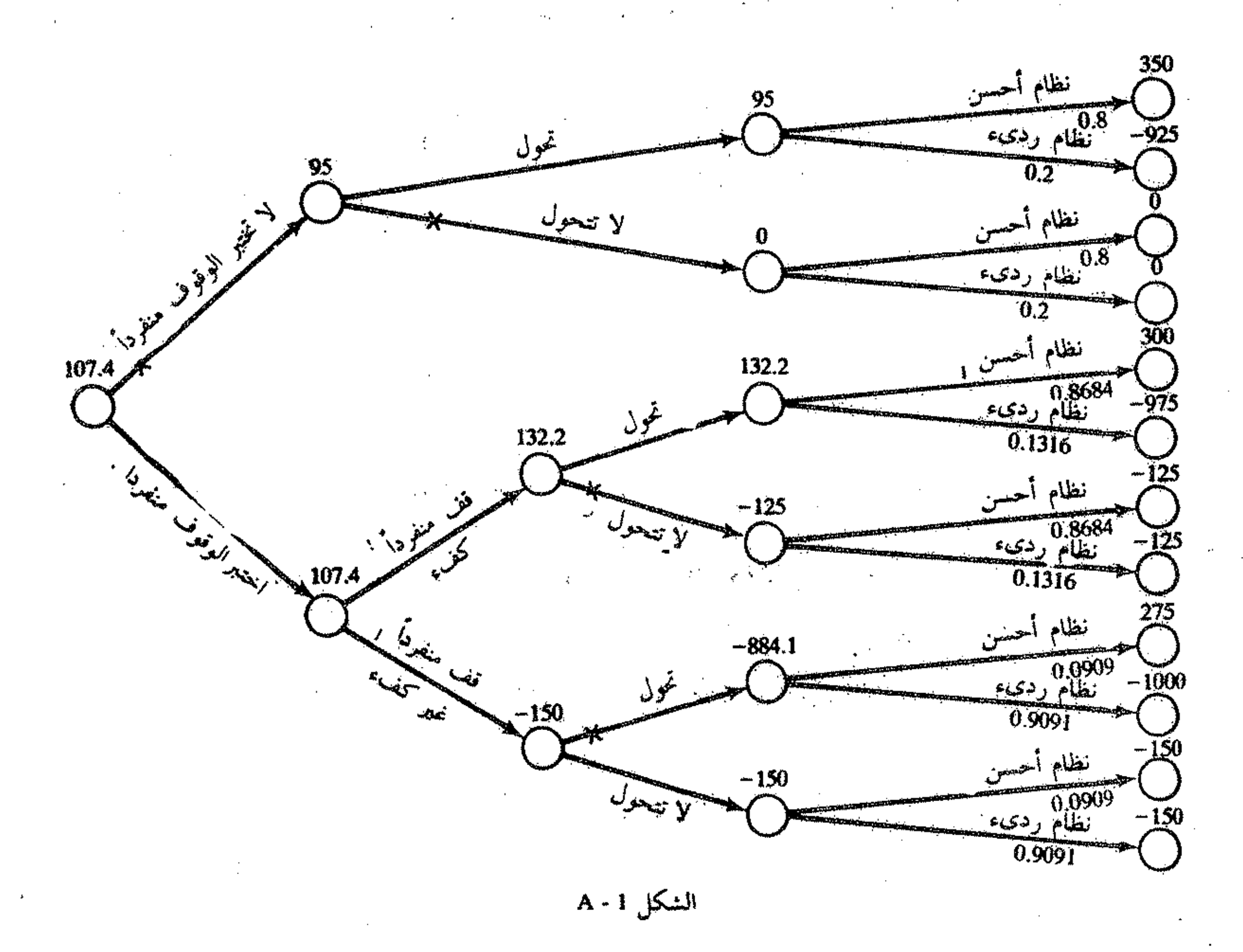
١٧ - ٢٢ لا تطلب اختبار الكذب وأفصل أمين الخزينة .

١٧ - ٢٣ إختبر السوق ، ثم تعامل على المستوى القومي فقط إذا كانت نتائج الاختبار ناجحة جداً أو بدرجة معقولة .

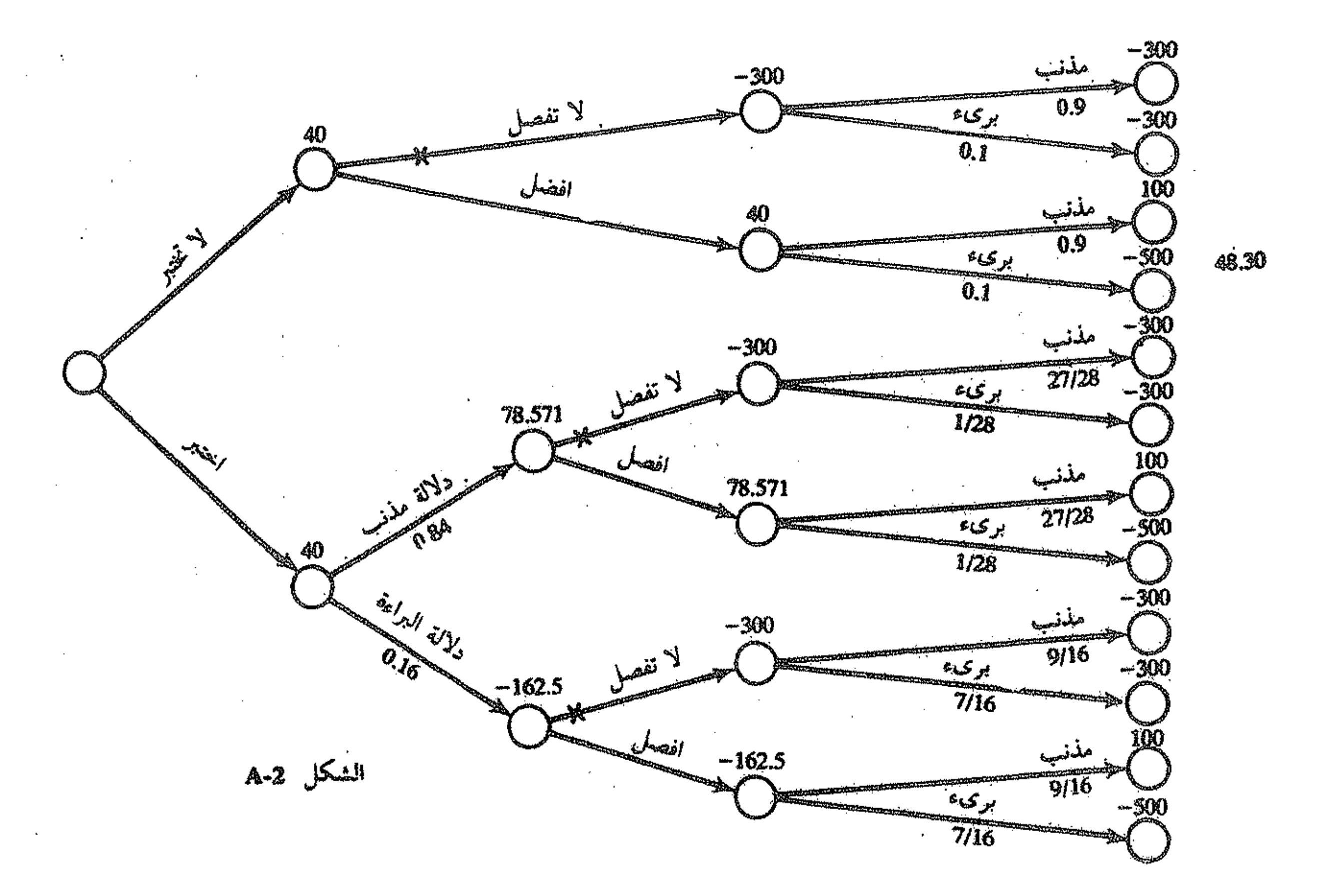
١٧ - ٢٤ 250 82 دولار .

١٧ - ٢٥ الاختبار له قيمة صفر ، أنظر الشكل A-2 (العائد بالألف دولار) .

١٧ - ٢٦ قدره = $u(49)$, $u(-15)=0,\ u(-14)=0.07,\ u(-4)=0.31,\ u(-3)=0.32,\ u(19)=0.42,\ u(20)=0.425,$
0.87, and $u(50)=1$ = (14- نفس الأجابة مثل المسألة ١٧ - ٢٣ .



الشكل A - 1



الشكل A-2

١٧ - ٢٧ $u_2 = 85,\ u_3 = 55,\ u_4 = -20$

١٧ - ٢٨ $C(0.34) = -\$2\,000\,000,\ R(0.34) = \$8\,460\,000$

١٧ - ٢٩ يبعد عن المغامرة عند (10 , 15 -) ، لا أختلاف على المغامرة عند (31 , 10) ، يبحث عن المغامرة عند (50 , 31) .

١٧ - ٣٠ إعتبر موقف تجنب المغامرة . دع (Mi (is 1, 2, -n تمثل العائد بالدولار المناظر لحالة الطبيعة رقم S^i , i للقرار المحدد D . أرمز لمنفعة M^i بالرمز u^i واحتمال S^i بالرمز P^i . وحيث أن دالة المنفعة هى محدبة بالتحديد ، يكون معكوسها مقعراً بالتحديد . لذلك .

$$C = f(p_1u_1 + p_2u_2 + \cdots + p_nu_r) \leq p_1f(u_1) + p_2f(u_2) + \cdots + p_nf(u_n) = E(D)$$

وهو العائد بالدولار المتوقع من القرار ومن ثم ، $R = E(D) - C \geq 0$ وبالمثل تثبت حالة البحث عن المغامرة ،

١٧ - ٣١

	S_1	S_2	S_3
D_1	−130	−45	0
D_2	−90	−15	−45
D_3	−20	0	−110
D_4	0	−5	−125

١٧ - ٣٢ بإستخدام جميع الاعتذار ، اختار D_2 بأسلوب أقل الأعلى ، إما D_1 أو D_2 بأسلوب التفائل وD_2 بأسلوب منتصف الطريق .

١٨ – ٦ ، دولار 77,40 = in (8) عند سياسة 3, 2, 3

١٨ – ٧ ، دع الحالة u لتكون العدد بالألف دولار للوحدات فى اليد . فإن دولار 2600 = in, (2) فى ظل السياسة المثلى .

d \ u	0	1	2	3	4	5	6
$d_1(u)$	···	···	A, B	···	···	···	···
$d_2(u)$	···	A, B	A, B	A, B	A, B	···	···
$d_3(u)$	O	B	A, B	A, B	A, B	A, B	A, B

وهنا ، O تمثل قرار عدم عمل أى استثمار .

١٨ – ٨ ، $m_1(2) = 0.352$ للسياسة .

	0	1	2	3	4	5	6
$d_1(u)$	···	···	A	···	···	···	···
$d_2(u)$	···	A	A	O, A, B	A	···	···
$d_3(u)$	···	···	···	A	A	O	O

١٨ – ٩ ، اجعل احتمال عدم وجود بترول حداً أدنى . فيكون اعلى إحتمال لوجود الزيت هو $1 - m_1(8) = 1 - 0.6 = 0.4$ بتخصيص كل النقود للموقع 1 .

١٨ – ١٠ ، الحالة u هى عدد الوحدات من العمل التى لم تستكمل بعد . لذلك يكون $m_1(0) = 5.0368$ ويكون أحد السياسات المثلى هو .

d \ u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_1(u)$	···	···	···	···	···	···	···	···	···	···	2
$d_2(u)$	0	1	1	1	1	1	1	2	2	3	3
$d_3(u)$	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4
$d_4(u)$	0	1	1	4	4	5	5	6	···	···	···

١٨ – ١١ ، خذ الحالة u تمثل عمر الماكينة الحالية . فإن دولار $m_1(1) = 3118.83$ فى ظل السياسة أنه دائماً نحتفظ بالماكينة الحالية(الشغالة) .

١٨ – ١٢ ، الحالة u هى عدد الحاسبات فى المخزن . فإن دولار $m_1(0) = \$127\,110$ تحت السياسة .

d \ u	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$d_1(u)$	...	...	...	...	...	3	...	...	...	...	...	...
$d_2(u)$	...	4	4	4	3	3	0	0	0	...	...	...
$d_3(u)$	4	4	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0
$d_4(u)$	4	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
$d_5(u)$	...	...	...	...	1	0	0	0	0	0	0	0

١٨ – ١٣ ، أعلى إعتمادية هي 0.351 من 3 وحدات من العنصر 1 , 2 وحدة من العنصر 2 , 1 وحدة من العنصر 3 .

١٨ – ١٤ ، المقاولون من الباطن 3, 2, 1, يخصص لهم العناصر 2 ,1 ,3 على التوالى .

١٨ – ١٥ ، دع :

عدد وحدات المناعة المطلوبة لاستكمال المجموع 6 (من 0 إلى 6 بالعشرة) $\equiv u$

الحد الأدنى لعدد الأيام المفقودة المتوقعة ابتداء من المرحلة (اليوم) j فى الحالة $\equiv m_j(u)$

عدد الأقراص المأخوذة فى اليوم (من 0 إلى 5 ، لماذا ؟) $\equiv x$

عدد وحدات المناعة الممتصة من عدد أقراص $X \equiv f(x)$

احتمال فقد العمل فى اليوم التالي (يكافىء عدد الأيام المفقودة من العمل) $\equiv p(x)$

لذلك لقيم $j = 1, 2, 3, 4,$

$$m_j(u) = \underset{x=0,\dots,5}{\text{أقل}} \left[p(x) + m_{j+1}(u - f(x))\right]$$

vith $m_j(u) \equiv 0$ عند $u < 0$ $(j = 2, 3)$ عند

و

$$m_5(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ 10\,000 & u > 0 \end{cases}$$

١٨ – ١٦ دع :

عدد وحدات العمل المطلوبة لانهاء المشروع 1 (من 0 إلى 16 بالعشرة) $\equiv u$

عدد وحدات العمل المطلوبة لانهاء مشروع 2 (0 إلى 23 بالعشرة) $\equiv v$

الحد الأدنى المتوقع لتكلفة استكمال كلا المشروعين المبتدئين عند الحالة (اليوم) $\equiv m_j(u, v)$ فى الحالة (u, v).

عدد وحدات العمل المستكملة بالأطقم z للمشروع i $(i = 1, 2)$ $\equiv f_i(z)$

عدد أطقم المقاول المعينون للمشروع i $(i = 1, 2)$ $\equiv x_i$

عدد أطقم المقاول من الباطن المعينون للمشروع i $(i = 1, 2)$ $\equiv y_i$

لذلك عندا $j = 1, \dots, 5,$

$$m_j(u, v) = (0.9)(5000) + (0.1)(4000) + \text{أقل} \left[1500(y_1 + y_2) + m_{j+1}(u - g_1(x_1, y_1), v - g_2(x_2, y_2))\right]$$

حيث

$$g_1(x_1, y_1) = \begin{cases} f_1(x_1 + y_1) & x_1 = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0.9 f_1(5 + y_1) + 0.1 f_1(4 + y_1) & x_1 = 5 \end{cases}$$

$$g_2(x_2, y_2) = \begin{cases} f_2(y_2) & x_2 = 0 \\ 0.9 f_2(x_2 + y_2) + 0.1 f_2(x_2 + y_2 - 1) & x_2 = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

ويؤخذ الحد الأدنى لكل القيم غير السلبية الصحيحة لـ x_1, x_2, y_1, y_2 بحيث يكون

$$x_1 + x_2 = 5 \qquad x_1 + y_1 \le 6 \qquad x_2 + y_2 \le 6$$

ويكون الشرط النهائى هو

$$m_6(u, v) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \text{ and } v \le 0 \\ 1\,000\,000 & u > 0 \text{ or } v > 0 \end{cases}$$

١٨ — ١٧ عدد الوحدات النقدية المتبقية للتخصيص $u =$

عدد الأصوات المكتسبة مسبقاً $v =$

أعلى إحتمال لكسب 100 صوت على الأقل ابتداء من المرحلة (الأولية) j فى الحالة (u, v) . $m_j(u, v) =$

عدد الأصوات فى المرحلة j $V_j =$

إحتمال كسب Vj إذا أنفق X وحدات نقدية فى المرحلة $p_j(x) =$

لذلك

$$m_j(u, v) = \underset{0 \le x \le \min(u, 7)}{\text{أكبر}} \{p_j(x)m_{j+1}(u - x, v + V_j) + [1 - p_j(x)]m_{j+1}(u - x, v)\}$$

لقيم $j = 1, \ldots, 5,$

عند

$$m_6(u, v) = \begin{cases} 0 & v < 100 \\ 1 & v \ge 100 \end{cases}$$

القيم الممكنة لـ v هى O للمرحلة 1 , o , 89 للمرحلة 2 , 0 , 69 , 89 , 158 للحالة 3 ، وهكذا .

الفصل التاسع عشر : CHAPTER 19

١٩ — ١٥ تصادفى ، غير عادى ، تصادفية نهائية $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

١٩ — ١٦ غير تصادفى

١٩ — ١٧ غير تصادفى

١٩ — ١٨ تصادفى — غير عادى — غير تصادفية نهائية .

١٩ — ١٩ تصادفى — غير عادى — وتصادفية نهائية

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & 5/8 \end{bmatrix}$$

١٩ — ٢٠ تصادفى ، عادى ، تصادفية نهائية

$$L = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 19 & 17 & 9 \\ 19 & 17 & 9 \\ 19 & 17 & 9 \end{bmatrix}$$

١٩ — ٢١ تصادفى ، غير عادى ، تصادفية نهائية .

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

١٩ – ٢٢ 3 / 11

١٩ – ٢٣

١٩ – ٢٤ 4 / 13 أو تقريباً 31 فى المائة من الزمن .

١٩ – ٢٥ 0.2 , 0.14 , 0.154 , 0.151 , 0.12162 .

١٩ – ٢٦ (أ) تقريباً 34 إخلاء ، 31 مسعفون ، 18 بالسراير ، 17 موت .
(ب) تقريباً 65 إخلاء ، 35 موت .

١٩ – ٢٧ 7 / 12 فى حالة جيدة ، 5 / 12 فى حالة متوسطة .

١٩ – ٢٨ (أ) 1 ، (ب) لا شيء ، (ج) 3,1 ، (د) 1 .

١٩ – ٢٩ حدد أحد حالات الامتصاص مثل الحالة 1 فإن P لها 1 فى الموضع (1 / 1) ، اصفار فى باقى الصف الأول . أى قوى ل P سيكون لها نفس الصف الأول .

١٩ – ٣٢ بسبب أن 1 = y هى قيمة أيجن ل P^T ، تكون أيضاً قيمة أيجن فى P (للمصفوفتين نفس معادلة التمييز) .

١٩ – ٣٣ أثبت أولاً بالحث ، أن متجه أيجن التابع لقيم أيجن المحددة فى P هى خطية مستقلة . ثم إنشيء M من متجهات أيجن N الخطية المستقلة .

١٩ – ٣٤ أنظر المسألة ١٩ – ١٥ .

الفصل العشرون CHAPTER 20

٢٠ – ١٣ أى كتكوت يحفظ أكثر من 5 أسابيع لا ينتج أكثر من 7 سنتاً أعلى من كتكوت عمره 5 أسابيع . وهذا أقل من 10 سنت ربح تفاضلى ناتج من إحلال كتكوت عمر 5 أسابيع بكتكوت مولود حديثاً وبيعه بعد أسبوع . والسياسة المثلى هى البيع عندما تكون الكتاكيت ذات عمر 3 أسبوع . هنا معدل الفائدة الأسبوعى نحصل عليه بحل $(1 + i)^{52} = 1.09$ ، ويكون $L' = 0.00$

$$\alpha = \frac{1}{1+i} = 0.998344109$$ ومن ثم

٢٠ – ١٤

الحالة	2	3	4	5
القرار	0	3	4	5

٢٠ – ١٥ الحالة 1 : أدخل السنة بماكينة عمرها 1 سنة
الحالة 2 : أدخل السنة بماكينة عمرها 2 سنة
الحالة 3 : أدخل السنة بتأجير ماكينة عمرها 1 سنة
الحالة 4 : أدخل السنة بتأجير ماكينة عمرها 2 سنة

الحالة	1	2	3	4
القرار	أحتفظ	أجر	أحتفظ	أجر

٢٠ – ١٦ إذا رمزت I إلى مصفوفة أحادية $N \times N$

$$\mathbf{Y} = [PV(1), PV(2), \ldots, PV(N)]^T$$

يمكن كتابة (٢٠ – ٢) كا

$$\left(\frac{1}{\alpha}\mathbf{I} - \mathbf{P}\right)\mathbf{Y} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{C}$$

مصفوفة المعاملات بالطرف الأيسر يمكن أن تكون صفرية إذا كان $1/\alpha$ مساوية λ ، وهى قيمة أيجن لـ P ولكن

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + i > 1$$

بينما (النظرية ١٩ – ١) $|\lambda| \leq 1 = 1 + i \quad 1$

٢٠ – ١٧ $PV(1) = \$12\,665, \; PV(2) = \$13\,065, \; PV(3) = \$13\,565.$

٢٠ – ١٨

i	1	2	3
d_i	2	4	4

٢٠ – ١٩ أضبط الماكينة عندما لا تكون فى الحالة 1 .

٢٠ – ٢٠ الحالات هى عدد الأجزاء بالمخزن يوم السبت مساءً ، قبل طلب أى أجزاء جديدة

الحالة	0	1	2	3	4
القرار	3	0	0	0	0

٢٠ – ٢١

i	1	2	3
d_i	0	4	4

٢٠ – ٢٢

الحالة	0	1	2	3	4
القرار	3	0	0	0	0

٢٠ – ٢٣ يرقى الذين لهم تقديرات 16 , 17 , 18 فقط .

الفصل الواحد والعشرين : CHAPTER 21

٢١ – ١٠ 0.5204, 8.166, 81.66.

٢١ – ١١ 0.9272, 66.69, 666.9

٢١ – ١٢ 0.0621, 3.1, 12.1

٢١ – ١٣ 20.25

٢١ – ١٤ 132 805 عربة .

٢١ – ١٥ 7 يوم

٢١ – ١٦ 0.029.

٢١ – ١٧ 0.5064, 2.48.

٢١ – ١٨ 0.9000, 1.23

٢١ – ١٩ 0.0341, 4.30

٢١ – ٢٠ $1-p_0(12)=0.4530$ في الدقيقة $\mu=(2/3)$

٢١ – ٢١ 0.1034

٢١ – ٢٢ عضو 0.1815.

٢١ – ٢٣ $\lambda=1/4,\ \mu=2/7,\ 48.95$

٢١ – ٢٥ (أ) n/λ (ب) نعم

٢١ – ٢٦ $\lambda_1\Delta t+\lambda_2\Delta t=(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t.$

الفصل الثانى والعشرين : CHAPTER 22

٢٢ – ٦ (أ) الأفراد الباحثين عن الطعام ، (ب) مقدم الطعام والخزينة (ج) صف واحد بعدد مقدمى خدمة على التوالى ، بنظام FIFO ، طاقة غير محدودة إذا سمح بالأنتظار خارج الكافيتريا .

٢٢ – ٧ (أ) الأفراد الراغبين فى الحلاقة ، (ب) الحلاقين ، (ج) اثنين مقدمي خدمة ، FIFO ، طاقة محدودة بسبعة .

٢٢ – ٨ (أ) الأفراد الراغبين البنزين ، (ب) العملاء بالمحطة ، (ج) ثلاثة مقدمى .
مقدمى خدمة ، FIFO ، طاقة محدودة إذا لم يسمح بالانتظار خارج المحطة .

٢٢ – ٩ (أ) الطائرات المنتظرة الهبوط ، (ب) الممرات ، (ج) عموماً ، مقدم خدمة واحد ، بأسبقية للطائرات المضطرة للهبوط ، (وإلا FIFO) ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١٠ (أ) عربات ، (ب) جامع العملات ، (ج) عدد مقدمي خدمة بعدد جامعي العملات ، FIFO ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١١ (أ) الأعمال التي ستكتب ، (ب) عامل الآلات الكاتبة ، (ج) مقدمي خدمة بعدد كاتبي الآله ، يمكن أن يكون الصف FIFO أو PRI (بأسبقية تعطى الأعمال بواسطة الادارة أو بالتخصيص السريع) ، طاقة غير محددة .

٢٢ - ١٢ (أ) القوات ، (ب) أماكن الأفراد في حاملي الجنود ، (ج) مقدمي خدمة بعدد المحلات ، بأسبقية بالرتبة ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١٣ (أ) الحالات ، (ب) القاضي ، (ج) مقدم خدمة واحد غالبا FIFO ، طاقة غير محدودة .

٢٢ - ١٤ (أ) 18 :10 , 30 : 9 (ب) 033 . 1 ، (ج) 2.533

٢٢ - ١٥ (أ) 4 ، (ب) 16 (لا تحتوى على الثلاثة أعمال التي تصل عند نهاية الدورة)

٢٢ - ١٦ 20 دقيقه

٢٢ - ١٧ خمسة (لا تتضمن العميل الذى لا يسمح له بالدخول في 60 دقيقة)

الفصل الثالث والعشرين CHAPTER 23

٢٣ - ١٤ (*a*) 2.25, (*b*) 4.5 min, (*c*) 0.062, (*d*) 0.25

٢٣ - ١٥ (*a*) 2, (*b*) 1.33, (*c*) 1 h, (*d*) 0.368

٢٣ - ١٦ (*a*) 2.25, (*b*) 2.25 min, (*c*) 3 min, (*d*) 0.178

٢٣ - ١٧ (*a*) 0.9, (*b*) 1.5, (*c*) 0.7364, (*d*) 0.07776

٢٣ - ١٨ (*a*) 0.528, (*b*) 0.2, (*c*) 0.632

٢٣ - ١٩ $16.80

٢٣ - ٢٠ نعم بوفر يومى متوقع 105 دولار

٢٣ - ٢١ 110 قدم مربع .

٢٣ - ٢٢ لا شيء على L أو W ؛ L_q تخفض ب 1/2

٢٣ - ٢٣ $\rho^{n-2}(1-\rho)$

٢٣ - ٢٤ $(1-\rho)^{-1}$.

٢٣ – ٢٦ المعدل المتوقع للانتقال إلى الحالة n هو $(n = 0$ إذا كانت μp_1, or$)$ $\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}$ ، المعدل المتوقع للانتقال من الحالة n هو $(n = 0$ إذا كانت λp_0, or$)$ $\lambda p_n + \mu p_n$ بمساواة هذه ، القسمة على μ تعطى (1) ، (2) للمسألة ٢٣ – ٧ .

٢٣ – ٢٧

$$F(z) = \frac{p_0}{1 - \rho z}$$

٢٣ – ٢٨ من نظرية ٢١ – ١ يكون مسار المغادرة عملية بواسون عندما يكون مقدم الخدمة مشغولاً . وهذه هى الحالة التى فيها النسبة f من الزمن ، ومن ثم ، العدد المتوقع للمغادرة فى وحدة الزمن يكون

$$\rho\mu + (1 - \rho)(0) = \lambda$$

الفصل الرابع والعشرون CHAPTER 24

٢٤ – ١١ (a) 1/3, (b) 16/45

٢٤ – ١٢ (a) 23.5 s, (b) 0.1420, (c) 3.987

٢٤ – ١٣ بالنظام الجديد ينقص الوقت الضائع للموظف من 66.67 إلى 60 فى المائة ، L تنخفض من $2(\frac{1}{2}) = 1$ إلى 0.9524.

٢٤ – ١٤ (a) 0.025, (b) 0.3, (c) 0.675

٢٤ – ١٥ (أ) 2.5 (ب) 8 ق ، (ج)25 دولار فى الساعة .

٢٤ – ١٦ (أ) 13 ساعة 4 ق ، (ب) 495.48 دولار فى اليوم .

٢٤ – ١٧ لا . التكلفة الجديدة ستكون 213.33 دولار من إعادة الأوتوبيس بدون خدمة ، بالأضافة إلى 300 دولار للطاقم الجديد .

٢٤ – ١٨ (أ) 53 فى المائة ، (ب) 1.32 فى اليوم

٢٤ – ١٩ (a) 2.90, (b) 46.4 s, (c) 50.4 h^{-1}

٢٤ – ٢٠ (a) 2.089, (b) 6 min 48 s

٢٤ – ٢١ (a) 2.77, (b) 2.94 min

٢٤ – ٢٢

$$p_0 = \frac{1 - 0.8\rho}{1 + 0.2\rho} \quad \text{و} \quad p_n = (0.8)^{n-1}\rho^n p_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

٢٤ – ٢٣ (a) 1.53, (b) 4.72 دقيقة

٢٤ – ٢٤ (a) 1.51, (b) 3 دقيقة 14ث (c) \$3.72 فى الساعة

٢٤ - ٢٥ طبقا لـ (٢٤ - ١) تتحقق دلالة الحالة المستقرة (أنظر المسألة ٢٣ - ٢٦) إذا حدثت الخطوات لأعلى فى الحالة n ولأسفل من الحالة n بنفس المعدل المتوقع .

٢٤ - ٣٠ $p_0 = 0.0450,\ p_1 = 0.1350,\ p_2 = p_3 = 0.2024,\ p_4 = 0.1518,\ p_5 = 0.1139,\ p_6 = 0.0854,\ p_7 = 0.0641.$

٢٤ - ٣١ $L = \rho,\ W = L/\lambda = 1/\mu,\ W_q = 0,\ L_q = 0.$

٢٤ - ٣٢ (a) 350, (b) 0.368.

٢٤ - ٣٣

$$p_0 = \left[\frac{s^s\rho^{s+1}}{s!}\sum_{n=s+1}^{N_0}\frac{N_0!}{(N_0-n)!}\rho^{n-(s+1)} + \sum_{n=0}^{s}\binom{N_0}{n}(s\rho)^n\right]^{-1}$$

$$p_n = \begin{cases}\binom{N_0}{n}(s\rho)^n p_0 & (n = 1, \ldots, s)\\ \dfrac{N_0!}{(N_0-n)!}\dfrac{s^s\rho^n}{s!}p_0 & (n = s+1, s+2, \ldots, N_0)\end{cases}$$

عندما $N_0 \to \infty$ | تقترب هذه الاصطلاحات من (٢٤ - ٥) ، (٢٤ - ٦) علماً بأن $\rho < 1$

٢٤ - ٣٥ (أ) 5.87 (ب) 16 فى المائة .

٢٤ - ٣٦ دع S_n عدد العملاء فى الخدمة عندما تكون الحالة n | $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = W - W_q = \frac{1}{\lambda}(L - L_q) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{n=1}^{\infty} np_n - \sum_{n=1}^{\infty}(n - S_n)p_n\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} S_n p_n = \frac{1}{\lambda}(1-p_0)\sum_{n=1}^{\infty} S_n \frac{p_n}{1-p_0} = \frac{1}{\lambda}(1-p_0)\bar{S}$$

قائمة بأهم المصطلحات العلمية

(أ)

إزدواجية	Duality
امثلية	Optimization
اقصى ميل صعود	Steepest ascent
أوزان جزائية	Penalty weight
اتجاهات ممكنة	Feasible directions
أماكن شحن	Junction
إمداد	Supply
احتياجات	Demand
أحادى النموذج	Unimodal
أسلوب البحث التابعى (التسلسلى)	Sequential search
اعتماد خطى	Linear dependence
استقلال خطى	Linear independence
إزدواج	Dual
إزدواجات متماثلة	Symmetric duals
أولى	Primal
أماكن وصول	Destinations
اختبار الأمثلية	Optimality test
أقل أعلى	Minimax
أغراض	Objects
أغراض محددة	Distinct objects
آفاق غير محدودة	Unbounded horizons
أنماط وصول	Arrival Patterns
أنماط خدمة	Service patterns
أقواس	Arcs
استراتيجية	Strategy
استراتيجية مطلقة	Pure strategy
استراتيجية مختلطة	Mixed strategy
أعلى استراتيجية	Maximum strategy

(ب)

برنامج رياضى	Mathematical program
برنامج خطى	Linear program
برنامج غير خطى	Nonlinear program
برنامج أعداد صحيحة	Integer program
برنامج تربيعى	Quadratic program
بحث النمط	Pattern search
بحث فيبوناكس	Fibonacci search
بحث فترة الثلاث	Three-point interval search
بحث المتوسط الذهبى	Golden mean search
باحث عن المجازفة	Risk seeking
بنسق	Systematically

(ت)

Branch & Bounding	تفريع وتحديد
Minimization	تصغير
Maximization	تعظيم
Stochastic	تصادفي
Quadratic	تربيعي
Prescribed tolerance	تفاوت محدد مسبقاً
Converge	تقترب
Exploratory moves	تحركات استكشافية
Perturbation	تشويش
Reasonable guess	تخمين مسبب
Allocation	تخصيص
Dominance	تفضيل (سيطرة)
Assignment	تعيين
Shadow Cost	تكلفة الظل
Penalty Cost	تكلفة جزائية
Convex Combination	تكوين محدب
Permutations	تباديليات
Limiting state distributions	توزيعات الحالات المحددة
Distribution	توزيع
Limiting distribution	توزيع نهائي
Initial distribution	توزيع أولي
Ergodic	تصادفية نهائية (أرجودية)
Balking	تزاحم
Reneging	تخطى
Portfolio analysis	تحليل بورتفوليو
Variance	تباين
Covariance	تباين مشترك
Network analysis	تحليل شبكات
Branches	تفريعات
Maximal flow	تدفق أعلى
Moves	تحركات
Counter moves	تحركات مضادة
Characterisation	توصيف . تميز
Convergence	تقارب

(ث)

Deterministic	ثابتة (مؤكدة)

(ج)

Tableau	جدول بيانات
Schedule	جدول زمني
Policy table	جدول السياسة

(ح)

Optimal solution	حل أمثل
Feasible solution	حل ممكن
Initial solution	حل أولى
Pattern move	حركة نمط
Mathematical induction	حث رياضي
Loop	حلقة
Distinct states	حالات محدده (مميزه)
Simulate	حاكى
Steady State	حالة السكون (الاستقرار)
State of nature	حالات الطبيعة

(خ)

Linear	خطى
Discounting	سعر الخصم
Itinerary	خط الرحلة
Lower bound	حد أسفل

(د)

Function	دالة
Concave functions	دوال مقعرة
Lagrange functions	دوال لاجرانج
Penalty functions	دوال جزائية
Probability generating function	دالة إيجاد الاحتمال
Balking function	دالة التزاحم
Reneging function	دالة التخطى
Minimax criterion	دلالة أقل الأعلى (مقياس)
Middle of the road criterion	دلالة نقطة منتصف الطريق (مقياس)
Optimistic criterion	دلالة التفاؤل
Priori criterion	دلالة سابقة
Postriori criterion	دلالة لاحقة
Naive decision criterion	دلالة القرارات البسيطة

(ز)

Interarrival time	زمن بين الوصول

(س)

Negative difinite	سالبة مؤكدة
Negative semi - definite	سالبة نصف مؤكدة
Finite Markov Chain	سلاسل ماركوف المحدودة

سكون (ساكن)	Stationary
سياسة	Policy
سياسة مثلى	Optimal Policy
سيطرة	Dominance
ساذج	Naive

(ش)

شروط نهائية	Limit condition
شبكة	Net work
شجرة القرار	Decision tree
شامل	Global
شريحة خطية	Line segment

(ص)

صادق (مؤكد)	Significant
صف	Queue
صف إنتظار	Waiting line
صف	Row
صدق الهندسة التحليلية	Geometrical significance
صيغة قياسية	Standard form
صيغة	Formula
صيغة عكسية	Recursive formula

(ض)

ضرب لاحق	Post multiply
ضرب سابق	Premultiply

(ط)

طريقة أقرب جار	Nearest neighbour method
طريقة المرحلتين	Two-phase method
طرق القطع	Cut algorithm
طريقة النقل	Transportation algorithm
طاقة النظام	System Capacity
طاقة غير محدودة	Infinite Capacity
طاقة محدودة	Finite Capacity

(ع)

عدد صحيح	Integer
عينات عشوائية	Random sampling
عامل الرغبة	Desirability
عشوائية	Randomness
عمليات ماركوف	Markov processes
عمليات ثابتة (مؤكدة)	Deterministic processes
عائد	Discounted return
عمليات ميلاد وموت	Birth-death processes
عمليات ميلاد مطلقة	Pure birth process
عمليات موت مطلقة	Pure death Process

Linear Markovian birth process	عمليات الميلاد الخطية لماركوف
Linear Markovian death process	عمليات الموت الخطية لماركوف
Generalised Markovian birth death process	عمليات الميلاد والموت العامة لماركوف
State-dependent process	عملية الحالة المعتمدة
Multi-stage decision process	عمليات القرارات المتعددة المراحل
Recursive	عكس
Node	عقدة
Itirative relation	علاقة تكرارية
Customers	عملاء

(غ)

Infinite	غير محدودة (لا نهائية)

(ف)

Convex sets	فئات محدبة

(ق)

Constrains	قيود
Hidden conditions	قيود غير واضحة
Powers	قوى مضاعفة
Decision	قرار
Recommended decision	قرار مفضل

(ك)

Traffic intensity	كثافة المواصلات
Scalar	كمية مقياسية (غير متجهة)

(ل)

Non negative	لا سلبى
Non degenerate	لا ينحرف
Lotteries	لعب الحظ
IFF (IF and only IF)	لوو (لو وفقط لو)

(م)

Slack variable	متغير مساعد (كاسد)
Surplus variable	متغير زائد
Feasible	ممكنة
Inequality	متباينة
Equality	متساوية
Artificial variable	متغير صناعى
Vector	متجه
Transposed	معكوس (للمصفوفة)
Identity matrix	مصفوفة أحادية
Updated	معدلة
Hypercube	مكعب زائد
Reversed inequalities	متباينات معكوسة
Directional derivatives	مشتقة توجيهية

Inverse matrix	مقلوب المصفوفة
Transposed matrix	معكوس المصفوفة
Exponential curve	منحنى أسى
Least squares	مربعات الصغرى
Lagrange multipliers	مضروبات لا جرانج
Jacobian matrix	مصفوفات جاكوب
Constraint qualifications	مؤهلات مقيدة
Approach	مدخل
Travelling salesman problem	مشكلة البحار المسافر
Single variable	متغير مفرد
Strictly concave	مقعرة بالتحديد
Strictly convex	محدبة بالتحديد
Multivariable	متعدد المتغيرات
Gradiet vector	متجهة متدرج
Hessian matrix	مصفوفة هس
Determinants	محددات
Bounded	محدد
Closed	مغلق
Partial derivative	مشتقة جزئية
Normalised utility	منفعة معدلة
Certainty equivalent	مكافىء مؤكد
Risk premium	مجازفة أولية
Risk indifferent	متساوى المجازفة
Regret matrix	مصفوفة الاعتذار
Transition matrix	مصفوفة الانتقال
Stochastic matrix	مصفوفة تصادفية
Distribution vector	متجهة التوزيع
Ergodic matrix	مصفوفة عشوائية نهائية (أرجودية)
Limit matrix	مصفوفة النهايات
Regular matrix	مصفوفة عادية
Characteristic equation	معادلة التمييز
Scalar multipliers	مضروبات مقياسية
Dominaled	مفضلة
Birth	ميلاد
Death	موت
Birth rate	معدل ميلاد
Death rate	معدل موت
Kolmogorov equations	معادلات كولموجوروف
Servers	من يقدمون الخدمة
FIFO	من يصل أولاً يخدم أولاً
LIFO	من يصل أخيراً يخدم أولاً
Simulation	محاكاة

Random number generator	مولدات أرقام عشوائية
M / M / 1	م / م / ١
Utilisation factor	معامل استخدام
Balance equations	معادلات اتزان
Stage	مرحلة
Oriented	موجه
Sink	مصب
Source	مصدر
Zero-sum game	مباراة صفرية
Two person game	مباراة بين شخصين
Matrix game	مباراة المصفوفات
Pay-off matrix	مصفوفة الربحية (العائد)
Probability vector	متجه الاحتمال
Stable game	مباراة مستقرة
Unstable game	مباراة غير مستقرة
Fair game	مباراة عادله
Symmetric game	مباراة متماثلة
Gain matrix	مصفوفة عائد
Utility	منفعه

(ن)

Junction	نقط إتصال
Unimodal	نموذج أحادى
Stationary Points	نقط ساكنة
Transshipment	نقل بالشحن
Limit	نهاية (نها)
Queuing system	نظم الصفوف
Simulation models	نماذج المحاكاة
Minimum span	نطاق أدنى
Extreme points	نقط طرفية
Graph theory	نظرية الأشكال البيانية

(هـ)

Objective	هدف

(و)

Utility units (utilities)	وحدات منفعة
Dummy	وهمى
Fictitious	وهمى
Links	وصلات
Unique	وحيد

(ى)

Degenerate	ينحرف
Risk diverse	يتجنب المجازفة

رموز وحدات القياس

الوحدة	الرمز
ميل	M
أوقية	OZ
أسبوع	Wk
حد أدنى	Min
حد أعلى	Max
قدم مكعب	Ft^3
قدم مربع	Ft^2
بوصة	(in)
سنت	C
دولار	$
جالون	Gal
رطل	Ib
برميل	Bl
طن	Ton
يوم	D
شهر	Mo
سنة	Y
دقيقة	Min
ساعة	Hr
ثانية	Sec
فى الساعة	H^{-1}
فى الدقيقة	M^{-1}
فى الثانية	S^{-1}
قدم	Ft^o

رقم الإيداع : ٢٥٦١ / ٨٨